2024 届高三年级 11 月份大联考

数学试题

本试卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设 $M=\{x|x=4k-3,k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x|x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$,则

A. $M\subseteq N$　　B. $N\subseteq M$

C. $M=N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

2. 已知 $z=\frac{2-5i}{1-i}$,则 z 的虚部为

A. $-\frac{3}{2}i$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}i$

3. 若 $\tan\alpha=3$,则$\frac{2+\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}=$

A. $\frac{3}{4}$　　B. 1　　C. $\frac{7}{4}$　　D. $\frac{7}{2}$

4. 在三棱台 $ABC-DEF$ 中,截面 PQR 与底面 ABC 平行,若 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle PQR}:S_{\triangle DEF}=1:4:16$,且三棱台 $ABC-PQR$ 的体积为 1,则三棱台 $PQR-DEF$ 的体积为

A. 5　　B. 8　　C. 9　　D. 10

5. 当 n 趋近于$+\infty$时,$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 为一个无理常数 γ,且 $\gamma=0.577\ 215\ 664\ 901\cdots$

运用不等式 $\ln(1+x)\leqslant x$(当且仅当 $x=0$ 时等号成立)来研究 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 的单调性,可得 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10\ 000}$最接近的值为(参考数据:$\ln 10\ 000\approx 9.210\ 3$)

A. 9.787 5　　B. 10.787 5

C. 8.633 1　　D. 11.633 1

6. 设 A,B 为两个事件,已知 $P(A)=\frac{2}{5}$,$P(B)=\frac{3}{5}$,$P(A|\overline{B})=\frac{1}{2}$,则 $P(A|B)=$

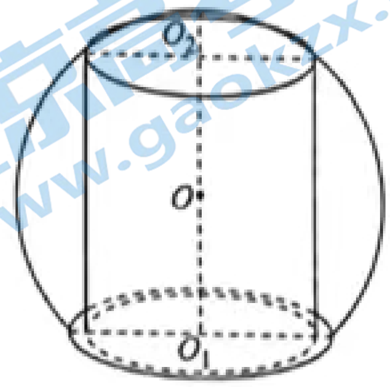
A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$

7. 直线 $x+y=0$ 与函数 $y=\ln x-x^2$ 的图象公共点的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

8. 如图，将圆柱 O_1O_2 的下底面圆 O_1 置于球 O 的一个水平截面内，恰好使得 O_1 与水平截面圆的圆心重合，圆柱 O_1O_2 的上底面圆 O_2 的圆周始终与球 O 的内壁相接（球心 O 在圆柱 O_1O_2 内部），已知球 O 的半径为 3，$OO_1=\frac{3}{2}$，则圆柱 O_1O_2 体积的最大值为



A. 24π　　　　B. $\frac{81\pi}{4}$

C. 20π　　　　D. $\frac{81\pi}{6}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 8 名学生参加 100 m 跑的成绩（单位：s）分别为 13.10，12.99，13.01，13.20，13.01，13.20，12.91，13.01，则

A. 极差为 0.29　　　　B. 众数为 13.01

C. 平均数近似为 13.05　　　　D. 第 75 百分位数为 13.10

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_a(1+ax), x>1\\ 1+x, x\leqslant 1\end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调函数，则 a 的值可以是

A. 2　　　　B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　　D. $\frac{1}{2}$

11. 若 x,y 满足 $(x+y)^2-\frac{8}{3}xy=2$，则

A. $y-x\geqslant-\sqrt{3}$　　　　B. $y-x<2$

C. $xy>\frac{3}{2}$　　　　D. $xy\geqslant-\frac{3}{4}$

12. 定义函数 $f(x)$：①对 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)>0$；②当 $x,y\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)+f(y)<f(x+y)$，记由 $f(x)$ 构成的集合为 M，则

A. 函数 $g(x)=\ln(x+1)\in M$

B. 函数 $h(x)=2^x-1\in M$

C. 若 $f(x)\in M$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增

D. 若 $f(x)\in M$，则对任意给定的正数 s，一定存在某个正数 t，使得当 $x\in(0,t]$ 时，$f(x)\leqslant s$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 若抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 上一点 A 的横坐标为 $\frac{p}{3}$，且 A 到 C 的焦点的距离为 $\frac{5p^2}{6}$，则 A 点的一个纵坐标为________．（写出一个符合条件的即可）

14. 向量 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,-1)$ 上的投影向量为________．（写出坐标）

15. 若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$ 内没有零点，则正数 ω 的取值范围是________．

16. 椭圆 $C:\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的右焦点为 F，若过定点 $(5,0)$ 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，则 $\triangle ABF$ 面积的最大值为________．

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

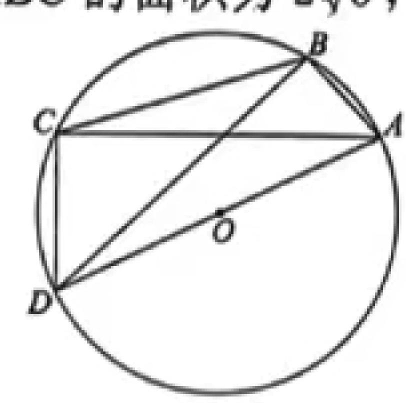
已知正项等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$S_3=15$，S_1，S_2，S_4+8 成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令 $b_n=a_n\cdot 2^n$，求$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.（本小题满分 12 分）

已知 A，B，C，D 四点位于同一个圆 O 上，其中 $BC=2AB=4$，$\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，$\angle ABC>\frac{\pi}{2}$.



(1)求边 AC 的长；

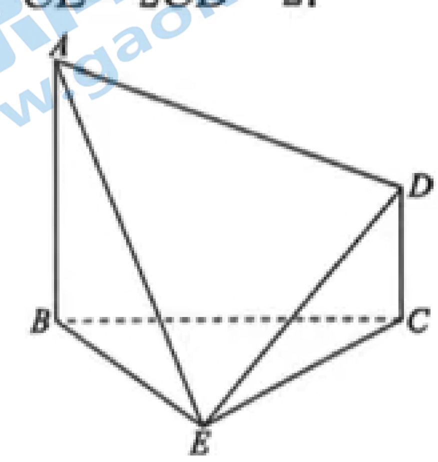
(2)当圆心 O 在 AD 上时，求 $\tan\angle CAD$.

19.（本小题满分 12 分）

如图，平面 $ABCD\perp$ 平面 BCE，$AB\perp BC$，$AB/\!/CD$，且 $AB=BC=CE=2CD=2$.

(1)求证：平面 $ADE\perp$ 平面 ABE；

(2)若$\angle BEC=\frac{\pi}{3}$，求二面角 $A-DE-C$ 的正弦值.



关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

20.(本小题满分 12 分)

某公司建有 1 000 个销售群,在某产品的销售旺季,所有群销售件数 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 $\mu=376$,$\sigma^2=12\ 100$,公司把销售件数不小于 596 的群称为“A 级群”,销售件数在 $[266,596)$ 内的群为“B 级群”,销售件数小于 266 的群为“C 级群”.

(1)若 $P(X<a)\geqslant P(X>2a-1)$,求 a 的取值范围;

(2)该公司决定对每个“A 级群”奖励 1 000 元,每个“B 级群”奖励 500 元,每个“C 级群”奖励 200 元,那么公司大约需要准备多少奖金?(群的个数按四舍五入取整数)

附:若,$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.682\ 7$,$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.954\ 5$,$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.997\ 3$.

21.(本小题满分 12 分)

已知双曲线 C 的两条渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$,且左焦点 F_1 到一条渐近线的距离为$\sqrt{3}$.

(1)求 C 的方程;

(2)过 F_1 的直线 l 与 C 交于 P,Q 两点,且$\overrightarrow{F_1P}=a\overrightarrow{F_1Q}(a\neq -1)$,若点 R 满足$\overrightarrow{PR}=a\overrightarrow{RQ}$,证明:$R$ 在一条定直线上.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+\frac{1}{2}x^2$,$g(x)=x$.

(1)当 $x\in[0,+\infty)$时,比较 $f(x)$与 $g(x)$的大小;

(2)若函数 $h(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$,$f(e^{\frac{a}{2}})+1=h(b)(a>0,b>0)$,求证:$f(b^2)+1>h(a+1)$.

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

2024 届高三年级 11 月份大联考

数学参考答案及解析

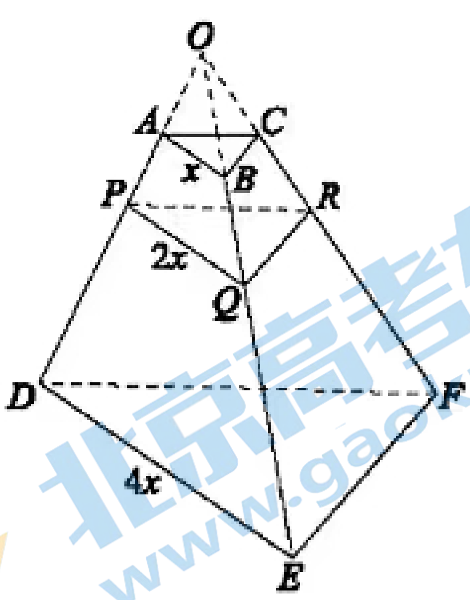
一、选择题

1. A 【解析】因为 $M=\{x|x=4k-3,k\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=2(2k-1)-1,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，所以 $M\subseteq N$. 故选 A.

2. C 【解析】$z=\dfrac{2-5i}{1-i}=\dfrac{(2-5i)(1+i)}{2}=\dfrac{7-3i}{2}$，所以虚部为 $-\dfrac{3}{2}$. 故选 C.

3. D 【解析】因为 $\tan\alpha=3$，所以 $\dfrac{2+\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}=\dfrac{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{2\tan^2\alpha+3}{2\tan\alpha}=\dfrac{2\times3^2+3}{2\times3}=\dfrac{7}{2}$. 故选 D.

4. B 【解析】将三棱台补成三棱锥 $O-DEF$，因为 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle PQR}:S_{\triangle DEF}=1:4:16$，所以 $AB:PQ:DE=1:2:4$，设 $AB=x$，$PQ=2x$，$DE=4x$，三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 a，三棱台 $PQR-DEF$ 的体积为 b，则
$$\begin{cases}\dfrac{a}{a+1}=\left(\dfrac{x}{2x}\right)^3,\\ \dfrac{a}{a+b+1}=\left(\dfrac{x}{4x}\right)^3,\end{cases}$$
所以 $a=\dfrac{1}{7}$，$b=8$. 故选 B.



5. A 【解析】因为 $f(n+1)-f(n)=\dfrac{1}{n+1}+\ln\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}+\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)<\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}=0$，所以 $f(n)$ 单调递减，则 $f(10\,000)>\gamma$，即 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{10\,000}>\gamma+\ln 10\,000\approx9.787\,5$. 故选 A.

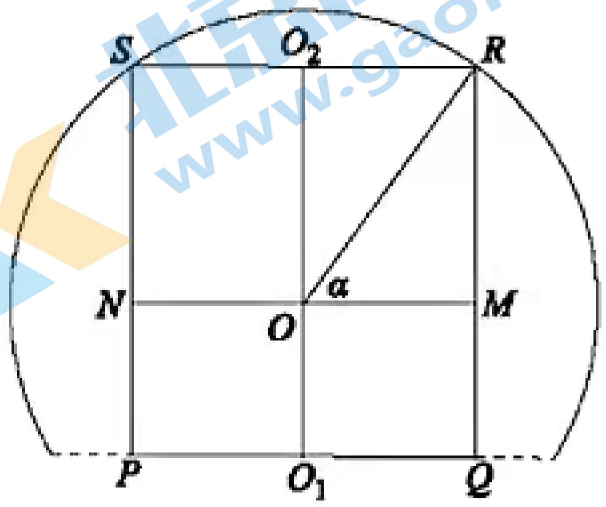
6. B 【解析】根据题意，$P(B)=\dfrac{3}{5}$，则 $P(B)=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$，因为 $P(A)=P(B)P(A|B)+P(B)P(A|B)$，所以 $\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}P(A|B)+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}$，所以 $P(A|B)=\dfrac{1}{3}$. 故选 B.

7. B 【解析】联立 $x+y=0$ 与 $y=\ln x-x^2$，消去 y 得，$x^2-x-\ln x=0$，令 $u(x)=x^2-x-\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，则 $u'(x)=2x-1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$，令 $u'(x)=0$，得 $x=1$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$u'(x)<0$，$u(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$u'(x)>0$，$u(x)$ 单调递增；所以 $u(x)_{\min}=u(1)=0$，即 $x^2-x-\ln x=0$ 有唯一的解 $x=1$. 故选 B.

8. B 【解析】设 R 为圆 O_2 上任意一点，过 R 作圆柱 O_1O_2 的轴截面 $PQRS$，过 O 作 $MN\perp O_1O_2$ 交圆柱轴截面的边于 M,N，设 RO 与圆柱的下底面所成的角为 α，则 $OM=3\cos\alpha$，$MR=3\sin\alpha$，所以 $V=\pi\cdot OM^2\cdot QR=\pi\cdot(3\cos\alpha)^2(OO_1+3\sin\alpha)=\dfrac{27\pi}{2}\cos^2\alpha(1+2\sin\alpha)$，即 $V=\dfrac{27\pi}{2}\cos^2\alpha(1+2\sin\alpha)=\dfrac{27\pi}{2}(1-\sin^2\alpha)\cdot(1+2\sin\alpha)$，当点 P,Q 均在球面上时，角 α 取得最小值，此时 $OO_1=OO_2=\dfrac{3}{2}$，所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$，令 $\sin\alpha=t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$，所以 $V=$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$\frac{27\pi}{2}(1-t^2)(1+2t)=\frac{27\pi}{2}(-2t^3-t^2+2t+1)$，所以 $V'=\frac{27\pi}{2}(-6t^2-2t+2)$，所以 $V'=\frac{27\pi}{2}(-6t^2-2t+2)\leqslant\frac{27\pi}{2}\times\left[-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}+2\right]=-\frac{27\pi}{4}<0$，所以 $V=\frac{27\pi}{2}(-2t^3-t^2+2t+1)$ 在 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ 时单调递减，所以 $V_{max}=\frac{27\pi}{2}\times\left[-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)+1\right]=\frac{81\pi}{4}$ 故选 B.



二、选择题

9. ABC 【解析】将该组数据从小到大排列为：12.91，12.99，13.01，13.01，13.01，13.10，13.20，13.20，对 A，极差为 $13.20-12.91=0.29$，故 A 正确；对 B，众数为 13.01，故 B 正确；对 C，平均数为 $13+\frac{1}{8}\times(-0.09-0.01+0.01+0.01+0.01+0.1+0.2+0.2)=13.053\approx13.05$，故 C 正确；对 D，$8\times0.75=6$，所以第 75 百分位数为 $\frac{13.10+13.20}{2}=13.15$，所以 D 错误. 故选 ABC.

10. BC 【解析】由题意，函数 $f(x)=\begin{cases}\log_a(1+ax),x>1\\1+x,x\leqslant1\end{cases}$ 是 R 上的单调函数，所以 $\begin{cases}a>1\\1+a\geqslant0\\\log_a(1+a)\geqslant2\end{cases}$，解得 $1<a\leqslant\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 故选 BC.

11. ABD 【解析】令 $y-x=t$，即 $y=x+t$，代入 $(x+y)^2-\frac{8}{3}xy=2$ 得，$x^2+tx+\frac{3}{4}(t^2-2)=0$，所以 $\Delta=t^2-3(t^2-2)\geqslant0$，解得 $-\sqrt{3}\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$，所以 A 正确，B 正确；由 $(x+y)^2-\frac{8}{3}xy=2$ 可变形为 $x^2+y^2=\frac{2}{3}xy+2$，因为 $-\frac{x^2+y^2}{2}\leqslant xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $-\frac{xy}{3}-1\leqslant xy\leqslant\frac{xy}{3}+1$，解得 $-\frac{3}{4}\leqslant xy\leqslant\frac{3}{2}$，所以 C 不正确，D 正确. 故选 ABD.

12. BCD 【解析】对于 A，$g(x)=\ln(x+1)$，则当 $s>0$，$t>0$ 时，$g(s)>0$，$g(t)>0$，$g(s)+g(t)=\ln(s+1)+\ln(t+1)=\ln[(s+1)(t+1)]=\ln(st+s+t+1)>\ln(s+t+1)=g(s+t)$，所以 $g(x)=\ln(x+1)\notin M$，所以 A 错误；对于 B，$h(x)=2^x-1$，则当 $s>0,t>0$ 时，$h(s)=2^s-1>0$，$h(t)=2^t-1>0$，$h(s)+h(t)-h(s+t)=2^s-1+2^t-1-2^{s+t}+1=(2^s-1)(1-2^t)$，因为 $2^s-1>0$，$1-2^t<0$，所以 $h(s)+h(t)-h(s+t)<0$，所以 $h(s)+h(t)<h(s+t)$，所以 $h(x)=2^x-1\in M$，所以 B 正确；对于 C，因为 $f(x)\in M$，所以对于任意 $s>0,t>0$ 都有 $f(s)>0$，$f(t)>0$，且 $f(s)+f(t)<f(s+t)$，所以 $f(s+t)-f(t)>f(s)>0$，因为 $s+t>t>0$，s 为任意给定的正数，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 C 正确；对于 D，对给定的正数 s，若 $f(1)\leqslant s$，则取 $t=1$，使得当 $x\in(0,t]$ 时，由 C 的单调性得，$f(x)\leqslant f(1)\leqslant s$，若 $f(1)>s$，因为 s 为任意给定的正数，所以必存在充分大的 $n_1\in\mathbf{N}^*$，满足：$\frac{f(1)}{2^{n_1}}\leqslant s$，因为对于任意 $s>0,t>0$ 都有 $f(s)>0$，$f(t)>0$，且 $f(s)+f(t)<f(s+t)$，所以当 $s=t=\frac{1}{2}$ 时，得 $2f\left(\frac{1}{2}\right)<f(1)$，即 $f\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{f(1)}{2}$，同理可得，$f\left(\frac{1}{2^2}\right)<\frac{f(1)}{2^2}$，$f\left(\frac{1}{2^3}\right)<\frac{f(1)}{2^3}$，…，$f\left(\frac{1}{2^m}\right)<\frac{f(1)}{2^m}$ $(m\in\mathbf{N}^*)$，即

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$f\left(\frac{1}{2^n}\right)<\frac{f(1)}{2^n}$（$\forall n\in\mathbf{N}^*$），取 $t=\frac{1}{2^{n_1}}$，使得当 $x\in(0,t]$ 时，由 C 单调性得，$f(x)\leqslant f(t)=f\left(\frac{1}{2^{n_1}}\right)<\frac{f(1)}{2^{n_1}}\leqslant s$，所以 D 正确．故选 BCD．

三、填空题

13．$\frac{\sqrt{6}}{3}$或$-\frac{\sqrt{6}}{3}$　【解析】因为准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，所以 $\frac{p}{3}+\frac{p}{2}=\frac{5p^2}{6}$，所以 $p=1$，所以 $C:y^2=2x$，点 A 的横坐标为 $\frac{1}{3}$，所以 A 点的纵坐标为 $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$．（写出一个符合条件的即可）

14．$\left(-\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$　【解析】向量 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,-1)$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{-3}{5}\times(2,-1)=\left(-\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$．故答案为 $\left(-\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$．

15．$\left(0,\frac{3}{5}\right]$　【解析】令 $f(x)=0$ 得，$x=\frac{(5k-1)\pi}{5\omega}$（$k\in\mathbf{Z}$），若 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$ 内存在零点，则 $\exists k\in\mathbf{Z}$ 满足：$\frac{\pi}{3}<\frac{(5k-1)\pi}{5\omega}<\frac{4\pi}{3}$，因为 $\omega>0$，所以 $5k-1>0$，所以 $k\geqslant1$，所以 $\exists k\in\mathbf{Z}$，且 $k\geqslant1$ 满足：$\frac{3(5k-1)}{20}<\omega<\frac{3(5k-1)}{5}$，解法一：若 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$ 内不存在零点，则 $\forall k\in\mathbf{Z}$，且 $k\geqslant1$ 满足 $\omega\leqslant\frac{3(5k-1)}{20}$ 或 $\omega\geqslant\frac{3(5k-1)}{5}$，得 $0<\omega\leqslant\frac{3}{5}$，所以当 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$ 内没有零点时，$0<\omega\leqslant\frac{3}{5}$．

解法二：即 $\left(\frac{3}{5},\frac{12}{5}\right)\cup\left(\frac{27}{20},\frac{27}{5}\right)\cup\cdots=\left(\frac{3}{5},+\infty\right)$，若 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$ 内不存在零点，则 $0<\omega\leqslant\frac{3}{5}$．故答案为 $\left(0,\frac{3}{5}\right]$．

16．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$　【解析】当直线 AB 的倾斜角为 0 时，显然不符合题意；当直线 AB 的倾斜角不为 0 时，设方程为 $x=my+5$，联立方程组 $\begin{cases}x=my+5,\\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 得 $(5+4m^2)y^2+40my+80=0$，$\Delta>0$ 得 $m^2>5$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，所以 $y_1+y_2=\frac{-40m}{5+4m^2}$，$y_1y_2=\frac{80}{5+4m^2}$，$|AB|=\sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\frac{8\sqrt{5(m^2+1)(m^2-5)}}{5+4m^2}$，$d=\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$，所以 $S_{\triangle ABF}=\frac{16\sqrt{5}\sqrt{m^2-5}}{4m^2+5}=\frac{16\sqrt{5}}{4\sqrt{m^2-5}+\frac{25}{\sqrt{m^2-5}}}\leqslant\frac{16\sqrt{5}}{2\times10}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，当且仅当 $4\sqrt{m^2-5}=\frac{25}{\sqrt{m^2-5}}$，即 $m^2=\frac{45}{4}$ 时取等号，所以 $\triangle ABF$ 面积的最大值为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$．故答案为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$．

四、解答题

17．解：(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$，

所以 $S_3=3a_1+3d=15$，$S_1=a_1$，$S_2=2a_1+d$，$S_4=4a_1+6d$，

因为 S_1，S_2，S_4+8 成等比数列，

所以 $(2a_1+d)^2=a_1(4a_1+6d+8)$，　　（2 分）

得 $\begin{cases}a_1=1\\ d=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=\frac{25}{3}\\ d=\frac{-10}{3}\end{cases}$，　　（4 分）

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

因为此数列各项均为正，

所以 $a_1=1,d=4$ 得 $a_n=4n-3$.　　（5分）

(2)$b_n=(4n-3)2^n$，

所以 $T_n=1\times2^1+5\times2^2+9\times2^3+\cdots+(4n-7)2^{n-1}+(4n-3)2^n$，　　（7分）

所以 $2T_n=1\times2^2+5\times2^3+9\times2^4+\cdots+(4n-7)2^n+(4n-3)2^{n+1}$，　　（8分）

两个等式相减得，$-T_n=1\times2^1+4\times2^2+4\times2^3+\cdots+4\cdot2^n-(4n-3)2^{n+1}$，　　（9分）

所以 $-T_n=2+4\cdot\frac{2^2-2^{n+1}}{1-2}-(4n-3)2^{n+1}$，

所以 $T_n=14+(4n-7)\times2^{n+1}$.　　（10分）

18. 解：(1)因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC=2\sqrt{3}$，　　（1分）

因为 $BC=2AB=4$，所以 $\frac{1}{2}\times2\times4\cdot\sin\angle ABC=2\sqrt{3}$，所以 $\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，　　（2分）

因为 $\angle ABC>\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，　　（3分）

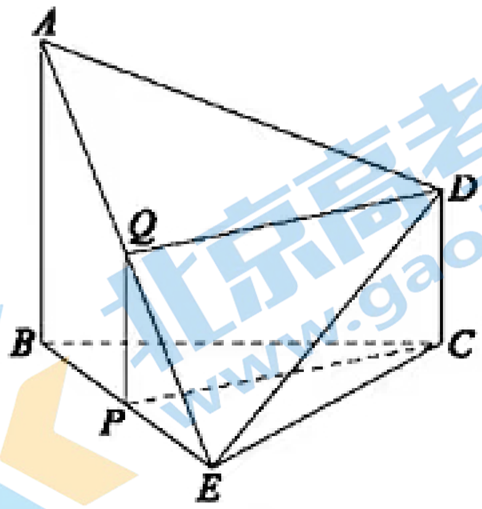
所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{7}$.　　（5分）

(2)由题意得直径 $AD=\frac{2\sqrt{7}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{4\sqrt{21}}{3}$，　　（8分）

$CD=\sqrt{AD^2-AC^2}=\sqrt{\frac{28}{3}}$，　　（10分）

所以 $\tan\angle CAD=\frac{CD}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　（12分）

19. 解：(1)分别取 BE,AE 的中点为 P,Q，连结 PQ,PC,QD，



则 $PQ/\!/AB,PQ=\frac{AB}{2}$，因为 $AB/\!/CD,AB=2CD$，

所以 $PQ/\!/CD,PQ=CD$，　　（1分）

所以四边形 $PQDC$ 为平行四边形，

所以 $DQ/\!/CP$，　　（2分）

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 BCE，$AB\perp BC$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $BCE=BC$，

所以 $AB\perp$ 平面 BCE，所以 $AB\perp CP$，　　（3分）

因为 $BC=CE$，所以 $CP\perp BE$，$AB\cap BE=B$，所以 $CP\perp$ 平面 ABE，所以 $DQ\perp$ 平面 ABE，　　（4分）

因为 $DQ\subset$ 平面 ADE，所以平面 $ADE\perp$ 平面 ABE.　　（5分）

(2)因为 $BC=CE=2$，$\angle BEC=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle BCE$ 是边长为2的正三角形，分别取 BC,AD 的中点为 O,G，连结 OE,OG，

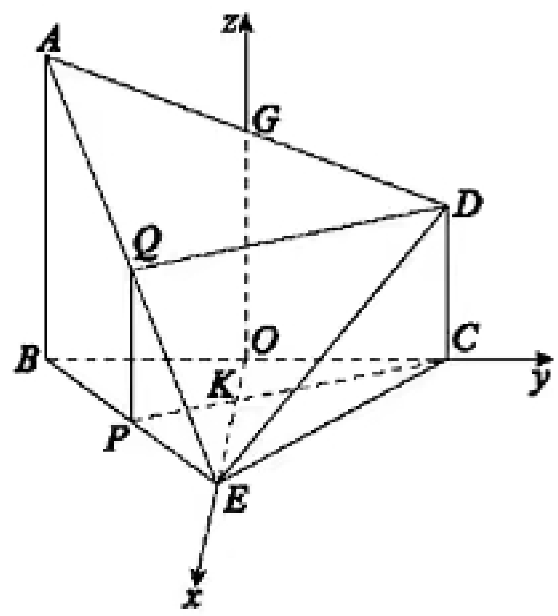
所以 $OE\perp OC$，

因为 $AB\perp$ 平面 BCE，$OG/\!/AB$，所以 $OG\perp$ 平面 BCE，

所以 OE,OC,OG 两两垂直，

分别以射线 OE,OC,OG 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，　　（8分）

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。



设 CP 与 OE 交于 K，由已知 $AB=BC=2CD=2$ 得，

$B(0,-1,0)$，$C(0,1,0)$，$E(\sqrt{3},0,0)$，$K\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,0\right)$，$A(0,-1,2)$，$D(0,1,1)$，

所以平面 CDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{BK}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1,0\right)$，（9 分）

$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},1,-2)$，$\overrightarrow{DE}=(\sqrt{3},-1,-1)$，

设平面 ADE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，所以

$\begin{cases}\sqrt{3}x+y-2z=0\\ \sqrt{3}x-y-z=0\end{cases}$，令 $y=1$，所以 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},1,2)$，（11 分）

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2}{\sqrt{\frac{4}{3}}\times\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

所以二面角 $A-DE-C$ 的正弦值为 $\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.（12 分）

20. 解：(1) 由题意，$\mu=376$，$\sigma=110$，因为 $P(X<a)\geqslant P(X>2a-1)$，

所以 $\begin{cases}a\leqslant 376\leqslant 2a-1,\\ 376-a\leqslant(2a-1)-376,\end{cases}$（1 分）

或 $\begin{cases}2a-1\leqslant 376\leqslant a,\\ a-376\geqslant 376-(2a-1),\end{cases}$（2 分）

或 $\begin{cases}a\geqslant 376,\\ 2a-1\geqslant 376,\end{cases}$（3 分）

解得，$251\leqslant a\leqslant 376$ 或 $a\geqslant 376$，所以 $a\geqslant 251$.（5 分）

(2) $266=376-110=\mu-\sigma$，$596=376+220=\mu+2\sigma$，

故 $P(X\geqslant 596)=P(X\geqslant\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}\times(1-0.954\ 5)=0.022\ 75$，（6 分）

所以"A 级群"约有 $1\ 000\times 0.022\ 75=22.75\approx 23$ 个，（7 分）

$P(266\leqslant X<596)=P(\mu-\sigma\leqslant X<\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}\times 0.682\ 7+\frac{1}{2}\times 0.954\ 5=0.818\ 6$，（8 分）

所以"B 级群"约有 $1\ 000\times 0.818\ 6=818.6\approx 819$ 个，（9 分）

$P(X<266)=P(X<\mu-\sigma)\approx\frac{1-0.682\ 7}{2}=0.158\ 65$，（10 分）

所以"C 级群"约有 $1\ 000\times 0.158\ 65=158.65\approx 159$，（11 分）

所以需要资金为 $23\times 1\ 000+819\times 500+159\times 200=464\ 300$，

故公司大约需要准备奖励资金 464 300 元.（12 分）

21. 解：(1) 解法一：因为双曲线 C 的两条渐近线的方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，焦点 F_1，F_2 位于 x 轴上，所以可设 C 的方程为 $y^2-3x^2=\lambda\ (\lambda<0)$，化为标准方程为

$\frac{x^2}{-\frac{\lambda}{3}}-\frac{y^2}{-\lambda}=1$，（1 分）

所以半焦距 $c=\sqrt{-\frac{\lambda}{3}+(-\lambda)}=\frac{2\sqrt{-3\lambda}}{3}$，

因为 F_1 到一条渐近线的距离为 $\sqrt{3}$，所以

$\frac{\left|\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{-3\lambda}}{3}\right)\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$，（2 分）

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

所以 $\lambda=-3$，所以 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.　（3 分）

解法二：由题意可得 $F_1(-c,0)$，F_1 到渐近线的距离为 $d=\frac{|\sqrt{3}\times(-c)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\sqrt{3}$，解得 $c=2$，　（1 分）

且 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，$a^2+b^2=c^2=4$，解得 $a^2=1$，$b^2=3$，

（2 分）

所以 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.　（3 分）

(2) 依题意，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$R(x_0,y_0)$，

①当直线 l 为 x 轴时，则 $P(-1,0)$，$Q(1,0)$，

又由(1)知 $F_1(-2,0)$，故 $\overrightarrow{F_1P}=(1,0)$，$\overrightarrow{F_1Q}=(3,0)$，

所以 $\overrightarrow{F_1P}=\frac{1}{3}\overrightarrow{F_1Q}$，从而 $a=\frac{1}{3}$，

则 $\overrightarrow{PR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{RQ}$，即 $(x_0+1,y_0)=\frac{1}{3}(1-x_0,-y_0)$，

解得 $R\left(-\frac{1}{2},0\right)$.　（5 分）

②当直线 l 不为 x 轴时，设 l 的方程为 $x=ty-2$，

由 $a\neq-1$ 可知 $t\neq0$，　（6 分）

联立 $\begin{cases}x=ty-2\\x^2-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 x，得 $(3t^2-1)y^2-12ty+9=0$，

则 $3t^2-1\neq0$，且 $\Delta=144t^2-4\times(3t^2-1)\times9>0\Rightarrow t\in\mathbf{R}$，且 $t\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，$y_1+y_2=\frac{12t}{3t^2-1}$，$y_1\cdot y_2=\frac{9}{3t^2-1}$，

（8 分）

因为 $\begin{cases}\overrightarrow{F_1P}=a\overrightarrow{F_1Q},\\\overrightarrow{PR}=a\overrightarrow{RQ}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}y_1=ay_2,\\y_0-y_1=a(y_2-y_0)\end{cases}$

消去 a，得 $y_2(y_0-y_1)=y_1(y_2-y_0)$，

所以 $y_0=\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{18}{12t}=\frac{3}{2t}$，　（10 分）

从而 $x_0=ty_0-2=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$，

又 $R\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 也在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上，　（11 分）

综上，点 R 在定直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上.　（12 分）

22. 解：(1) 设函数 $\varphi(x)=f(x)-g(x)=\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-x$，

则 $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x}+x-1=\frac{x^2}{1+x}$，　（1 分）

当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)\geqslant0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，　（2 分）

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$，

从而 $f(x)-g(x)\geqslant0$，

所以当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$.　（3 分）

(2) 设函数 $k(x)=f(x)+1-h(x)=\ln(1+x)+1-\cos x$，

当 $x>0$ 时，$1-\cos x\geqslant0$，$\ln(1+x)>0$，

则 $k(x)>0$ 恒成立，　（4 分）

所以 $k(e^{\frac{a}{2}})>0$，$k(b^2)>0$，

即 $f(e^{\frac{a}{2}})+1>h(e^{\frac{a}{2}})$，$f(b^2)+1>h(b^2)$，（5 分）

又 $f(e^{\frac{a}{2}})+1=h(b)$，

所以 $h(b)>h(e^{\frac{a}{2}})$，　（6 分）

因为 $h(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$，

所以 $h'(x)=x-\sin x$，

令 $F(x)=x-\sin x$，则 $F'(x)=1-\cos x\geqslant0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

即 $F(x)>F(0)=0$，即 $h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $b>0$，$e^{\frac{a}{2}}>0$，所以由 $h(b)>h(e^{\frac{a}{2}})$ 得 $b>e^{\frac{a}{2}}$，

所以 $b^2>e^a$，　（8 分）

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

由 $f(b^2)+1>h(b^2)$ 得，

要证 $f(b^2)+1>h(a+1)$，

只需证 $h(b^2)>h(a+1)$，

因为 $a>0,b>0$，所以 $b^2>0,a+1>0$，

所以只要证：$b^2>a+1$， （10 分）

因为 $b^2>e^a$，所以只要证：$e^a>a+1$，

设函数 $m(x)=e^x-x-1(x>0)$，

则 $m'(x)=e^x-1>0$，

所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $a>0$，所以 $m(a)>m(0)=0$，所以 $e^a>a+1$， （11 分）

所以 $b^2>a+1$ 成立，

所以 $h(b^2)>h(a+1)$，

从而 $f(b^2)+1>h(a+1)$ 得证. （12 分）

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！