# 皖豫名校联盟 2024 届高中毕业班第一次考试

# 数学 · 答案

**一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.**

1. **答案** B

**命题意图** 本题考查集合的运算.

**解析** 由 $x^2-2x-8<0$ 可得 $-2<x<4$,故 $U=\{-1,0,1,2,3\}$,因为 $B=\{x\,|\,|x-1|=1\}=\{0,2\}$,所以 $A\cup B=\{0,1,2\}$,所以 $\complement_U(A\cup B)=\{-1,3\}$.

2. **答案** A

**命题意图** 本题考查充分条件与必要条件的判断.

**解析** 因为 $2^{a+1}>2^{b-2}$,所以 $a+1>b-2\Leftrightarrow a>b-3$,而 $a^3>b^3\Leftrightarrow a>b$,所以"$a^3>b^3$"是"$2^{a+1}>2^{b-2}$"的充分不必要条件.

3. **答案** D

**命题意图** 本题考查函数模型的应用.

**解析** 由题可知 $P_A+P_B=\lg n_A+\lg n_B=\lg(n_A\cdot n_B)=10$,则 $n_A\cdot n_B=10^{10}$,又 $n_A\cdot n_B^2=10^{12}$,所以 $n_B=10^2$,$n_A=10^8$.

4. **答案** C

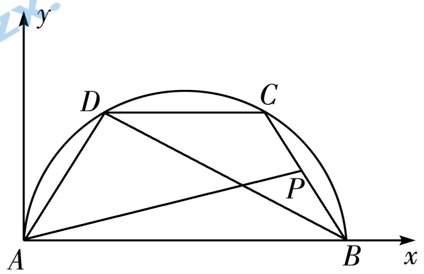
**命题意图** 本题考查函数的图象与性质.

**解析** 由题可知,$f(x)$的定义域为$\{x\,|\,x\neq0\}$,且$f(x)$为偶函数. 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时,$f(x)>0$,当$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$时,$f(x)<0$,当$\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}$时,$f(x)>0$,故选 C.

5. **答案** D

**命题意图** 本题考查平面向量的数量积的计算.

**解析** 由题意,$\angle BAD=60°$,建立平面直角坐标系如图,则 $A(0,0)$,$B(2,0)$,$C\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,所以 $P\left(\frac{7}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,所以$\overrightarrow{AP}=\left(\frac{7}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,又$\overrightarrow{BD}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD}=-\frac{9}{4}$.




6. **答案** C

**命题意图** 本题考查圆的切线方程的计算及基本不等式的应用.

**解析** 易知圆 $O:x^2+y^2=8$ 在点 $P(2,2)$ 处的切线的方程为 $x+y=4$,所以 $a+b=4,a>0,b>0$,所以 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\frac{1}{4}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=\frac{1}{4}\left(5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\right)\geqslant\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=\frac{9}{4}$,当且仅当 $a=\frac{4}{3},b=\frac{8}{3}$ 时,等号成立.

7. **答案** A

**命题意图** 本题考查二项式定理.

**解析** $\left(x^3+\frac{a}{x}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r(x^3)^{6-r}\cdot\left(\frac{a}{x}\right)^r=\mathrm{C}_6^r\cdot a^r\cdot x^{18-4r}$,由题可知 $\begin{cases}\mathrm{C}_6^r\cdot a^r>\mathrm{C}_6^{r-1}\cdot a^{r-1},\\ \mathrm{C}_6^r\cdot a^r>\mathrm{C}_6^{r+1}\cdot a^{r+1},\end{cases}$ 解得 $\frac{6a-1}{a+1}<r<\frac{7a}{a+1}$,故 $\begin{cases}3\leqslant\frac{6a-1}{a+1}<4,\\ 4<\frac{7a}{a+1}\leqslant5,\end{cases}$ 解得 $\frac{4}{3}<a<\frac{5}{2}$.

8. **答案** B

**命题意图** 本题考查导数在函数不等式问题中的应用.

**解析** 由 $f(-x+2)=-f(x)$ 可得 $f(-x+2)+f(x)=0$,故 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称. 由题可得 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $f(2-x-a)+f(\ln(x-1))\leqslant0$,所以 $f(\ln(x-1))\leqslant-f(2-x-a)=f(x+a)$,所以 $x+a\geqslant\ln(x-1)$,即 $a\geqslant\ln(x-1)-x,x>1$. 令 $h(x)=\ln(x-1)-x,x>1$,则 $h'(x)=\frac{1}{x-1}-1=\frac{2-x}{x-1}$. 当 $1<x<2$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,当 $x>2$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,所以 $a\geqslant h(x)_{\max}=h(2)=-2$.

**二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.**

9. **答案** ABD

**命题意图** 本题考查正态分布、线性回归及概率的计算.

**解析** 由 $P(X>9)=\frac{1}{2}$,可得 $\mu=9,\bar{x}=9$,所以 $P(7<X<9)=P(9<X<11)=P(X>9)-P(X>11)=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$,故 A 正确;因为 $1-\frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_9^2}=\frac{5}{6}$,故 B 正确;$\zeta$ 服从超几何分布,其中 $N=9,M=4,n=2$,所以 $E(\zeta)=\frac{nM}{N}=\frac{8}{9}$,故 C 错误;因为 $\bar{x}=9,\bar{y}=19$,所以 $19=9\hat{b}+1$,所以 $\hat{b}=2$,故 D 正确.

10. **答案** BD

**命题意图** 本题考查三角函数的图象与性质.

**解析** 设 $f(x)$ 的最小正周期为 $T$,由题意,$\frac{T}{4}=1-(-1)=2$,得 $T=8=\frac{2\pi}{\omega}$,所以 $\omega=\frac{\pi}{4}$,$f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}x+\varphi\right)$,又点 $(-1,0)$ 在 $f(x)$ 的图象上,所以 $2\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=0$,所以 $-\frac{\pi}{4}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $\varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$,即 $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$,故 A 错误;因为 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(8k-3,8k+1),k\in\mathbf{Z}$,当 $k=1$ 时,单调递增区间为 $(5,9)$,故 B 正确;因为 $g(x)=f(x+1)=2\cos\left[\frac{\pi}{4}(x+1)-\frac{\pi}{4}\right]=2\cos\frac{\pi}{4}x$,所以 $g(x)$ 为偶函数,故 C 错误;当 $x\in[-1,a]$ 时,$\frac{\pi}{4}x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi a}{4}\right]$,所以 $\frac{\pi a}{4}=\frac{3\pi}{4}$,解得 $a=3$,故 D 正确.

11. **答案**　ACD

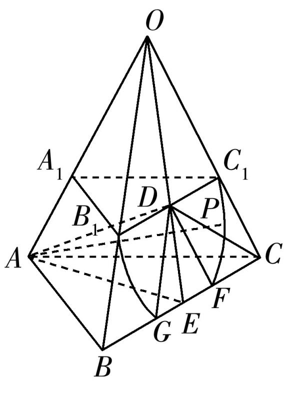
**命题意图**　本题考查新定义题型及函数的图象与性质.

**解析**　因为 $0\leqslant\langle x\rangle-x<1$，所以当 $\langle x\rangle-x=0$ 时，$f(\langle x\rangle-x)$ 的值为 0，当 $0<\langle x\rangle-x<1$ 时，$f(\langle x\rangle-x)$ 的值为 1，故 A 正确；因为当 $0<x\leqslant1$ 时，$f(x)=1$，故 B 错误；当 $0<x\leqslant1$ 时，$f(x)=1$，当 $-1<x\leqslant0$ 时，$f(x)=0$，故 $f(x)$ 与 $y=2x$ 的图象有两个交点 $(0,0)$ 和 $\left(\frac{1}{2},1\right)$，$f(x)$ 其余情况的图象与直线 $y=2x$ 无交点，故 C 正确；当 $n=1$ 时，$f(\sqrt{n})=1$，当 $2\leqslant n\leqslant4$ 时，$f(\sqrt{n})=2$，当 $5\leqslant n\leqslant9$ 时，$f(\sqrt{n})=3$，当 $10\leqslant n\leqslant16$ 时，$f(\sqrt{n})=4$，当 $17\leqslant n\leqslant20$ 时，$f(\sqrt{n})=5$，故 $\sum\limits_{n=1}^{20}f(\sqrt{n})=1+2\times3+3\times5+4\times7+5\times4=70$，故 D 正确.

12. **答案**　AD

**命题意图**　本题考查正棱台的性质及空间中的角与线段长度的计算.

**解析**　如图，延长正三棱台的侧棱，设其相交于点 $O$，连接 $DE,AE$，则有 $OA=OB=OC$，直线 $DE$ 必过点 $O$ 且 $DE\perp B_1C_1$，$DE\perp BC$，由题可得 $AB=6$，过点 $D$ 作 $DF/\!/C_1C$，$DG/\!/B_1B$，则四边形 $DFCC_1$ 和 $DGBB_1$ 均是边长为 2 的菱形，在 $\triangle OBC$ 中，$\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{OC_1}{OC}=\frac{OC_1}{OC_1+C_1C}$，即 $\frac{2}{3}=\frac{OC_1}{OC_1+2}$，解得 $OC_1=4$，所以 $OC=OC_1+C_1C=4+2=6$，所以 $\triangle OBC$ 是边长为 6 的等边三角形，所以 $\angle DFE=\angle FDC_1=\angle OCB=\frac{\pi}{3}$，$OE=3\sqrt{3}$，所以 $DE=DF\times\sin\frac{\pi}{3}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，因为 $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形且 $E$ 为 $BC$ 的中点，所以 $AE=3\sqrt{3}$，$BC\perp AE$，在 $\triangle OAE$ 中，由余弦定理可得，$\cos\angle OEA=\frac{OE^2+AE^2-OA^2}{2\times OE\times AE}=\frac{(3\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-6^2}{2\times3\sqrt{3}\times3\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$，在 $\triangle ADE$ 中，由余弦定理可得，$\cos\angle DEA=\frac{DE^2+AE^2-AD^2}{2\times DE\times AE}=\frac{(\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-AD^2}{2\times\sqrt{3}\times3\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$，解得 $AD=2\sqrt{6}$，所以 $AE^2=DE^2+AD^2$，所以 $AD\perp DE$，由 $BC\perp AE$，$BC\perp OE$，$AE\cap OE=E$，$AE,OE\subset$ 平面 $AOE$，可得 $BC\perp$ 平面 $AOE$，又 $AD\subset$ 平面 $AOE$，所以 $BC\perp AD$，由 $BC\perp AD$，$AD\perp DE$，$BC\cap DE=E$，$BC,DE\subset$ 平面 $BCC_1B_1$，可得 $AD\perp$ 平面 $BCC_1B_1$，故 A 正确；因为 $\sin\angle AED=\frac{AD}{AE}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以三棱台的高为 $h=DE\cdot\sin\angle AED=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，所以三棱台的体积 $V=\frac{1}{3}h(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A_1B_1C_1}+\sqrt{S_{\triangle ABC}S_{\triangle A_1B_1C_1}})=\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}(4\sqrt{3}+9\sqrt{3}+6\sqrt{3})=\frac{38\sqrt{2}}{3}$，故 B 错误；$AP$ 与平面 $BCC_1B_1$ 所成的角为 $\angle APD$，因为 $AP=\sqrt{AD^2+DP^2}=\sqrt{24+DP^2}=2\sqrt{7}$，所以 $DP=2$，所以 $\tan\angle APD=\frac{AD}{DP}=\sqrt{6}$，故 C 错误；因为点 $P$ 在平面 $BCC_1B_1$ 内的轨迹为以 $D$ 为圆心的圆被四边形 $BCC_1B_1$ 所截的弧 $\overset{\frown}{C_1F}$，$\overset{\frown}{B_1G}$，设 $\overset{\frown}{C_1F}$ 的长度为 $l$，则 $l=\frac{\pi}{3}\times2=\frac{2\pi}{3}$，所以动点 $P$ 形成的轨迹长度为 $\frac{4\pi}{3}$，故 D 正确.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 答案　9

命题意图　本题考查函数的最值与性质.

解析　$f(n)=1+\dfrac{8}{2\left(n-\dfrac{9}{2}\right)}$，当 $n=5$ 时，$f(n)$ 最大，为 9.

14. 答案　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

命题意图　本题考查复数的运算.

解析　由已知得 $z=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\dfrac{2(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，故 $z$ 的实部为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

15. 答案　$\left(0,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]\cup(1,+\infty)$

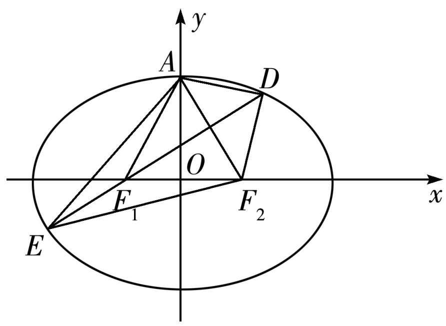
命题意图　本题考查函数的单调性.

解析　因为 $f(x)=\log_a(x+1)+\log_{(1+a)}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln(a+1)}\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即$\dfrac{\ln(a+1)}{\ln a}\geqslant-\dfrac{x+1}{x}$在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$-\dfrac{x+1}{x}=-1-\dfrac{1}{x}<-1$，故有$\dfrac{\ln(a+1)}{\ln a}\geqslant-1$，当 $a>1$ 时，$\dfrac{\ln(a+1)}{\ln a}\geqslant-1$ 显然成立，当 $0<a<1$ 时，可得 $\ln(a+1)\leqslant-\ln a$，即 $a^2+a-1\leqslant 0$，解得 $0<a\leqslant\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，故 $a$ 的取值范围是$\left(0,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]\cup(1,+\infty)$.

16. 答案　4

命题意图　本题考查椭圆的性质及直线与椭圆的位置关系.

解析　设椭圆 $C$ 的半焦距为 $c(c>0)$，$D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，则$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，椭圆 $C$：$\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$. 由题可知 $\triangle AF_1F_2$ 为等边三角形，因为过 $F_1$ 且垂直于 $AF_2$ 的直线与 $C$ 交于 $D,E$ 两点，所以 $k_{DE}=\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 由线段垂直平分线的性质可得 $|AD|=|DF_2|$，$|AE|=|EF_2|$. 直线 $DE$ 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$，与 $C$ 的方程联立化简可得 $13x^2+8cx-32c^2=0$，由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=-\dfrac{8c}{13}$，$x_1x_2=-\dfrac{32c^2}{13}$，所以 $|DE|=\sqrt{k^2+1}\,|x_1-x_2|=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\dfrac{1}{3}+1}\cdot\sqrt{\left(-\dfrac{8c}{13}\right)^2+\dfrac{128c^2}{13}}=\dfrac{48c}{13}$. 所以 $S_{\text{四边形}AEF_2D}=\dfrac{1}{2}|AF_2||DE|=\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{48c}{13}=\dfrac{48c^2}{13}=\dfrac{48}{13}$，解得 $c=1$，则 $a=2$. 故 $C$ 的长轴长为 $2a=4$.



四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查正弦定理与余弦定理的应用.

**解析** （Ⅰ）根据面积公式，可得 $S_1=\frac{1}{2}a^2\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$S_2=\frac{1}{2}b^2\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$，$S_3=\frac{1}{2}c^2\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$，

要证 $2S_1=S_2+S_3$，即证 $2a^2=b^2+c^2$. ……（2 分）

由 $\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{2\cos A}{a}$ 可得 $ac\cos B+ab\cos C=2bc\cos A$， ……（3 分）

由余弦定理可得 $ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=2bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

整理可得 $2a^2=b^2+c^2$，原式得证. ……（5 分）

（Ⅱ）因为 $a=2$，

所以 $c^2+b^2=8\geqslant 2bc$，当且仅当 $b=c$ 时，等号成立， ……（7 分）

故 $(b+c)^2=c^2+b^2+2bc\leqslant 2(c^2+b^2)=16$，

所以 $b+c\leqslant 4$，$b+c$ 的最大值为 4. ……（9 分）

故 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 6. ……（10 分）

18. **命题意图** 本题考查导数在函数单调性问题中的应用及导数的几何意义.

**解析** （Ⅰ）由题可知 $f'(x)=-3x^2-4x+3$，

令 $f'(x)=0$，可得 $x_1=\frac{-2-\sqrt{13}}{3}$，$x_2=\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$. ……（2 分）

当 $x>\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$ 时，$f'(x)<0$，当 $\frac{-2-\sqrt{13}}{3}<x<\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x<\frac{-2-\sqrt{13}}{3}$ 时，$f'(x)<0$，

……（4 分）

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{-2-\sqrt{13}}{3},\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)$，单调递减区间为 $\left(-\infty,\frac{-2-\sqrt{13}}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3},+\infty\right)$. ……（5 分）

（Ⅱ）设曲线 $y=f(x)$ 过坐标原点的切线为 $l$，切点为 $(x_0,-x_0^3-2x_0^2+3x_0+1)$，

则切线方程为 $y-(-x_0^3-2x_0^2+3x_0+1)=(-3x_0^2-4x_0+3)(x-x_0)$.

将原点坐标代入切线方程有 $2x_0^3+2x_0^2+1=0$. ……（7 分）

设 $g(x)=2x^3+2x^2+1$，则 $g'(x)=6x^2+4x$.

令 $g'(x)=0$，可得 $x=0$ 或 $-\frac{2}{3}$， ……（8 分）

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $-\frac{2}{3}<x<0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x<-\frac{2}{3}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $x=0$ 为极小值点，且 $g(0)=1$，$x=-\frac{2}{3}$ 为极大值点，且 $g\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{35}{27}>0$， ……（10 分）

又 $g(-2)=-7<0$，所以 $\exists t\in\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$，使得 $g(t)=0$，在其余区间上 $g(x)$ 没有零点，

故 $g(x)$ 只有一个零点，

即曲线 $y=f(x)$ 过坐标原点的切线只有一条. …………………………………………………………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查空间中面面垂直的证明及空间向量的应用.

**解析** （Ⅰ）因为 $G$ 是 $\overset{\frown}{CB}$ 的中点，所以 $OG\perp BC$. ……………………………………（1 分）

根据圆柱的结构特征，可知平面 $BCG\perp$ 平面 $ABCD$， ……………………………………（2 分）

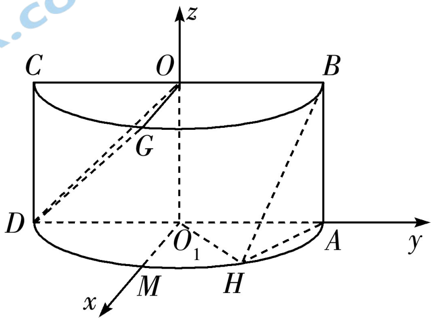
又 $OG\subset$ 平面 $BCG$，平面 $BCG\cap$ 平面 $ABCD=BC$，

所以 $OG\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………………………………………………（3 分）

又 $OG\subset$ 平面 $DOG$，故平面 $DOG\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………（4 分）

（Ⅱ）如图，设 $M$ 为 $\overset{\frown}{DA}$ 的中点，连接 $O_1M$，以 $O_1$ 为坐标原点，分别以 $O_1M$，$O_1A$，$O_1O$ 所在直线为 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴建立空间直角坐标系，则 $O(0,0,1)$，$B(0,1,1)$，$D(0,-1,0)$，$G(1,0,1)$，则 $\overrightarrow{OD}=(0,-1,-1)$，$\overrightarrow{OG}=(1,0,0)$.

……………………………………………………………………………………（6 分）




设平面 $DOG$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OG}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y-z=0,\\ x=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $z=-1$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,1,-1)$. ……………………（8 分）

连接 $O_1H$，$AH$，则 $AH=\sqrt{BH^2-AB^2}=1$，所以 $\triangle O_1AH$ 是等边三角形，故 $\angle AO_1H=\frac{\pi}{3}$，则 $H\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{BH}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$. ………………………………………………………（9 分）

设直线 $BH$ 与平面 $DOG$ 所成的角为 $\theta$，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BH},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{BH}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{BH}|\cdot|\boldsymbol{m}|}\right|=\frac{\left|-\frac{1}{2}+1\right|}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{4}$.

故直线 $BH$ 与平面 $DOG$ 所成角的正弦值为 $\frac{1}{4}$. ……………………………………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查等差数列与等比数列的性质及用错位相减法求前 $n$ 项和.

**解析** （Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$.

$\because 2S_3=3S_2+6$，

$\therefore 2\left[3\times(-1)+\frac{3\times2}{2}\times d\right]=3[(-1)+(-1)+d]+6$，解得 $d=2$. ……………………（2 分）

$\therefore a_n=-1+2(n-1)=2n-3$. ………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）当 $n$ 为奇数时，$b_n=a_n=2n-3$，当 $n$ 为偶数时，$b_n=n\cdot2^n$. ……………………（5 分）

$\therefore T_{2n}=(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})$

$=(-1+3+\cdots+4n-5)+(2\times4+4\times4^2+6\times4^3+\cdots+2n\times4^n)$

$=\dfrac{(-1+4n-5)n}{2}+(2\times4+4\times4^2+6\times4^3+\cdots+2n\times4^n)$

$=2n^2-3n+(2\times4+4\times4^2+6\times4^3+\cdots+2n\times4^n)$. ……………………………………（7 分）

设 $A_n=2\times4+4\times4^2+6\times4^3+\cdots+2n\times4^n$,①

则 $4A_n=2\times4^2+4\times4^3+6\times4^4+\cdots+2n\times4^{n+1}$,② ……………………………………（9 分）

①－②,得 $-3A_n=2(4+4^2+4^3+4^4+\cdots+4^n)-2n\times4^{n+1}$

$=\dfrac{2\times4(1-4^n)}{1-4}-2n\times4^{n+1}$

$=\dfrac{(2-6n)\times4^{n+1}-8}{3}$,

$\therefore A_n=\dfrac{(6n-2)\times4^{n+1}+8}{9}$. ……………………………………（11 分）

故 $T_{2n}=2n^2-3n+\dfrac{(6n-2)\times4^{n+1}+8}{9}$. ……………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查双曲线的方程与性质及直线与双曲线的位置关系.

**解析** （Ⅰ）根据题意得$\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1$,即 $4b^2-a^2=b^2a^2>0$,①

渐近线方程为 $bx\pm ay=0$, ……………………………………（1 分）

所以 $P(2,1)$ 到 $C$ 的两条渐近线的距离之积为$\dfrac{|2b-a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\dfrac{|2b+a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|4b^2-a^2|}{a^2+b^2}=\dfrac{4b^2-a^2}{a^2+b^2}=\dfrac{2}{3}$,得 $a^2=2b^2$,

……………………………………（3 分）

结合①,解得 $a^2=2,b^2=1$,

故 $C$ 的标准方程为$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$. ……………………………………（4 分）

（Ⅱ）由题意,$\triangle APB$ 的内心恒在直线 $x=2$ 上,$P(2,1)$ 在直线 $x=2$ 上,

所以直线 $PA$ 和 $PB$ 关于直线 $x=2$ 对称,则 $k_{PA}+k_{PB}=0$. ……………………………………（5 分）

显然直线 $l$ 的斜率存在,设 $l:y=kx+m,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

联立双曲线方程消去 $y$ 并化简可得$(2k^2-1)x^2+4kmx+2m^2+2=0$,

故 $\Delta=16k^2m^2-4(2k^2-1)(2m^2+2)>0$,整理得 $m^2>2k^2-1$.

$x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2-1},x_1x_2=\dfrac{2m^2+2}{2k^2-1}$. ……………………………………（6 分）

$k_{PA}+k_{PB}=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=\dfrac{kx_1+m-1}{x_1-2}+\dfrac{kx_2+m-1}{x_2-2}=0$,

化简得 $2kx_1x_2+(m-1-2k)(x_1+x_2)-4(m-1)=0$, ……………………………………（7 分）

故$\dfrac{2k(2m^2+2)}{2k^2-1}+(m-1-2k)\left(-\dfrac{4km}{2k^2-1}\right)-4(m-1)=0$,

即$(k+1)(m+2k-1)=0$.

而直线 $l$ 不过 $P$ 点,故 $k=-1$.

故 $l:y=-x+m$. ……………………………………（9 分）

作图可知，$l$ 与 $C$ 的右支相交于两点，且 $l$ 在点 $P$ 的下方，故 $\begin{cases} m^2 > 2k^2 - 1 = 1, \\ m > 0, \\ 1 > -2 + m, \end{cases}$ 得 $1 < m < 3$.

即 $l$ 在 $y$ 轴上的截距的取值范围是 $(1,3)$. ………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查导数的综合应用.

**解析** （Ⅰ）由题可知 $F(x) = f(x) - 1 - ag(x) = xe^x - a(\ln x + x) = xe^x - a\ln(xe^x)(x>0)$. …………（1 分）

令 $t = xe^x(x>0)$，则 $t' = (x+1)e^x > 0$ 在 $x>0$ 时恒成立，

所以 $t = xe^x$ 在 $x>0$ 时单调递增，且 $t \in (0, +\infty)$，

所以 $F(x) = xe^x - a\ln(xe^x)$ 的零点个数，等价于 $h(t) = t - a\ln t$ 的零点个数. ……………………（2 分）

$h'(t) = 1 - \frac{a}{t} = \frac{t-a}{t}$，

令 $h'(t) > 0$，得 $t > a$，此时 $h(t)$ 单调递增，令 $h'(t) < 0$，得 $0 < t < a$，此时 $h(t)$ 单调递减，

所以 $h(t)_{\min} = h(a) = a - a\ln a$. ……………………………………………………（3 分）

令 $h(a) > 0$，得 $0 < a < e$，此时 $h(t) > 0$ 恒成立，没有零点；…………………………………（4 分）

令 $h(a) = 0$，得 $a = e$，此时 $h(t)$ 有一个零点；……………………………………………（5 分）

令 $h(a) < 0$，得 $a > e$，又 $h(1) = 1 > 0$，$h(e) = e - a < 0$，当 $t \to +\infty$ 时，$h(t) \to +\infty$，

所以 $h(t)$ 在 $(1, e)$，$(e, +\infty)$ 上各存在一个零点.

综上，当 $0 < a < e$ 时，$F(x)$ 的零点个数为 0；当 $a = e$ 时，$F(x)$ 的零点个数为 1；当 $a > e$ 时，$F(x)$ 的零点个数为 2.
……………………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）由题可知 $f(x)[g(x) - 1] + 3 = (xe^x + 1)(\ln x + x) - xe^x + 2 = (e^{\ln x + x} + 1)(\ln x + x) - e^{\ln x + x} + 2$，
……………………………………………………………………………………（7 分）

令 $s = \ln x + x$，$x \geqslant \frac{1}{e^2}$，易知 $s = \ln x + x$ 在 $\left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$ 上单调递增，则 $s \geqslant -2 + \frac{1}{e^2}$，

令 $G(s) = (e^s + 1)s - e^s + 2$，则 $G'(s) = se^s + 1$. …………………………………………（8 分）

记 $m(s) = se^s + 1$，则 $m'(s) = (s+1)e^s$，

当 $s < -1$ 时，$m'(s) < 0$，当 $s > -1$ 时，$m'(s) > 0$，

所以 $m(s)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减，在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增，……………………………（10 分）

所以 $m(s) \geqslant m(-1) = -e^{-1} + 1 > 0$，即 $G'(s) > 0$，

所以 $G(s)$ 单调递增，则 $G\left(-2 + \frac{1}{e^2}\right) > G(-2)$. ……………………………………………（11 分）

又 $G(-2) = -\frac{3}{e^2}$，

故 $f(x)[g(x) - 1] + 3 > -\frac{3}{e^2}$. ………………………………………………………（12 分）