北京市朝阳区2018～2019学年度第一学期高三年级期中统一检测

数学试卷(理工类)

2018.11

(考试时间120分钟　　满分150分)

本试卷分为选择题(共40分)和非选择题(共110分)两部分

考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效．考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分(选择题　共40分)

一、选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分．在每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|x(x-2)\leqslant 0\}$, $B=\{x|0<x\leqslant 1\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$　　B. $\{x|0<x\leqslant 1\}$　　C. $\{x|0<x\leqslant 2\}$　　D. $\varnothing$

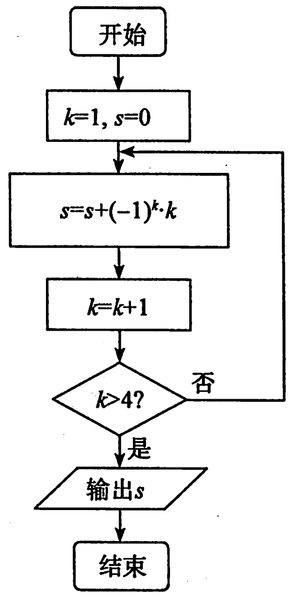
2. 执行如图所示的程序框图,输出 s 的值为

A. -10

B. -2

C. 2

D. 10



(第2题图)

3. 设平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,2)$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,则实数 k 的值等于

A. $-\dfrac{2}{3}$　　B. $-\dfrac{3}{2}$

C. 0　　D. $\dfrac{3}{2}$

4. 已知 $x>y>0$,则下列不等关系中正确的是

A. $\cos x>\cos y$　　B. $\log_3 x<\log_3 y$　　C. $x^{\frac{1}{2}}<y^{\frac{1}{2}}$　　D. $(\dfrac{1}{3})^x<(\dfrac{1}{3})^y$

5. “$\alpha=\frac{\pi}{6}$”是“$\sin\alpha=\frac{1}{2}$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知函数 $f(x)=|2^x-2|$. 若 $f(a)=f(b)(a\neq b)$,则 $a+b$ 的取值范围是

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,2)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x<0,\\ f(x-2), x\geqslant 0.\end{cases}$ 当 $\frac{1}{2}\leqslant m<\frac{3}{4}$ 时,方程 $f(x)=-\frac{1}{8}x+m$ 的根的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 将正奇数数列 1,3,5,7,9,…依次按两项、三项分组,得到分组序列如下:(1,3),(5,7,9),(11,13),(15,17,19),…,称(1,3)为第 1 组,(5,7,9)为第 2 组,依此类推,则原数列中的 2019 位于分组序列中

A. 第 404 组　　B. 第 405 组　　C. 第 808 组　　D. 第 809 组

第二部分(非选择题　共 110 分)

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

9. 已知 $\alpha\in(-\frac{\pi}{2},0)$,$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$,则 $\cos\alpha=$________;$\tan(\pi+\alpha)=$________.

10. 已知 x,y 满足 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y-2\leqslant 0,\\ y+2\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为________.

11. 已知函数 $y=f(x)$ 满足下列条件:

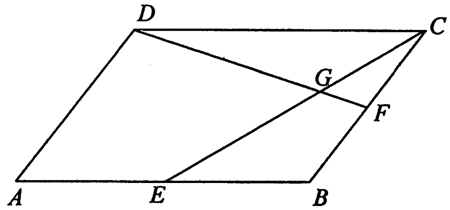
①定义域为 $\mathbf{R}$;

②函数 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增;

③函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 有且只有一个零点,

写出函数 $f(x)$ 的一个表达式________.

12. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E,F 分别为边 AB,BC 的中点，连接 CE,DF，交于点 G. 若 $\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则 $\dfrac{\lambda}{\mu}=$________.



（第 12 题图）

13. 海水受日月的引力，在一定的时候发生的涨落现象叫潮．港口的水深会随潮的变化而变化．某港口水的深度 y（单位：米）是时刻 $t(0\leqslant t\leqslant 24$，单位：小时）的函数，记作 $y=f(t)$. 下面是该港口某日水深的数据：

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	8.0	11.0	7.9	5.0	8.0	11.0	8.0	5.0	8.0

经长期观察，曲线 $y=f(t)$ 可以近似地看成函数 $y=A\sin\omega t+b(A>0,\omega>0)$ 的图象．根据以上数据，函数 $y=f(t)$ 的近似表达式为________.

14. 从标有数字 $a,b,c,d(a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$，且 $a,b,c,d\in\{1,2,3,\cdots,9\})$ 的四个小球中任选两个不同的小球，将其上的数字相加，可得 4 种不同的结果；将其上的数字相乘，可得 3 种不同的结果. 那么这 4 个小球上的不同的数字恰好有________个；试写出满足条件的所有组 a,b,c,d ________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15. （本小题满分 13 分）

设 $\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 是各项均为正数的等比数列，且 $a_2=3,a_4-a_3=18$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若 $b_n=a_n+\log_3 a_n$，求 $b_1+b_2+\cdots+b_n$.

16. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x-\cos^2 x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间；

（Ⅱ）若对任意 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$f(x)\leqslant m$（m 为实数）恒成立，求 m 的最小值.

17.（本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$A=\frac{\pi}{3}$，$\tan B=-4\sqrt{3}$，$b=8$.

（Ⅰ）求 a；

（Ⅱ）求 $\triangle ABC$ 的面积.

18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2mx^3-3x^2+1(m\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $m=1$ 时，求 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值和最小值；

（Ⅱ）求证："$m>1$"是"函数 $f(x)$ 有唯一零点"的充分而不必要条件.

19.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=(x^2-ax)\ln x-\frac{1}{2}x^2+ax(a>0)$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）试判断函数 $f(x)$ 的单调性并证明；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，记函数 $f(x)$ 的极小值为 $g(a)$，试求 $g(a)$ 的最大值.

20.（本小题满分 14 分）

设 m,n 为正整数，一个正整数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $m=a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 1$. 对 $i=1,2,\cdots,m$，定义集合 $B_i=\{j\in\{1,2,\cdots,n\}\mid a_j\geqslant i\}$. 数列 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 中的 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是集合 B_i 中元素的个数.

（Ⅰ）若数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 5,3,3,2,1,1，写出数列 $b_1,b_2,\cdots,b_m$；

（Ⅱ）若 $n=2^m$，$m\geqslant 3$，$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 为公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，求 $a_1+a_2+\cdots+a_n$；

（Ⅲ）对 $j=1,2,\cdots,n$，定义集合 $C_j=\{i\in\{1,2,\cdots,m\}\mid b_i\geqslant j\}$，令 c_j 是集合 C_j 中元素的个数. 求证：对 $j=1,2,\cdots,n$，均有 $a_j=c_j$.

北京市朝阳区 2018-2019 学年度第一学期高三年级期中统一检测

数学试卷（理工类）答案　　2018.11

一、选择题：

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）
答案	B	C	A	D	A	B	C	A

二、填空题：

题号	（9）		（10）	（11）	（12）	（13）	（14）	
答案	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{4}$	3	$y=x^2$ (或 $y=x^3$ 等)	$\frac{1}{2}$	$y=3\sin\frac{\pi}{6}t+8$	3	$1,2,2,4$； $1,3,3,9$； $2,4,4,8$； $4,6,6,9$．

三、解答题：

（15）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 $q(q>0)$，则依题意

$$\begin{cases} a_1q=3, \\ a_1q^3-a_1q^2=18, \end{cases}$$ 解得 $a_1=1, q=3$．

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$． ……………………… 7 分

（Ⅱ）因为 $b_n=a_n+\log_3 a_n=3^{n-1}+(n-1)$，

所以 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})+[0+1+2+\cdots+(n-1)]$

$$=\frac{1-3^n}{1-3}+\frac{n(n-1)}{2}$$

$$=\frac{3^n-1}{2}+\frac{n(n-1)}{2}.$$ ………………13 分

（16）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由已知可得 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$

$$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x)$$

$$=2\sin(2x-\frac{\pi}{6}).$$

所以最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以$-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le 2x\le\frac{2}{3}\pi+2k\pi$，

所以$-\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\pi$，即单调递增区间为$[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi],k\in\mathbf{Z}$.

……………………8 分

（Ⅱ）因为$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

所以$2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$，

则$\sin(2x-\frac{\pi}{6})\in[-\frac{1}{2},1]$，

所以$f(x)\in[-1,2]$，

当$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{3}$时，$f(x)_{\max}=2$.

因为$f(x)\le m$恒成立，所以$m\ge 2$，所以m的最小值为2.　……………13 分

（17）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为$\tan B=-4\sqrt{3}$，即$\frac{\sin B}{\cos B}=-4\sqrt{3}$，

又$\sin^2 B+\cos^2 B=1$，B为钝角，所以$\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$，解得$a=7$.　………………7 分

（Ⅱ）在△ABC中，由$\tan B<0$知B为钝角，所以$\cos B=-\frac{1}{7}$.

又因为$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以 $\sin C=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 7\times 8\times\dfrac{3\sqrt{3}}{14}=6\sqrt{3}$.　　……………………13 分

（18）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=6mx^2-6x=6x(mx-1)$，

当 $m=1$ 时，$f'(x)=6x(x-1)$，

当 x 在 $[-1,2]$ 内变化时，$f'(x),f(x)$ 的变化如下表：

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	极大值 1	↘	极小值 0	↗	5

当 $x\in[-1,2]$ 时，$f(x)_{\max}=5$；$f(x)_{\min}=-4$.　　……………………5 分

（Ⅱ）若 $m>1$，$f'(x)=6mx(x-\dfrac{1}{m})$.

当 x 变化时，$f'(x),f(x)$ 的变化如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{1}{m})$	$\frac{1}{m}$	$(\frac{1}{m},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$f(\dfrac{1}{m})=2m\cdot\dfrac{1}{m^3}-3\cdot\dfrac{1}{m^2}+1=-\dfrac{1}{m^2}+1$，因为 $m>1$, 所以 $0<\dfrac{1}{m^2}<1$.即 $f(\dfrac{1}{m})>0$.

且 $f(-m)=m^2(-2m^2-3)+1<0$，所以 $f(x)$ 有唯一零点.

所以“$m>1$”是“$f(x)$有唯一零点”的充分条件.

又$m=-2$时，当x变化时，$f'(x),f(x)$的变化如下表：

x	$(-\infty,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

又$f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+1>0$，$f(0)>0$，$f(3)<0$.

所以此时$f(x)$也有唯一零点.

从而“$m>1$”是“$f(x)$有唯一零点”的充分不必要条件. ……………………13 分

（19）（本小题满分 14 分）

解：函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

且$f'(x)=(2x-a)\ln x+(x^2-ax)\frac{1}{x}-x+a=(2x-a)\ln x$.

（Ⅰ）易知$f(1)=a-\frac{1}{2}$，$f'(1)=0$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-(a-\frac{1}{2})=0(x-1)$.

即$y=a-\frac{1}{2}$. ………………3 分

（Ⅱ）令$f'(x)=(2x-a)\ln x=0$得$x=1,x=\frac{a}{2}$

①当$0<a<2$时，$\frac{a}{2}<1$.

当x变化时，$f'(x),f(x)$变化情况如下表：

x	$(0,\frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{a}{2})$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{a}{2},1)$ 上单调递减.

②当 $a=2$ 时， $f'(x)=2(x-1)\ln x\geq 0$ 恒成立.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

③当 $a>2$ 时， $\frac{a}{2}>1$.

当 x 变化时， $f'(x),f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,\frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(\frac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,\frac{a}{2})$ 上单调递减. ....9 分

（III）由（II）可知，要使 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，需满足 $a>2$.

此时，函数 $f(x)$ 的极小值为 $g(a)=f(\frac{a}{2})=-\frac{a^2}{4}\ln\frac{a}{2}+\frac{3}{8}a^2$.

所以 $g'(a)=-\frac{1}{2}a(\ln\frac{a}{2}-1)$.

令 $g'(a)=-\frac{1}{2}a(\ln\frac{a}{2}-1)=0$ 得 $a=2\mathrm{e}$.

当 a 变化时，$g'(a),g(a)$ 变化情况如下表：

a	$(2,2\mathrm{e})$	$2\mathrm{e}$	$(2\mathrm{e},+\infty)$
$g'(a)$	+	0	−
$g(a)$	↗	极大值	↘

所以函数 $g(a)$ 的最大值为 $g(2\mathrm{e})=\frac{\mathrm{e}^2}{2}$. ....14 分

（20）（本小题满分 14 分）

(Ⅰ)解：数列 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 是 6,4,3,1,1. ....3 分

(Ⅱ) 由题知 $b_1=n=2^m$，由于数列 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 是一共 m 项的等比数列,

因此数列 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 为 $2^m,2^{m-1},\cdots,2$.

下面证明 $a_1+a_2\cdots+a_n=b_1+b_2\cdots+b_m$.

假设数列 $\{a_n\}$ 中有 d_m 个 m，d_{m-1} 个 $m-1$，…，d_2 个 2，d_1 个 1，显然 $d_i\ge 0$.

所以 $\sum_{i=1}^{n}a_i=md_m+(m-1)d_{m-1}+\cdots+2d_2+d_1$.

由题意可得 $b_1=d_m+\cdots+d_3+d_2+d_1,b_2=d_m+\cdots+d_3+d_2$，

$b_3=d_m+\cdots+d_3,\cdots,\ b_k=d_m+\cdots+d_k,\cdots,b_m=d_m$.

所以 $\sum_{j=1}^{m}b_j=md_m+(m-1)d_{m-1}+\cdots+2d_2+d_1$.

故 $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{m}b_j$.

即 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2^m+2^{m-1}+\cdots+2=\dfrac{2^m(1-(\frac{1}{2})^m)}{1-\frac{1}{2}}=2^{m+1}-2$. ....8 分

(III)对 $i=1,2,...,m$, b_i 表示数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中大于等于 i 的个数.

由已知得 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 一共有 n 项，每一项都大于等于 1，故 $b_1=n$; 由于 $a_1=m\geq m$,

故 $b_m\geq 1$.

由于 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 1$，故当 $i=1,2,\cdots,m-1$ 时，$b_i\geq b_{i+1}$.即

$n=b_1\geq b_2\geq b_3\geq\cdots\geq b_m\geq 1$.

接下来证明对 $j=1,2,\cdots,n$, $a_j=c_j$.

设 $a_j=i$, 则 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_j\geq i$, 即 $1,2,\cdots,j\in B_i$, 从而 $b_i\geq j$. 故

$$b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_i\geq j,$$

从而 $1,2,\cdots,i\in C_j$, 故 $c_j\geq i$, 而 $i=a_j$, 故有 $c_j\geq a_j$.

设 $c_j=k$, 即 $C_j=\{1,2,\cdots,k\}$, 根据集合 C_j 的定义, 有

$$b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_k\geq j.$$

由 $b_k\geq j$ 知，$1,2,\cdots,j\in B_k$，由 B_k 的定义可得

$$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_j\geq k,$$

而由 $k=c_j$, 故 $a_j\geq c_j$.

因此，对 $j=1,2,\cdots,n$，$a_j=c_j$. ....14 分

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao