北京市第一六六中学 2022-2023 学年度第一学期 10 月阶段测试

高三年级　数学学科　（考试时长：120 分钟）

班级：________　姓名：________

考查目标
知识：集合；不等式；函数与导数；三角函数与解三角形；数列；平面向量与复数；平面解析几何；立体几何；排列组合与二项式定理；概率统计 能力：数学抽象概括；逻辑推理论证；数学建模应用；直观想象；数学运算；数据分析；空间想象能力

一、单选题（共 10 题，每题 4 分）

1. 已知集合 $A=\left\{x\in Z\middle|x^2+3x\le 4\right\}$，$B=\left\{x\middle|x>-2\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{-2,-1,0,1\}$

2. 已知复数 z 满足 $z+4=\dfrac{3+i}{1+i}$，则在复平面中复数 z 对应的点的坐标是

A. $(2,1)$　　B. $(-2,-1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(-1,-2)$

3. 已知点 $P\left(1,2\sqrt{2}\right)$ 是角 α 终边上一点，则 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$ 等于

A. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $-\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

4. 已知 $\overrightarrow{AB}=(1,3)$，$\overrightarrow{AC}=(4,m)$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$，则 $\left|\overrightarrow{BC}\right|=$

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 5

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_2+S_9=60-a_{13}$，则 $a_7=$

A. 11　　B10　　C. 9　　D. 8

6. 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，设非零向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$．点 M 不与 A,B 两点重合，点 M 关于点 A 的对称点是 S（不与 B 点重合），点 S 关于点 B 的对称点为 N，则向量 $\overrightarrow{MN}$ 用 $\vec{a},\vec{b}$ 表示为

A. $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$　　B. $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$　　C. $(\vec{a}-\vec{b})$　　D. $2(\vec{b}-\vec{a})$

7. 已知单位向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 θ，则"$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|$"是"$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(1+x)=f(1-x)$，且当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$（其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数）．设 $a=f(\log_5 2)$，$b=f(\log_5 3)$，$c=f(2^{1.5})$，则 a,b,c 的大小关系是

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$　　C. $a<c<b$　　D. $b<a<c$

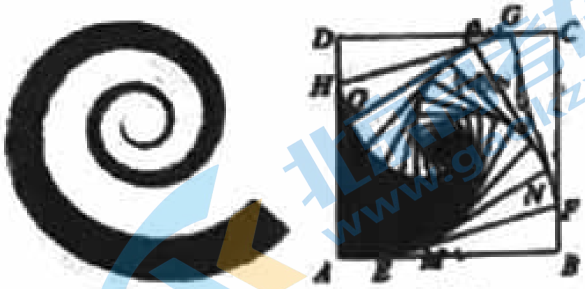
9. 我国于 2021 年 5 月成功研制出量子计算原型机"祖冲之号"，操控的超导量子比特达到 62 个（超导量子比特是一种超导电路，是量子计算机计算能力的标志之一）．已知 1 个超导量子比特共有"0，1"2 种叠加态，2 个超导量子比特共有"00，01，10，11"4 种叠加态，3 个超导量子比特共有"000，001，010，011，100，101，110，111"8 种叠加态，…，每增加 1 个超导量子比特，叠加态的数量会翻倍．设 62 个超导量子比特共有 N 种叠加态，要想使 $\dfrac{3^{81}}{N}<10^{t}$ 成立，整数 t 的最小值为

（参考数据：$\lg 2\approx 0.3010$，$\lg 3\approx 0.4771$）

A. 18　　B. 19　　D. 21

10. 数学中的螺旋线一词来源于希腊文，它的原意是"旋卷"或"缠卷"，平面螺旋线是从一个固定点开始向外逐圈旋绕而形成的曲线，如图（1）所示．如图（2）所示阴影部分也是一个美丽的螺旋线型的图案，它的画法是这样的：正方形 $ABCD$ 的边长为 4，取正方形 $ABCD$ 各边的四等分点 E,F,G,H，作第 2 个正方形 $EFGH$，然后再取正方形 $EFGH$ 各边的四等分点 M,N,P,Q，作第 3 个正方形 $MNPQ$，依此方法一直继续下去，就可以得到阴

影部分的图案．设正方形 $ABCD$ 边长为 a_1，后续各正方形边长依次为 $a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n,\cdots$；如图（2）阴影部分，设直角三角形 AEH 的面积为 b_1，后续各直角三角形面积依次为 $b_2,b_3,b_4,\cdots,b_n,\cdots$．下列说法错误的是



图(1)　　图(2)

A．$a_n=a_1\times\left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}$；

B．从正方形 $ABCD$ 开始，连续3个正方形的面积之和为 $\dfrac{129}{4}$；

C．数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n<4$；

D．使得不等式 $b_n>\dfrac{1}{2}$ 成立的 n 的最大值为4．

二、填空题（共5题，每题5分）

11．若 $(ax+1)^4$ 的展开式中 x 的系数为 -32，则 $a=$____．

12．$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$a=4\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{3}$，$A=\dfrac{\pi}{4}$，则角 $B=$___，$\triangle ABC$ 是___三角形（此空填"锐角"、"直角"或"钝角"）．

13．"燕山雪花大如席"，北京冬奥会开幕式将传统诗歌文化和现代奥林匹克运动联系在一起，让人们再次领略了我国的传统文化恒久不息的魅力．如图，顺次连接左图中雪花各顶点可近似得到正六边 $ABCDEF$．若正六边形的边长为1，点 P 是其内部一点（包含边界），则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{FB}$ 的最大值为____，最小值为____．

14．现有如下要求：

①$\forall n\in N^*$，$|a_{n+1}|<|a_n|$；

②$\forall n\in N^*$，$a_{n+1}=ta_n$（t 为常数）；

③$\exists M>0$，使得 $\forall n\in N^*$，都有 $|S_n|<M$．

请写出满足上述三个要求的一个数列的通项公式 $a_n=$______．

15. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x}, & x\ge 1,\\ ax, & x<1,\end{cases}$ $(a\in R)$ 是单调函数

① a 的取值范围是______；

② 又知 $f(x)$ 的值域是 R，且方程 $f(x)=\ln(x+m)$ 无实根，则实数 m 的取值范围是______.

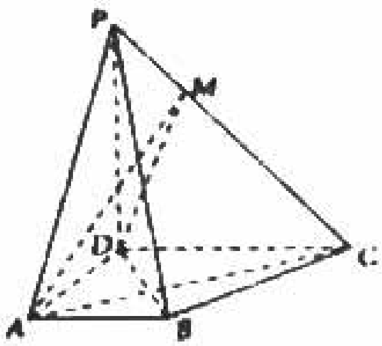
三、解答题（共6题，满分85分）

16.（本小题14分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\,//\,CD$，$\angle ADC=\dfrac{\pi}{2}$，点 M 在棱 PC 上.

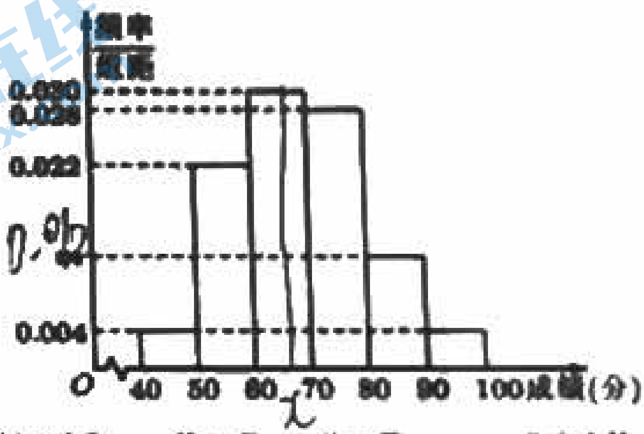
（1）证明：平面 $ADM\perp$ 平面 PDC；

（2）若 $AB=2$，$AD=CD=PD=4$，求平面 PAB 与平面 PAC 夹角的余弦值.



17.（本小题13分）

2021年7月18日第30届全国中学生生物学竞赛在浙江省萧山中学隆重举行。竞赛吸引了来自全国29个省、直辖市、自治区30个代表队共400余名生物竞赛省队选手参与。考试评价工作组将本次比赛的学生成绩转化为百分制后，随机抽取50名学生的成绩作为样本，经统计，这50名学生的成绩全部介于40至100之间，将50名学生的成绩按照 $[40,50)$，$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$ 分成6组，制成频率分布直方图如下图所示.



（1）求频率分布直方图中 m 的值，并估计这 50 名学生成绩的中位数；

（2）将样本中在 $[80,90)$ 或 $[90,100]$ 的成绩平均分为甲、乙两组，设随机变量 X 为甲组中在 $[90,100]$ 的成绩的个数，求 X 的分布列和数学期望；

（3）转化为百分制后，规定成绩在 $[90,100]$ 的为 A 等级，成绩在 $[70,90)$ 的为 B 等级，其余成绩为 C 等级. 以样本估计总体，用频率估计概率，从所有参加生物学竞赛的同学中随机抽取 20 人，用随机变量 Y 表示这 20 人中获得 B 等级的人数，请直接写出 $E(Y)$ 的值.

（无需计算及说理过程）

18.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x+\cos 2\omega x,(\omega>0)$ 满足________.

（1）求 ω 的值，直接写出曲线 $y=f(x)$ 与 y 轴距离最近的对称轴的方程；

（2）$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 若 $(3a-c)\cos B=b\cos C$，$b=2f(0)$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

现有下列三个条件：

① 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π；

② 曲线 $y=f(x)$ 可以由曲线 $y=\sin x-\cos x$ 仅通过平移得到；

③ 曲线 $y=f(x)$ 的两条相邻的对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$.

从中选择一个条件补充在题干中的横线处，使问题有解，并作出正确解答.

（如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分）

19. （本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，长轴等于 4，四个顶点围成的四边形的面积为 4

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B(0,b)$，点 P 为椭圆上一动点，直线 A_1B 与直线 A_2P 相交于点 M，直线 BP 与 x 轴相交于点 N，记直线 A_2P 的斜率为 k_1，直线 MN 的斜率为 $2k_1$

求证：$2k_2-k_1$ 为定值.

20.（本小题 15 分）

设函数 $f(x)=e^{2x}$，$g(x)=m(2x+1)(m\neq 0)$，$h(x)=f(x)-g(x)$（e 为自然对数的底数）

（1）若 $m=e$，求函数 $h(x)$ 的最小值；

（2）若 $h(x)\geqslant 1-m$ 恒成立，求实数 m 的值；

（3）若直线 $y=g(x)$ 是曲线 $f(x)=e^{2x}$ 的一条切线.

$\forall x_0\in[0,n](n>0)$，设 $K=0$，$L=h(x_0)$，$P=(2e^{2n}-2)x_0$，试比较 K，L，P 三个值的大小关系.（直接写出答案即可）

21.（本小题 15 分）

已知项数为 $k(k\in N^*,k\geq 3)$ 的数列 $\{a_n\}$ 满足 $0\leq a_1<a_2<\cdots<a_k$，若对任意的 i,j $(1\leq i\leq j\leq k)$，a_j+a_i 与 a_j-a_i 至少有一个是数列 $\{a_n\}$ 中的项，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P.

（1）判断数列 0，2，4，8 是否具有性质 P，并说明理由；

（2）设数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P，$a_{2022}=22$，求 $a_1+a_2+\cdots+a_{2022}$；

（3）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P，且不是等差数列，求 k.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。