2021年全国高中数学联赛新疆赛区初赛试卷参考答案

一、填空题（每题8分，共64分）

1. 若实数集合$\{3,6,9,x\}$的最大元素与最小元素之积等于该集合的所有元素之和，则x的值为________.

答案：$\frac{9}{4}$

解析：

若x是最大元素，则$3x=18+x$，解得$x=9$，不合题意；

若x是最小元素，则$9x=18+x$，解得$x=\frac{9}{4}$；

若x既不是最大元素也不是最小元素，则$27=18+x$，解得$x=9$，不合题意；

所以$x=\frac{9}{4}$.

2. $\sin^2 100^\circ-\sin 50^\circ\sin 70^\circ=$________

答案：$\frac{1}{4}$

解析：

方法一：原式$=\cos^2 10^\circ-\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 20^\circ+\frac{1}{2}(\cos 120^\circ-\cos 20^\circ)=\frac{1}{4}$；

方法二：原式$=\cos^2 10^\circ-\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 20^\circ-\sin 50^\circ\sin 70^\circ$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(70^\circ-50^\circ)-\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos 50^\circ\cos 70^\circ+\sin 50^\circ\sin 70^\circ)-\sin 50^\circ\sin 70^\circ$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos 50^\circ\cos 70^\circ-\sin 50^\circ\sin 70^\circ)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 120^\circ=\frac{1}{4}$$

3.将正整数中所有数码不超过5的数从小到大排成一列，则第2021个数是________.

答案:13205

解析：

方法一：所有数码不超过5的一位正整数有5个，两位正整数有5×6=30个，三位正整数有5×6^2=180个，四位正整数有5×6^3=1080个，共有1295个；

万位数为1，千位为0，共216个；

万位数为1，千位为1，共216个；

万位数为1，千位为2，共216个；共1943个，

万位数为1，千位为3，百位是0，1各36个，共72个，一共1943+72=2015个，还差6个，百位是2，个位取0,1,2,3,4,5，所以第2021个数是13205.

方法二：数码不超过5的数可以与一个六进制数建立一一对应关系，$2021=1\times 6^4+3\times 6^3+2\times 6^2+0\times 6+5$. 利用除6取余法可得，即$(2021)_{10}=(13205)_6$，所以答案是：13205.

4. 设 $f(x)=|\ln x|$，若函数 $g(x)=f(x)-ax$ 在区间 $(0,4)$ 上有三个零点，则实数 a 的取值范围是______.

答案：$\left(\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{e}\right)$

解析：

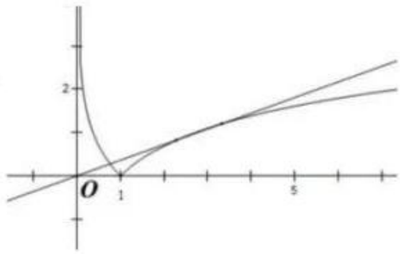
方法一：因为函数 $g(x)=f(x)-ax$ 在区间 $(0,4)$ 上有三个零点，即 $|\ln x|-ax=0$ 在 $(0,4)$ 上有三个不同的解. 令 $a=\frac{|\ln x|}{x}=\begin{cases}-\frac{\ln x}{x},0<x<1\\ \frac{\ln x}{x},1\le x<4.\end{cases}$.

则当 $0<x<1$ 时，$-\frac{\ln x}{x}\in(0,+\infty)$，

当 $1\le x<4$ 时，令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $[1,e]$ 上单调递增，在 $(e,4)$ 上单调递减.

因此，$\frac{\ln 2}{2}\le\frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e}$.

所以当 $a\in\left(\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{e}\right)$ 时，函数 $g(x)$ 在区间 $(0,4)$ 上有三个零点.



方法二：函数 $y=|\ln x|$ 的图象如右图：

当 $a\le 0$ 时，不符合题意；

当 $a>0$ 时，当 $x\in(0,1)$ 时，存在一个零点；

当 $x\in(1,+\infty)$，$f(x)=\ln x$，$g(x)=\ln x-ax,x\in(1,4]$，$g'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，

当 $x>\frac{1}{a}$ 时，$g'(x)<0,g(x)$ 单调递减；当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时，$g'(x)>0,g(x)$ 单调递增.

所以，$f(x)$ 与 $y=ax$ 在 $(1,4)$ 上有两个交点.

由 $\begin{cases}g(\frac{1}{a})>0\\ g(4)<0\\ g(1)\le 0\end{cases}$ 得：$\frac{\ln 2}{2}\le\frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e}$.

所以当 $a\in\left(\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{e}\right)$ 时，函数 $g(x)$ 在区间 $(0,4)$ 上有三个零点.

5. 已知 A,B,C 为圆 O（O 为坐标原点)上不同的三点，且 $\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$，则当 $\omega=\sqrt{3}\lambda+\lambda+\mu$ 取最大值时，$\frac{\lambda}{\mu}=$__________.

答案：$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

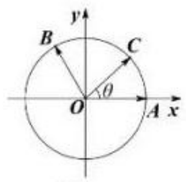


图 1

解析：

要使 $(\sqrt{3}+1)\lambda+\mu$ 最大，则 $\lambda>0,\mu>0$ 所以 C 必在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 内，不妨设半径为 1，如图 1，

以 O 为原点，$\overrightarrow{OA}$ 方向为 x 轴建立平面直角坐标系，并设 $<\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}>=\theta,\theta\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$ 则

$A(1,0),B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),C(\cos\theta,\sin\theta)$ 故

$$(\cos\theta,\sin\theta)=\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=\lambda(1,0)+\mu\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\lambda-\frac{\mu}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\mu\right) \quad ①$$

所以 $\lambda-\frac{\mu}{2}=\cos\theta,\frac{\sqrt{3}}{2}\mu=\sin\theta$ 解得 $\mu=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}},\lambda=\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$ 故

$(\sqrt{3}+1)\lambda+\mu=(\sqrt{3}+1)\sin\theta+(\sqrt{3}+1)\cos\theta=(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,而 $\theta\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，故 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{11\pi}{12}\right)$，

故当 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$，故 $\omega=\sqrt{3}\lambda+\lambda+\mu$ 的最大值为 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$，将 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 代入①，

此时 $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=10$，对任意的 $n\geq 2$ 有 $a_{n+1}^2-2a_n^2=a_na_{n+2}-2a_{n-1}a_{n+1}$，则 a_{21} 的个位数字是________.

答案：6

解析：

$\because a_{n+1}{}^2-2a_n{}^2=a_na_{n+2}-2a_{n-1}a_{n+1}$，$\therefore a_{n+1}(a_{n+1}+2a_{n-1})=a_n(a_{n+2}+2a_n)$.

$\therefore \frac{a_{n+1}+2a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}+2a_n}{a_{n+1}}$,

$\therefore \left\{\frac{a_{n+1}+2a_{n-1}}{a_n}\right\}$是常数列，又 $\frac{a_3+2a_1}{a_2}=3$,

$\therefore \frac{a_{n+2}+2a_n}{a_{n+1}}=3, \therefore a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$

由特征根方程求得$a_n=3\times 2^{n-1}-2$，$\therefore a_{21}$的个位数字为 6.

7. 由数字 1,2 和 3 组成的 6 位数中，若每个数字至少出现一次，则这样的 6 位数共有______个.

答案：540

解析：

记 1,2,3 组成的 6 位数的集合为 S，$A_i(i=1,2,3)$ 分别表示 S 中不含 i 的 6 位数的集合，则

由容斥原理得：$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|S|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$
$=3^6-3\times2^6+3=540$

8. 已知 n 是正整数，且 7^n+2n 能被 57 整除，则 n 的最小值为__________.

答案：25

解析：

方法一：因为 $7^3\equiv1(\mathrm{mod}\,57)$，

①若 $n=3k,k\in N^*$，则 $7^n\equiv7^{3k}\equiv1(\mathrm{mod}\,57)$，因此 $7^n+2n\equiv2n+1\equiv6k+1\equiv0(\mathrm{mod}\,57)$，

即 $57|6k+1$，而 $3\nmid6k+1$，因此 $57\nmid6k+1$，此时无解.

②若 $n=3k+1,k\in N$，则 $7^n\equiv7^{3k+1}\equiv7(\mathrm{mod}\,57)$，因此 $7^n+2n\equiv2n+7\equiv6k+9\equiv0(\mathrm{mod}\,57)$，

即 $57|6k+9$，因此 $19|2k+3$，$k_{\min}=8$，此时 $n=25$.

③若 $n=3k+2,k\in N$，则 $7^n\equiv7^{3k+2}\equiv49(\mathrm{mod}\,57)$，因此 $7^n+2n\equiv2n+49\equiv6k+53\equiv6k-4\equiv0(\mathrm{mod}\,57)$，

即 $57|6k-4$，而 $3\nmid6k-4$，因此 $57\nmid6k-4$，此时无解.

综上所述：$n_{\min}=25$.

方法二：设 $n=3q+r$，$r\in\{0,1,2\}$，注意到 $7^3-1=(7-1)(7^2+7+1)=6\times57$，

所以 $\exists k\in Z$，使得 $7^n-7^r=7^{3q+r}-7^r=7^r(7^{3q}-1)=7^r(7^3-1)(7^{3q-3}+7^{3q-6}+\ldots+7^3+1)=57k$.

因此 $57|7^n+2n$ 等价于 $57|7^r+2n$.

①当 $r=0$ 时，$n=3q$，$q\in N^*$，则 $57|6q+1$，而 $3\nmid6q+1$，因此 $57\nmid6q+1$，此时无解.

②当 $r=1$ 时，$n=3q+1,q\in N$，则 $57|6q+9$，因此 $19|2q+3$，$q_{\min}=8$，此时 $n=25$.

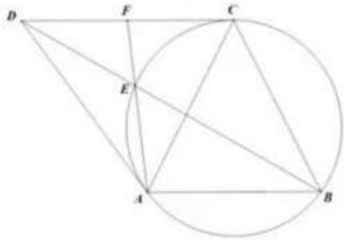
③当 $r=2$ 时，$n=3q+2,q\in N$，则 $57|6q-4$，而 $3\nmid6q-4$，因此 $57\nmid6q-4$，此时无解.

综上所述：$n_{\min}=25$.

二、解答题（共 56 分）

9. 如图，$AC=BC$，ΔABC 外接圆在 A,C 的切线交于 D 点，BD 交圆于 E，射线 AE 交 CD 于 F.

证明：F 是 CD 的中点.



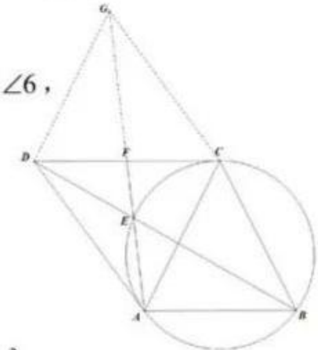
证明：

延长 AF 至 G，使得 $AG=BD$. 连接 CG，DG.

因为 $AC=BC$，$\angle DBC=\angle GAC$，$AG=BD$，

所以 $\Delta ACG\cong\Delta BCD$.①

因此 $CG=CD=AD$.②



设 $\angle CAB=\angle 1,\angle ABC=\angle 2,\angle ACB=\angle 3,\angle GCD=\angle 4,\angle DCA=\angle 5,\angle DAC=\angle 6$，$\angle ADC=\angle 7$

由弦切角定理得：$\angle 5=\angle 2=\angle 1$，$\angle 5=\angle 6=\angle 1$，因此 $\angle 3=\angle 7$，

由①知：$\angle GCA=\angle DCB$，所以 $\angle 3=\angle 4$.

因此 $\angle 4=\angle 7$，$AD\,//\,CG$.③

由②②知：四边形 $ACGD$ 是平行四边形，故 F 是 CD 的中点.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C_1:(x+1)^2+y^2=16$，曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，过 $M(-1,0)$ 斜率不为零的直线与 C_1 交于 A,B 两点，$N(1,0)$，AN,BN 的垂直平分线分别为 l_1,l_2，求证：

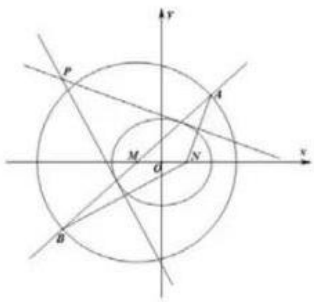
（1）l_1,l_2 均与 C_2 相切；

（2）l_1,l_2 的交点 P 在一条定直线上.

方法一

证明：(1)设 $\angle AMx=\theta(\theta\neq 0)$，$A(4\cos\theta-1,4\sin\theta)$，$AN$ 中点坐标为 $(2\cos\theta,2\sin\theta)$，直线 l_1 方程为

$$y-2\sin\theta=\frac{1-2\cos\theta}{2\sin\theta}(x-2\cos\theta)$$



化简为 $y=\dfrac{1-2\cos\theta}{2\sin\theta}x+\dfrac{4-2\cos\theta}{2\sin\theta}$，代入 C_2 整理得

$$(\cos\theta-2)^2x^2+4(1-2\cos\theta)(2-\cos\theta)x+4(2\cos\theta-1)^2=0$$

$$\therefore\ \Delta=16(1-2\cos\theta)^2(2-\cos\theta)^2-16(\cos\theta-2)^2(2\cos\theta-1)^2=0$$

故 l_1 与 C_2 相切.

由于 B,A 关于 M 对称，$x_B=4\cos(\theta+\pi)-1=-4\cos\theta-1,y_B=4\sin(\theta+\pi)=-4\sin\theta$

故将以上推导中的 $\cos\theta,\sin\theta$ 代换为 $-\cos\theta,-\sin\theta$ 即可得到 $B(-4\cos\theta-1,-4\sin\theta)$，

直线l_2方程为 $y=\frac{1+2\cos\theta}{-2\sin\theta}x+\frac{4+2\cos\theta}{-2\sin\theta}$

代入C_2整理为 $(-\cos\theta-2)^2x^2+4(1+2\cos\theta)(2+\cos\theta)x+4(-2\cos\theta-1)^2=0$

$$\therefore \Delta=16(1+2\cos\theta)^2(2+\cos\theta)^2-16(-\cos\theta-2)^2(-2\cos\theta-1)^2=0$$

故l_2与C_2相切.

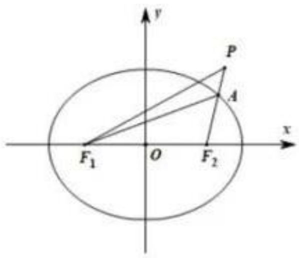
(2)将l_1,l_2方程相减得 $\left(\frac{1-2\cos\theta}{2\sin\theta}-\frac{1+2\cos\theta}{-2\sin\theta}\right)x+\frac{4-2\cos\theta}{2\sin\theta}-\frac{4+2\cos\theta}{-2\sin\theta}=0$

化简为$2x+8=0$，即$x=-4$．故l_1,l_2的交点P在一条定直线$x=-4$上.

方法二

证明：（1）先证明P为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$外一点的充要条件是

$|PF_1|+|PF_2|>2a$（F_1,F_2是椭圆两焦点)



证明：如图所示，射线F_2P与椭圆交于A点.

若P为椭圆外一点，则$|PF_1|+|PF_2|>|AF_1|-|AP|+|AP|+|AF_2|=2a$

若$|PF_1|+|PF_2|>2a$，则$|PF_1|+|PF_2|>|AF_1|+|AF_2|$，又$|PF_1|<|PA|+|AF_1|$，所以

$|PF_2|+|PA|>|AF_2|$，故P在椭圆外.

再证明：过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上一点$Q(x_0,y_0)$的切线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

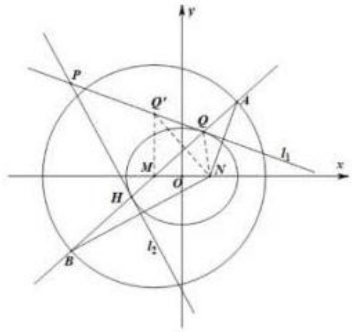
证明当$y>0$时，由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$得$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，$y'=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$，

$y'|_{x=x_0}=-\frac{b}{a}\frac{x_0}{\sqrt{a^2-x_0^2}}=-\frac{b}{a}\frac{x_0}{\frac{ay_0}{b}}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$，所以切线方程为$y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$，即

$b^2x_0x+a^2y_0y=b^2x_0^2+a^2y_0^2$，结合$b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$，可得切线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

同理，当$y<0$时切线方程仍为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

如图所示，设l_1与直线AB交于Q，$|QM|+|QN|=|QM|+|QA|=4$，所以Q在椭圆上．设Q'是l_1上不同于Q的任一点，$|Q'M|+|Q'N|=|Q'M|+|Q'A|>|AM|=4$，所以$Q'$在椭圆外，所以$l_1$与椭圆只有一个公共点，故$l_1$与椭圆相切．同理可证$l_2$与椭圆相切．



设直线AB方程为$x=my-1$，$Q(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$，则l_1方程为

$\frac{x_1x}{4}+\frac{y_1y}{3}=1$，$l_2$的方程为$\frac{x_2x}{4}+\frac{y_2y}{3}=1$，两方程联立消去$y$，得到

$\frac{x_1y_2-x_2y_1}{4}x=y_2-y_1$，再将$x_1=my_1-1$，$x_2=my_2-1$代入得

$\frac{y_1-y_2}{4}=y_2-y_1$，即$x=-4$

故l_1,l_2的交点P在一条定直线$x=-4$上．

11．已知ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，求证：

$$\frac{3}{2}\le\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\le 2(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C).$$

证明：

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}=(a^2+b^2+c^2)\bullet\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)-3$$
$$=\frac{(b^2+c^2)+(c^2+a^2)+(a^2+b^2)}{2}\bullet\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)-3$$
$$\ge\frac{3\sqrt[3]{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}}{2}\bullet 3\sqrt[3]{\frac{1}{b^2+c^2}\bullet\frac{1}{c^2+a^2}\bullet\frac{1}{a^2+b^2}}-3=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

另一方面，由正弦定理和柯西不等式得

$$\cos^2A+\cos^2B=\frac{\sin^2B\cos^2A}{\sin^2B}+\frac{\sin^2A\cos^2B}{\sin^2A}\ge\frac{(\sin A\cos B+\cos A\sin B)^2}{\sin^2A+\sin^2B}=\frac{\sin^2C}{\sin^2A+\sin^2B}=\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

同理 $\cos^2B+\cos^2C\ge\frac{a^2}{b^2+c^2},\cos^2C+\cos^2A\ge\frac{b^2}{c^2+a^2}$，三式相加得

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\le 2(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C).$$

综上，原不等式成立．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。