2024 北京延庆高三一模

数　　学

2024.03

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题纸交回。

第一部分（选择题，共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题中选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|x<3\}$，$B=\{1,2,3\}$，则 $A\cup B=$

（A）$(-\infty,3)$　　（B）$(-\infty,3]$

（C）$\{1,2\}$　　（D）$\{1,2,3\}$

（2）若复数 z 满足 $z\cdot \mathrm{i}=\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}$，则 $z=$

（A）$-1-\mathrm{i}$　　（B）$-1+\mathrm{i}$

（C）$1-\mathrm{i}$　　（D）$1+\mathrm{i}$

（3）在 $(2x-\dfrac{1}{x})^5$ 的展开式中，x^3 的系数为

（A）40　　（B）-40

（C）80　　（D）-80

（4）已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F，点 M 在 C 上．若 M 到直线 $x=-4$ 的距离为 7，则 $|MF|=$

（A）4　　（B）5

（C）6　　（D）7

（5）已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=$

（A）4　　（B）5

（C）6　　（D）8

（6）“$\sin 2\theta>0$”是“θ 为第一或第三象限角”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）已知函数 $f(x)=3^x-2x-1$，则不等式 $f(x)<0$ 的解集是

（A）$(0,1)$　　（B）$(0,+\infty)$

（C）$(-\infty,0)$　　（D）$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

（8）设 $a=\log_3 2$，$b=\log_9 6$，$c=\dfrac{1}{2}$，则

（A）$a>b>c$　　（B）$c>b>a$

（C）$b>c>a$　　（D）$b>a>c$

（9）在等边$\triangle ABC$中，$AB=2$，P为$\triangle ABC$所在平面内的动点，且$PA=1$，Q为边BC上的动点，则线段PQ长度的最大值是

（A）$\sqrt{3}-1$　　（B）$\sqrt{3}+1$

（C）$\sqrt{3}+2$　　（D）3

（10）已知在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=1$，P是正方形$ABCD$内的动点，$PA\geqslant PC_1$，则满足条件的点P构成的图形的面积等于

（A）$\dfrac{1}{8}$　　（B）$\dfrac{1}{4}$

（C）$\dfrac{\pi}{16}$　　（D）$\dfrac{\pi}{8}$

第二部分（非选择题，共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知双曲线$C:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$的离心率为$\sqrt{3}$，则双曲线$C$的渐近线方程为________.

（12）$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\angle B=60^\circ$，$\sin A=3\sin C$，$b=\sqrt{7}$，则$c=$________，$\triangle ABC$的面积为________.

（13）已知函数$f(x)=x^{\alpha}(0<\alpha<1)$在区间$(-1,0)$上单调递减，则$\alpha$的一个取值为________.

（14）北京天坛的圜丘坛分上、中、下三层，上层中心有一块圆形石板（称为天心石），环绕天心石砌9块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加9块，下一层的第一环比上一层的最后一环多9块，向外每环依次也增加9块．已知每层环数相同，且三层共有扇面形石板（不含天心石）3402块，则上层有扇形石板________块.

（15）已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2ax, & x<1,\\ \dfrac{a\ln x}{x}, & x\geqslant 1.\end{cases}$给出下列四个结论：

①存在实数a，使得函数$f(x)$的最小值为0；

②存在实数$a<0$，使得函数$f(x)$的最小值为-1；

③存在实数a，使得函数$f(x)$恰有2个零点；

④存在实数a，使得函数$f(x)$恰有4个零点.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x-2a\sin^2 x+a\ (a>0)$， $f(x)$ 的最大值为 2.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到 $g(x)$ 的图象，求函数 $g(x)$ 的单调增区间.

（17）（本小题 13 分）

第十四届全国冬季运动会雪橇项目比赛于 2023 年 12 月 16 日至 17 日在北京延庆举行，赛程时间安排如下表：

12 月 16 日	星期六	9:30	单人雪橇第 1 轮
		10:30	单人雪橇第 2 轮
		15:30	双人雪橇第 1 轮
		16:30	双人雪橇第 2 轮
12 月 17 日	星期日	9:30	单人雪橇第 3 轮
		10:30	单人雪橇第 4 轮
		15:30	团体接力

（Ⅰ）若小明在每天各随机观看一场比赛，求他恰好看到单人雪橇和双人雪橇的概率；

（Ⅱ）若小明在这两天的所有比赛中随机观看三场，记 X 为看到双人雪橇的次数，求 X 的分布列及期望 $E(X)$；

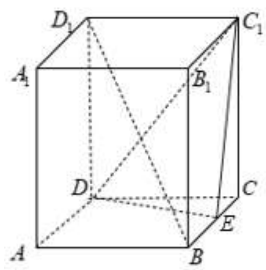
（Ⅲ）若小明在每天各随机观看一场比赛，用“$\xi_1=1$”表示小明在周六看到单人雪橇，“$\xi_1=0$” 表示小明在周六没看到单人雪橇，“$\xi_2=1$”表示小明在周日看到单人雪橇，“$\xi_2=0$”表示小明在周日没看到单人雪橇，写出方差 $D(\xi_1)$， $D(\xi_2)$ 的大小关系.

（18）（本小题 15 分）

如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，侧面 $ADD_1A_1\perp$ 底面 $ABCD$，$D_1D=3$， E 是 BC 的中点.

（Ⅰ）求证： $D_1B\,//$ 平面 C_1ED；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个条件作为已知，使二面角 $D-C_1E-B_1$ 唯一确定，并求二面角 $D-C_1E-B_1$ 的余弦值.



条件①： $C_1D=\sqrt{13}$；

条件②： $D_1B=\sqrt{17}$；

条件③： $AD\perp C_1D$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， A，C 分别是 E 的上、下顶点，$|AC|=2$， B，D 分别是 E 的左、右顶点．

（Ⅰ）求 E 的方程；

（Ⅱ）设 P 为第二象限内 E 上的动点，直线 PD 与直线 BC 交于点 M，直线 BP 与直线 CD 交于点 N，求证：$MN\perp BD$．

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=-\ln x+(2+a)x-2$．

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 的一条切线方程为 $y=x-1$，求 a 的值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上为增函数，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）若 $\forall x\in(\dfrac{1}{e^2},+\infty)$， $f(x)$ 无零点，求 a 的取值范围．

（21）（本小题 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$，记集合 $T=\{S(i,j)\,|\,S(i,j)=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_j,1\leqslant i<j,i,j\in\mathbf{N}^*\}$．

（Ⅰ）若数列 $\{a_n\}$ 为 $1,2,3$，写出集合 T；

（Ⅱ）若 $a_n=2n$，是否存在 $i,j\in\mathbf{N}^*$，使得 $S(i,j)=512$？若存在，求出一组符合条件的 i,j；若不存在，说明理由；

（Ⅲ）若 $a_n=n$，把集合 T 中的元素从小到大排列，得到的新数列为 $b_1,b_2,\cdots,b_m,\cdots$，若 $b_m\leqslant 2024$，求 m 的最大值．

参考答案

一、选择题：（每小题 4 分，共 10 小题，共 40 分）

1. B　2.C　3. D　4. B　5. C　6. C　7. A　8. D　9. D　10. A

二、填空题：（每小题 5 分，共 5 小题，共 25 分）

11. $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$；　12. 1，$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$；　13. $\dfrac{2}{3}$；　14；405　　15. ①③

12 题第一空 3 分，第二空 2 分；15 题选对一个给 3 分，二个给 5 分，有错误不给分.

三、解答题：（共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明、演算步骤.）

16. 解：

（Ⅰ）因为 $f(x)=\sin 2x+a\cos 2x=\sqrt{1+a^2}\sin(2x+\varphi)$　　…………2 分

其中 $\tan\varphi=a$，　　…………3 分

所以 $\sqrt{1+a^2}=2$，　　…………5 分

又因为 $a>0$，

所以 $a=\sqrt{3}$.　　…………6 分

（Ⅱ）因为 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$　　…………8 分

所以 $g(x)=2\sin[2(x-\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{\pi}{3}]=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$　　…………10 分

则 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le 2x-\dfrac{\pi}{3}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，　　…………12 分

$k\pi-\dfrac{\pi}{12}\le x\le k\pi+\dfrac{5\pi}{12}$，　　…………13 分

所以函数 $g(x)$ 的单调增区间为 $[k\pi-\dfrac{\pi}{12},k\pi+\dfrac{5\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$　　…………14 分

没有出现 $k\in\mathbf{Z}$ 扣一分, 结果不写区间形式扣一分。

17. 解：

（Ⅰ）记“小明在每天各随机观看一场比赛，恰好看到单人雪橇和双人雪橇”为事件 A.　由表可知，每天随机观看一场比赛，共有 $4\times3=12$ 种不同方法，其中恰好看到单人雪橇和双人雪橇，共有 $2\times2=4$ 种不同方法.

所以 $P(A)=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$.　　……4 分

（Ⅱ）随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2 .　　……5 分

根据题意，$P(X=0)=\dfrac{C_5^3}{C_7^3}=\dfrac{10}{35}=\dfrac{2}{7}$，　　……6 分

$$P(X=1)=\frac{C_2^1\cdot C_5^2}{C_7^3}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7},$$ ……7 分

$$P(X=2)=\frac{C_2^2\cdot C_5^1}{C_7^3}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}.$$ ……8 分

随机变量 X 的分布列是：

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

……9 分

数学期望 $E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$. ……11 分

（III） $D(\xi_1)>D(\xi_2)$ ……13 分

18. 解：（Ⅰ）证明：

方法一：在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连结 D_1C，设 $D_1C\cap DC_1=O$，连结 OE，在 $\triangle D_1BC$ 中，因为 O、E 分别为 D_1C,BC 的中点，

所以 $OE // D_1B$， …………2分

又因为 $OE\subset$ 平面 C_1DE， $D_1B\not\subset$ 平面 C_1DE， …………3分

所以 $D_1B //$ 平面C_1ED． …………4 分

方法二：在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 B_1C_1 中点为 F，连结 D_1F， BF， FE，

因为 $FC_1 \underline{\underline{//}}\ BE$，

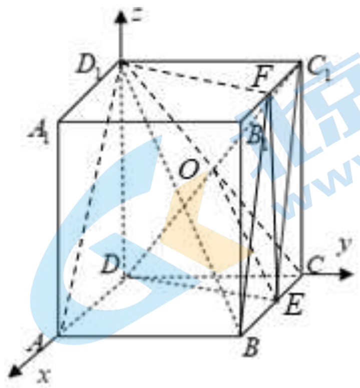
所以 FC_1EB 为平行四边形，

所以 $FB // C_1E$， ……1 分

因为 $EF \underline{\underline{//}}\ CC_1 \underline{\underline{//}}\ DD_1$，

所以 DD_1FE 为平行四边形，

所以 $D_1F // DE$， ……2 分



因为 $DE\cap C_1E=E$， $D_1F\cap FB=F$

所以平面 $D_1FB //$ 平面C_1DE， ……3 分

因为 $BD_1\subset$ 平面 D_1FB

所以 $D_1B //$ 平面C_1ED． ……4 分

（Ⅱ）解:

选择条件①： 本问记为 0 分.

选择条件②：

连结 D_1A，因为底面 $ABCD$ 是正方形，

所以 $BA\perp AD$，

又因为侧面 $ADD_1A_1\perp$ 底面 $ABCD$，且侧面 $ADD_1A_1\cap$ 底面 $ABCD=AD$，

所以 $BA\perp$ 平面ADD_1A_1，

所以 $BA\perp D_1A$，

在 $Rt\triangle D_1AB$ 中，因为 $D_1B=\sqrt{17}$， $AB=2$，

所以 $D_1A=\sqrt{13}$，

在 $\triangle D_1AD$ 中，因为 $AD=2$， $DD_1=3$，

所以 $AD\perp DD_1$，

所以 $DD_1\perp$ 平面$ABCD$，即 $DD_1\perp AD$， $DD_1\perp CD$，

又因为 $AD\perp CD$，

所以如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$， …………6 分

其中 $D(0,0,0)$， $C_1(0,2,3)$， $E(1,2,0)$， $C(0,2,0)$，且 $\overrightarrow{DC_1}=(0,2,3)$，

$\overrightarrow{DE}=(1,2,0)$， …………7 分

因为侧面 $ADD_1A_1\perp$ 底面 $ABCD$， 平面$ADD_1A_1\cap$平面$ABCD=AD$，

所以 $DC\perp$ 平面ADD_1A_1，

因为平面 ADD_1A_1 // 平面BCC_1B_1

所以 $DC\perp$ 平面BCC_1B_1，故 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$为平面$C_1EB_1$的一个法向量， …9 分

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平 C_1DE 面的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y+3z=0\\ x+2y=0\end{cases}$.

不妨设 $y=-3$，则 $x=6,z=2$，可得 $\vec{n}=(6,-3,2)$. …………12 分

所以 $\cos<\overrightarrow{DC},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{DC}||\vec{n}|}=\dfrac{-6}{2\times\sqrt{49}}=-\dfrac{3}{7}$， …………14 分

因为二面角 $D-C_1E-B_1$ 的平面角是钝角，

所以二面角 $D-C_1E-B_1$ 的余弦值为 $-\dfrac{3}{7}$. …………15 分

选择条件③： $AD\perp C_1D$

因为底面 $ABCD$ 是正方形，

所以 $AD\perp DC$，

因为 $AD\perp C_1D$，

所以 $AD\perp$ 平面C_1DC，

因为 $D_1D\subset$ 平面C_1DC

所以 $AD\perp D_1D$，

因为侧面 $ADD_1A_1\perp$ 底面 $ABCD$，且侧面 $ADD_1A_1\cap$ 底面 $ABCD=AD$，

所以 $DD_1\perp$ 平面$ABCD$，即 $DD_1\perp AD$， $DD_1\perp CD$，

又因为 $AD\perp CD$，

所以如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$， …………6 分

下面同选择条件②.

19. 解：

（Ⅰ）由题设，$\begin{cases}2b=2,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ …………3 分

解得 $a=2,b=1$. …………4 分

所以 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. …………5 分

（Ⅱ）方法一：

因为椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，所以 $A(0,1)$，$C(0,-1)$，$B(-2,0)$，$D(2,0)$，

因为 P 为第二象限 E 上的动点，设 $P(m,n)(-2<m<0,0<n<1)$. …………6 分

所以 $\dfrac{m^2}{4}+n^2=1$，即 $m^2=4-4n^2$. …………7 分

直线 PD 的方程为 $\dfrac{y-0}{n-0}=\dfrac{x-2}{m-2}$，即 $y=\dfrac{n}{m-2}(x-2)$. …………8 分

直线 BC 的方程为 $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{-1}=1$，即 $y=-\dfrac{1}{2}x-1$. …………9 分

由 $\begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}x-1,\\ y=\dfrac{n}{m-2}(x-2)\end{cases}$ 得 $x_M=\dfrac{4n-2m+4}{m+2n-2}$. …………10 分

直线 PB 的方程为 $\dfrac{y-0}{n-0}=\dfrac{x+2}{m+2}$，即 $y=\dfrac{n}{m+2}(x+2)$. …………11 分

直线 CD 的方程为 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}=1$，即 $y=\dfrac{1}{2}x-1$. …………12 分

由$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x-1, \\ y=\dfrac{n}{m+2}(x+2) \end{cases}$ 得 $x_N=\dfrac{4n+2m+4}{m-2n+2}$． …………13 分

$x_M-x_N=\dfrac{-16n^2-4m^2+16}{(m+2n-2)(m-2n+2)}=\dfrac{-16n^2-4(4-4n^2)+16}{(m+2n-2)(m-2n+2)}=0$， ………15 分

（$\dfrac{x_M}{x_N}=\dfrac{8mn-2m^2-8n^2+8}{8mn+2m^2+8n^2-8}=\dfrac{8mn-2(4-4n^2)-8n^2+8}{8mn+2(4-4n^2)+8n^2-8}=\dfrac{8mn}{8mn}=1$）

所以 $x_M=x_N$，即 $MN\perp BD$．

方法二：

因为椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，所以 $A(0,1)$，$C(0,-1)$，$B(-2,0)$，$D(2,0)$，

设直线 PD 的方程为 $y=k(x-2)$，其中 $-\dfrac{1}{2}<k<0$． …………7 分

由$\begin{cases} y=k(x-2), \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $P(\dfrac{8k^2-2}{1+4k^2},\dfrac{-4k}{1+4k^2})$． …………9 分

直线 BC 的方程为 $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{-1}=1$，即 $y=-\dfrac{1}{2}x-1$． …………10 分

由$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x-1, \\ y=k(x-2) \end{cases}$ 得 $x_M=\dfrac{4k-2}{2k+1}$． …………11 分

直线 PB 的方程为 $\dfrac{y-0}{\dfrac{-4k}{1+4k^2}-0}=\dfrac{x+2}{\dfrac{8k^2-2}{1+4k^2}+2}$，即 $y=-\dfrac{x+2}{4k}$． …………12 分

直线 CD 的方程为 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}=1$，即 $y=\dfrac{1}{2}x-1$． …………13 分

由$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x-1, \\ y=-\dfrac{x+2}{4k} \end{cases}$ 得 $x_N=\dfrac{4k-2}{2k+1}$． …………14 分

因为 $x_M=x_N$，所以 $MN\perp BD$． …………15 分

20.解：

（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，设切点为 (x_0,y_0)，

因为 $f'(x)=-\dfrac{1}{x}+2+a$， ………………1 分

所以 $-\dfrac{1}{x_0}+2+a=1$，即 $x_0=\dfrac{1}{1+a}$， ………………2 分

因为 $y_0=-\ln x_0+(2+a)x_0-2$，$y_0=x_0-1$， ………………4 分

所以 $\ln x_0=(1+a)x_0-1$，即 $\ln\dfrac{1}{1+a}=1-1=0$，

所以 $\dfrac{1}{1+a}=1$，即 $a=0$. ………………5 分

（Ⅱ）因为 $f'(x)=-\dfrac{1}{x}+2+a$， $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上为增函数，

所以 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $(1,2)$ 内恒成立， ………………7 分

因为 $x\in(1,2)$，所以 $f'(x)\in(a+1,a+\dfrac{3}{2})$， ………………8 分

所以 $a+1\geqslant 0$，即 $a\in[-1,+\infty)$. ………………10 分

（Ⅲ）因为 $f'(x)=-\dfrac{1}{x}+2+a=\dfrac{(2+a)x-1}{x}$， $x\in(0,+\infty)$，

当 $2+a\leqslant 0$，即 $a\leqslant -2$ 时， $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(\dfrac{1}{e^2},+\infty)$ 上单调递减，

因为 $f(\dfrac{1}{e^2})=2+(2+a)\dfrac{1}{e^2}-2\leqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(\dfrac{1}{e^2},+\infty)$ 上无零点，符合题意； ……11 分

当 $a>-2$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x=\dfrac{1}{2+a}>0$，

当 $x\in(0,\dfrac{1}{2+a})$ 时， $f'(x)<0$；当 $x\in(\dfrac{1}{2+a},+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,\dfrac{1}{2+a})$；单调递增区间是 $(\dfrac{1}{2+a},+\infty)$，

$f(x)$ 的最小值为 $f(\dfrac{1}{2+a})=-\ln\dfrac{1}{2+a}-1$， ……12 分

当 $-\ln\dfrac{1}{2+a}-1>0$，即 $a>e-2$ 时， $f(x)$ 无零点，符合题意； ……13 分

当 $a=e-2$ 时， $f(x)$ 有一个零点 $\dfrac{1}{2+a}=\dfrac{1}{e}>\dfrac{1}{e^2}$，不符合题意； ……14 分

当 $-2<a<e-2$ 时， $f(x)$ 的最小值 $f(\dfrac{1}{2+a})=-\ln\dfrac{1}{2+a}-1<0$，

因为 $f(\dfrac{1}{e^2})=(2+a)\dfrac{1}{e^2}>0$，

所以 $\exists x_0\in(\dfrac{1}{e^2},\dfrac{1}{2+a})$，使得 $f(x_0)=0$，不符合题意； ……15 分

综上所述，当 $a\in(-\infty,-2]\cup(e-2,+\infty)$ 时， $\forall x\in(\dfrac{1}{e^2},+\infty)$， $f(x)$ 无零点.

21. 解：

（Ⅰ）$T=\{3,5,6\}$. ………………4 分

（Ⅱ）假设存在 i，$j\in\mathbf{N}^*$，使得 $S(i,\ j)=512$，则有

$512=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_j=2i+2(i+1)+\cdots+2j=(j-i+1)(i+j)$，………6 分

由于 $i+j$ 与 $j-i$ 奇偶性相同，

所以 $i+j$ 与 $j-i+1$ 奇偶性不同.

又因为 $i+j\geqslant 3$，$j-i+1\geqslant 2$，

所以 512 必有大于等于 3 的奇数因子，

这与 512 无 1 以外的奇数因子矛盾.

故不存在 i，$j\in\mathbf{N}^*$，使得 $S(i,\ j)=512$ 成立. …………………8 分

（Ⅲ）首先证明 $a_n=n$ 时，对任意的 $m\in\mathbf{N}^*$ 都有 $b_m\neq 2^t$，$t\in\mathbf{N}^*$.

若 $\exists i$, $j\in\mathbf{N}^*$，使得：$i+(i+1)+\cdots+j=\dfrac{(j-i+1)(i+j)}{2}=2^t$，

由于 $j-i+1$ 与 $i+j$ 均大于 2 且奇偶性不同，所以 $(j-i+1)(i+j)=2^{t+1}$ 不成立............................10 分

其次证明除 $2^t(t\in\mathbf{N})$ 形式以外的数，都可以写成若干个连续正整数之和.

若正整数 $h=2^t(2k+1)$，其中 $t\in\mathbf{N}$，$k\in\mathbf{N}^*$.

当 $2^{t+1}>2k+1$ 时，由等差数列的性质有：

$$h=\underbrace{2^t+2^t+\cdots+2^t}_{(2k+1)\text{个}}=(2^t-k)+\cdots+(2^t-1)+2^t+(2^t+1)\cdots+(2^t+k)$$

此时结论成立.

当 $2^{t+1}<2k+1$ 时，由等差数列的性质有：

$$h=\underbrace{(2k+1)+(2k+1)+\cdots+(2k+1)}_{2^t\text{个}}$$

$$=(k-2^t+1)+\cdots+(k-1)+k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+2^t),$$

此时结论成立. ....12 分

对于数列 $a_n=n$，求其相应集合 T 中满足：$b_m\leqslant 2024$ 有多少项.

由前面的证明可知正整数 1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024

不是集合 T 中的项，

所以 m 的最大值为 2013. ....13 分