2018 北京十一学校高二（上）期末

数　　学（理）

2018.1

本试卷共 5 页，100 分，考试时长 120 分钟，考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题(共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分)

1. 函数 $y=\sqrt{x}$ 在 $x=1$ 处的导数为

（A） 0　　（B） $\frac{1}{2}$　　（C） 1　　（D） 2

2. 抛物线 $y=8x^2$ 的焦点坐标为

（A） $(0,2)$　　（B） $(2,0)$　　（C） $(\frac{1}{32},0)$　　（D） $(0,\frac{1}{32})$

3. 双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的渐近线方程为

（A） $y=\pm\frac{4}{3}x$　　（B） $y=\pm\frac{3}{5}x$　　（C） $y=\pm\frac{3}{4}x$　　（D） $y=\pm\frac{5}{4}x$

4. 已知方程 $\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m+1}=1$ 表示的曲线是椭圆，则实数 m 的取值范围是

（A） $(-1,2)$　　（B） $(-1,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},2)$　　（C） $(-1,\frac{1}{2})$　　（D） $(\frac{1}{2},2)$

5. 已知 O 为坐标原点，椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上的点 M 到左焦点 F_1 的距离为 2，N 为 MF_1 的中点，则 ON 的值等于

（A） 3　　（B） 4　　（C） 5　　（D） 6

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程是 $y=\sqrt{3}x$，且它的一个焦点在抛物线 $y^2=8x$ 的准线上，则双曲线的方程为

（A） $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　（B） $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$　　（C） $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　（D） $\frac{x^2}{3}-y^2=1$

7. 已知椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1(a>b>0)$ 的两个焦点分别为 F_1，F_2，P 是椭圆上一点，且 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，则 ! F_1PF_2 的面积等于

（A） $6\sqrt{3}$　　（B） $3\sqrt{3}$　　（C） 6　　（D） 3

8. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点为 F_1，F_2，若双曲线上存在一点 P，满足 $|PF_1|=3|PF_2|$，则该双曲线的离心率的取值范围是

（A） $1<e<2$　　（B） $1\le e\le 2$　　（C） $1<e\le 2$　　（D） $1\le e<2$

二、填空题(共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 函数 $y=xe^x$ 的导数是______.

10. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 到准线的距离与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的长轴长相等, 则抛物线的标准方程为______.

11. 已知定点 $M(3,4)$，F 为抛物线 $y^2=8x$ 的焦点, 点 P 在该抛物线上移动, 当 $|PM|+|PF|$ 取最小值时, 点 P 的坐标为______.

12. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\\y=3+t\end{cases}$（$t$ 为参数），以平面直角坐标系的坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0(\rho\ge 0,0\le\theta<2\pi)$，则直线 l 与曲线 C 的位置关系是______.

13. 已知函数 $f(x)=x^3-3x+\ln x$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为______.

14. 已知点 P 圆 $C:(x-4)^2+y^2=4$ 上, 点 Q 在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上移动, 则 $|PA|$ 的最大值为______.

三、解答题(共 2 道大题, 共 44 分, 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程).

15. （本小题 9 分）设函数 $f(x)=\frac{1-a}{2}x^2+ax-\ln x(a\in\mathbf{R})$

（1）当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极小值;

（2）当 $a\ge 2$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

16. （本小题 35 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $B(0,1)$，半焦距为 c，离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又直线

$l: y=kx+m(k\neq 0)$ 交椭圆于 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 两点, 且 $P(x_0,y_0)$ 为 MN 中点.

（5 分）（1）求椭圆 C 的标准方程;

（5 分）（2）若 $k=1, m=-1$, 求弦 MN 的长;

（5 分）（3）若点 $Q(1,\frac{1}{2})$ 恰好平分弦 MN, 求实数 k, m;

（8 分）（4）若满足 $|BM|=|BN|$, 求实数 m 的取值范围并求 $k_{MN}k_{OP}$ 的值;

（6 分）（5）设圆 $T:(x+2)^2+y^2=r^2(r>0)$ 与椭圆 C 相交于点 E 与点 F, 求 $\overrightarrow{TE}\cdot\overrightarrow{TF}$ 的最小值, 并求此时圆 T 的方程;

（6 分）（6）若直线 l 是圆 $O: x^2+y^2=\frac{4}{5}$ 的切线, 证明 $\angle MON$ 的大小为定值.

数学试题答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	A	B	A	C	B	C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

11. $(x+1)e^x$

12. $y^2=12x$

13. $(2,4)$

14. 相切

15. $y=x-3$

16. 7

三、解答题（本大题共 2 道大题，共 44 分）

解：(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=x-\ln x$，$f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 极小值为 $f(1)=1$.

(2) $f'(x)=\dfrac{1-a}{x}(x-1)(x-\dfrac{1}{a-1})$，由 $a\geq 2$ 得 $0<\dfrac{1}{a-1}\leq 1$

①当 $a=2$ 时，$f'(x)=-\dfrac{-(x-1)^2}{x}<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；

②当 $a>2$ 时，$0<\dfrac{1}{a-1}<1$，

令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\dfrac{1}{a-1}$ 或 $x>1$；令 $f'(x)<0$，解得 $\dfrac{1}{a-1}<x<1$.

综上所述：

①当 $a=2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；

②当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a-1})$ 和 $(1,+\infty)$ 单调递增，$f(x)$ 在 $(\dfrac{1}{a-1},1)$ 单调递减.

16. 解：(1) 根据题意：$\begin{cases} b=1 \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ b^2+c^2=a^2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）联立直线方程和椭圆方程：$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \\ y=x-1 \end{cases}$，整理得：$5x^2-8x=0$，解得 $x=0$ 或 $-\dfrac{8}{5}$，

所以 $M(0,-1)$，$N(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$，则 $|MN|=\sqrt{(\frac{8}{5})^2+(\frac{3}{5}+1)^2}=\frac{8\sqrt{2}}{5}$.

（3）$Q(1,\frac{1}{2})$ 恰好平分弦 MN，所以 $\begin{cases}x_0=1\\ y_0=\frac{1}{2}\end{cases}$，

M,N 在椭圆上，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1\\ \frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1\end{cases}$，上下相减得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{4}+(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$，

即 $\frac{(x_1-x_2)\times 2x_0}{4}+(y_1-y_2)\times 2y_0=0$，即 $\frac{(x_1-x_2)}{2}+(y_1-y_2)=0$，则 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$，即 $k=-\frac{1}{2}$，

点 Q 在直线上，所以直线 $l:y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)$，整理得 $y=-\frac{1}{2}x+1$，所以 $m=1$，

综上所述：$k=-\frac{1}{2}$，$m=1$.

（4）由（3）知 $\frac{(x_1-x_2)\times 2x_0}{4}+(y_1-y_2)\times 2y_0=0$，等号两边同时除以 $(x_1-x_2)\times 2x_0$，

得 $\frac{1}{4}+k_{MN}k_{OP}=0$，所以 $k_{MN}k_{OP}=-\frac{1}{4}$.

联立直线方程和椭圆方程：$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$，整理得：$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

$\Delta=64k^2m^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)>0$，解得 $k^2>\frac{m^2-1}{4}$，

则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+1}$，所以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{4km}{4k^2+1}$，则 $y_0=kx_0+m=\frac{m}{4k^2+1}$，

因为 $|BM|=|BN|$，所以 $k_{BP}k=-1$，则 $k_{BP}=\frac{y_0-1}{x_0}=\frac{\frac{m}{4k^2+1}-1}{-\frac{4km}{4k^2+1}}=-\frac{1}{k}$，化简得 $k^2=-\frac{3m+1}{4}>0$，则 $m<-\frac{1}{3}$，又

$k^2>\frac{m^2-1}{4}$，所以 $-\frac{3m+1}{4}>\frac{m^2-1}{4}$，解得 $-3<m<-\frac{1}{3}$，

综上所述：$-3<m<-\frac{1}{3}$，$k_{MN}k_{OP}=-\frac{1}{4}$.

（5）设 $E(x_3,y_3)(y_3>0)$，$F(x_3,-y_3)$，则 $\overrightarrow{TE}=(x_3+2,y_3)$ $\overrightarrow{TF}=(x_3+2,-y_3)$，

所以 $\overrightarrow{TE}\cdot\overrightarrow{TF}=(x_3+2)^2-y_3^2$，点 E 与点 F 在椭圆上：$y_3^2=1-\frac{x_3^2}{4}$，所以 $\overrightarrow{TE}\cdot\overrightarrow{TF}=\frac{5}{4}x_3^2+4x_3+3$，当 $x_3=-\frac{8}{5}$ 时，$\overrightarrow{TE}\cdot\overrightarrow{TF}$ 取得最小值 $-\frac{1}{5}$，此时 $y_3=\frac{3}{5}$，$r=|TE|=\frac{\sqrt{13}}{25}$，

综上所述：$\overrightarrow{TE}\cdot\overrightarrow{TF}$ 的最小值为 $-\frac{1}{5}$，此时圆 T 的方程 $(x+2)^2+y^2=\frac{13}{25}$.

（6）由（4）得 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+1}$ 且 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，所以 $x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$，

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2$，

所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=(k^2+1)x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{5m^2-4k^2-4}{4k^2+1}$

直线 l 是圆 $O:x^2+y^2=\dfrac{4}{5}$ 的切线，所以点 O 到直线 l 距离为 $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

即 $\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，整理得 $5m^2-4k^2-4=0$，所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，即 $\angle MON$ 的大小为 90°．