18 校 2021 高中数学联赛模拟

安徽师大附中, 巴蜀中学, 哈师大附中, 海亮中学, 邯郸一中, 衡水一中, 湖南师大附中, 临沂一中, 绵阳外国语学校, 南京师大附中, 南开中学, 山东省实验中学, 唐山一中, 天津市实验中学, 天一中学, 天元公学 · 杭二中未来科技城学校, 襄阳四中, 郑州外国语学校 (音序排名不分先后联合制作)

一试

一、填空题（本题共 8 小题，每题 8 分，共 64 分）

1 $f(n)$ 表示整数 n 的个位数, $a_n = f(n^2) - f(n) + 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 2020 项的和 $S_{2020} =$ ________.

2 将棱长为 1 的正方体顶点红蓝二染色, 使得同一条棱上两个顶点的颜色不同, 那么红色四面体与蓝色四面体的公共部分体积为 ________.

3 数列 $a_0, a_1, \cdots$, 满足: $a_0 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = [a_n] + \dfrac{1}{\{a_n\}}$, 其中 $[a_n]$ 与 $\{a_n\}$ 分别表示 a_n 的整数部分和小数部分, 则 $a_{2020} =$ ________.

4 直线 m 斜率存在且与椭圆 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ 交于 A, B 两点, 与双曲线 $\dfrac{y^2}{20} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ 交于 C, D 两点, 若 A, B 为 C, D 的三等分点, 则 m 的方程为 $y =$ ________.

5 记 $(3+2\sqrt{2})^{2020}$ 的小数部分是 A, 则 $(3+2\sqrt{2})^{2020}(1-A) =$ ________.

6 设 u, v, w 为复数, 其中 $w = a + bi(a, b \geq 3, a^2 + b^2 = 25)$, $u - w = 3v$, 若 $|v| = 1$, 则当 u 的辐角主值最大时, $\dfrac{u}{w} =$ ________.

7 函数 $y = \tan(2019x) - \tan(2020x) + \tan(2021x)$ 在 $[0, \pi]$ 中零点的个数为 ________.

8 x, y, z 是不同的正整数, 若 $\{x+y, y+z, z+x\} = \{n^2, (n+1)^2, (n+2)^2\}$, 则 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值为 ________ (用数字作答).

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

二、解答题（第 9 题 16 分, 第 10,11 题各 20 分, 共 56 分）

9 已知 P, Q(非原点) 是抛物线 $y=x^2$ 上不同的两点, 点 P 处的切线与 y 轴交于 R, 若 $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{PR}$, 求 $\triangle PQR$ 面积的最小值.

10 方程 $x^{2n}+(ax+b)^{2n}=0(a,b\in R,ab\neq 0)$ 有 $2n$ 个复根, r_i, $\overline{r_i}(i=1,2,\cdots,n)$, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i\overline{r_i}}=\frac{n(a^2+1)}{b^2}.$$

11 设 S 是所有大于-1 的实数集合, 确定所有的函数 $f:S\to S$, 使得满足下面两个条件:

(1) 对于 S 内所有的 x 和 y, 有

$$f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x);$$

(2) 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 的每一个内, $\dfrac{f(x)}{x}$ 是严格递增的.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

一试参考答案

一、填空题

1 $f(n)$ 表示整数 n 的个位数, $a_n=f(n^2)-f(n)+1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 2020 项的和 $S_{2020}=$ ________.

[参考答案] 2020

[解析] $b_n=a_n-1$, b_n 的前 n 项和为 T_n, 而 $T_{10}=0$, 故 $S_{2020}=T_{2020}+2020=T_{10}+2020=2020$.

2 将棱长为 1 的正方体顶点红蓝二染色, 使得同一条棱上两个顶点的颜色不同, 那么红色四面体与蓝色四面体的公共部分体积为 ________.

[参考答案] $\dfrac{1}{6}$

[解析] 各个面心连线组成的八面体体积即为所求;

3 数列 $a_0,a_1,\cdots$, 满足: $a_0=\sqrt{3}$, $a_{n+1}=[a_n]+\dfrac{1}{\{a_n\}}$, 其中 $[a_n]$ 与 $\{a_n\}$ 分别表示 a_n 的整数部分和小数部分, 则 $a_{2020}=$ ________.

[参考答案] $3030+\sqrt{3}$

[解析] $a_0=1+(\sqrt{3}-1)$, $a_1=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=1+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}=2+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$,
$a_2=2+\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}+1=4+(\sqrt{3}-1)$, 以此类推 $a_3=5+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, $a_4=7+(\sqrt{3}-1)$, $\cdots$
归纳得 $a_{2k}=3k+\sqrt{3}$, $a_{2k+1}=3k+2+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$
故 $a_{2020}=3030+\sqrt{3}$.x

4 直线 m 斜率存在且与椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 交于 A, B 两点, 与双曲线 $\dfrac{y^2}{20}-\dfrac{x^2}{16}=1$ 交于 C, D 两点, 若 A, B 为 C, D 的三等分点, 则 m 的方程为 $y=$ ________.

[参考答案] $\pm\dfrac{\sqrt{97}}{6}x$

[分析] 设 m 方程为 $y=kx+b$, 带入椭圆方程得 $(5+9k^2)x^2+18kbx+9b^2-45=0$ $(*)$
故 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$, $x_1+x_2=-\dfrac{18kb}{5+9k^2}$.
带入双曲线得 $(4k^2-5)x^2+8kbx+4b^2-80=0$ $(**)$
故 $|CD|=\sqrt{1+k^2}|x_3-x_4|$, $x_3+x_4=-\dfrac{8kb}{4k^2-5}$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

结合 A, B 为 CD 的三等分点, 故 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{x_3+x_4}{2}$, 故 $\dfrac{8kb}{4k^2-5}=\dfrac{18kb}{5+9k^2}$
得 $kb=0$, 若 $b=0$, 带入方程化简得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot 2\cdot\sqrt{\dfrac{45}{5+9k^2}}$
$|CD|=\sqrt{1+k^2}\cdot 2\cdot\sqrt{\dfrac{80}{4k^2-5}}$, 再利用 $|CD|=3\cdot|AB|$, 得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{97}}{6}$.
若 $k=0$, 容易根据 b^2 的范围得出矛盾, 说明这样的 m 不存在,
故综上, m 的方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{97}}{6}x$

5 记 $(3+2\sqrt{2})^{2020}$ 的小数部分是 A, 则 $(3+2\sqrt{2})^{2020}(1-A)=$ ________.

[参考答案] 1

[分析] 设 $(3+2\sqrt{2})^{2020}=A+B$, B 为整数,
结合 $(3+2\sqrt{2})^{2020}(3-2\sqrt{2})^{2020}=1$, 得 $(3-2\sqrt{2})^{2020}=\dfrac{1}{A+B}$
再结合 $(3+2\sqrt{2})^{2020}+(3-2\sqrt{2})^{2020}$ 二项展开为整数, 得 $A+B+\dfrac{1}{A+B}$ 为整数,
$0\le A<1$, $0<\dfrac{1}{A+B}<1$, 故 $A+\dfrac{1}{A+B}=1$,
故 $(A+B)(1-A)=(A+B)\dfrac{1}{A+B}=1$.

6 设 u, v, w 为复数, 其中 $w=a+bi(a,b\ge 3, a^2+b^2=25)$, $u-w=3v$, 若 $|v|=1$, 则当 u 的辐角主值最大时, $\dfrac{u}{w}=$ ________.

[参考答案] $\dfrac{16}{25}+\dfrac{12}{25}i$

[解析] 由条件得 $u=w+3v$, 故 U 在以 W 为圆心, 3 为半径的圆上, 结合 W 的运动区间, 在 $w=3+4i$, $u=4i$ 时, 满足 u 的辐角主值最大, 故 $\dfrac{u}{w}=\dfrac{u\overline{w}}{w\overline{w}}=\dfrac{4i\cdot(3-4i)}{25}=\dfrac{16}{25}+\dfrac{12}{25}i$.

7 函数 $y=\tan(2019x)-\tan(2020x)+\tan(2021x)$ 在 $[0,\pi]$ 中零点的个数为 ________.

[参考答案] 2021

[解析] $y=\tan(2019x)-\tan(2020x)+\tan(2021x)$
$=\dfrac{\sin 2019x}{\cos 2019x}+\dfrac{\sin 2021x}{\cos 2021x}-\dfrac{\sin 2020x}{\cos 2020x}=\dfrac{\sin 4040x}{\cos 2019x\cos 2021x}-\dfrac{\sin 2020x}{\cos 2020x}$
$=\dfrac{\sin 2020x(2\cos^2 2020x-\cos 2019x\cos 2021x)}{\cos 2019x\cos 2020x\cos 2021x}$
注意到 $2\cos^2 2020x-\cos 2019x\cos 2021x=\cos 4040x+1-\cos 2019x\cos 2021x$
$=-\sin 2019x\sin 2021x+1>0$
故 $\sin 2020x$ 在 $[0,\pi]$ 上的零点数即为原函数在 $[0,\pi]$ 上的零点数.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

8 x, y, z 是不同的正整数, 若 $\{x+y, y+z, z+x\} = \{n^2, (n+1)^2, (n+2)^2\}$, 则 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为 ________(用数字作答).

[参考答案] 1297

[解析] 不妨设 $x>y>z$, 由于 $\sum(x+y) = 2(x+y+z)$ 为偶数, 故 n 为奇数;

若 $n=3$, 则 $\{n^2, (n+1)^2, (n+2)^2\} = \{3^2, 4^2, 5^2\}$, 故 $x+y+z=25$, 而 $x+y=5^2=25$, 得 $z=0$, 矛盾;

若 $n=5$, 则 $\{n^2, (n+1)^2, (n+2)^2\} = \{5^2, 6^2, 7^2\}$, 故 $x+y=49$, $x+z=36$, $y+z=25$, 故 $x=30$, $y=19$, $z=6$,

此时 $x^2+y^2+z^2=1297$.

二、解答题（第 9 题 16 分, 第 10,11 题各 20 分, 共 56 分）

9 已知 P, Q(非原点) 是抛物线 $y=x^2$ 上不同的两点, 点 P 处的切线与 y 轴交于 R, 若 $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PR}$, 求 $\triangle PQR$ 面积的最小值.

[解析] 设 $P(x_1, x_1^2)$, $Q(x_2, x_2^2)$ 则 P 处的切线为 $2x_1x = x_1^2 + y$, 令 $x=0$, 得 $R(0, -x_1^2)$,

则 $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PR}$ 得 $(x_1-x_2, x_1^2-x_2^2)(x_1, 2x_1^2) = 0$,

$x_1(x_1-x_2) + 2x_1^2(x_1^2-x_2^2) = 0$, 结合 $x_1 \neq x_2$

得 $x_2 = -x_1 - \dfrac{1}{2x_1}$. 故 $|\overrightarrow{PQ}| = |x_1-x_2|\sqrt{1+\dfrac{1}{4x_1^2}} = \dfrac{1+4x_1^2}{2|x_1|}\sqrt{1+\dfrac{1}{4x_1^2}}$

$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{x_1^2+4x_1^4} = |x_1|\sqrt{1+4x_1^2}$

所以 $S = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(1+4x_1^2)^2}{4x_1} = 2x_1^3 + x_1 + \dfrac{1}{8x_1}$,

令 $f(x) = 2x^3 + x + \dfrac{1}{8x}(x>0)$, 则 $f'(x) = 6x^2 + 1 - \dfrac{1}{8x^2}$

令 $f'(x) = 0$, 得 $48x^4 + 8x^2 - 1 = 0$, 得 $x^2 = \dfrac{1}{12}$.

故在 $x = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 时, $S_min = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

10 方程 $x^{2n} + (ax+b)^{2n} = 0(a, b \in R, ab \neq 0)$ 有 $2n$ 个复根, r_i, $\overline{r_i}(i=1,2,\cdots,n)$, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i\overline{r_i}} = \frac{n(a^2+1)}{b^2}.$$

[解析] 由 $x^{2n} + (ax+B)^{2n} = 0$ 得 $\left(\dfrac{x}{ax+b}\right)^{2n} = -1$.

记 $y^{2n} = -1$ 的 $2n$ 个根为 ω_i, $\overline{\omega_i}(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$\dfrac{x}{ax+b} = \omega_i$ 或 $\overline{\omega_i}(i=1,2,\cdots,n)$, 因为均为一次方程, 故每个方程只有一根,

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

因此不妨设 $\dfrac{r_i}{ar_i+b}=\omega_i$, 得 $r_i=\dfrac{b\omega_i}{1-a\omega_i}$, $\overline{r_i}=\dfrac{b\overline{\omega_i}}{1-a\overline{\omega_i}}$

于是 $\dfrac{1}{r_i\overline{r_i}}=\dfrac{1+a^2-a(\omega_i+\overline{\omega_i})}{b^2}=\dfrac{a^2+1}{b^2}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i\overline{r_i}}=\frac{n(a^2+1)}{b^2}$$

11 设 S 是所有大于-1 的实数集合, 确定所有的函数 $f:S\to S$, 使得满足下面两个条件:

(1) 对于 S 内所有的 x 和 y, 有

$$f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x);$$

(2) 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 的每一个内, $\dfrac{f(x)}{x}$ 是严格递增的.

[解析] 令 $x=y$ 得, $f(x+f(x)+xf(x))=x+f(x)+xf(x)$,

故 $x+f(x)+xf(x)$ 为函数的一个不动点, 令 $A=x+f(x)+xf(x)$,

则 $f(A)=A$, $f(A+f(A)+Af(A))=A+f(A)+Af(A)$, 故 A^2+2A 也是 f 的一个不动点,

若 $A\in(-1,0)$, 则 $A^2+2A=(A+1)^2-1\in(-1,0)$, 且 $A^2+2A\neq A$.

从而, $(-1,0)$ 中有两个不动点, 但是这与 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(-1,0)$ 内严格递增矛盾,

同样的, 若 $A\in(0,+\infty)$, 可得到同样的矛盾, 故 $A=0$,

即 $x+f(x)+xf(x)=0$, 即 $f(x)=-\dfrac{x}{1+x}$.

下面验证 $f(x)=-\dfrac{x}{1+x}$ 符合题意,

显然, $\dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{1}{1+x}$ 在 S 中严格递增,

对任意的 $x,y\in S$, 有

$$f(x+f(y)+xf(y))=f\left(x-\frac{y}{1+y}-\frac{xy}{1+y}\right)=f\left(\frac{x-y}{1+y}\right)=\frac{y-x}{1+x}.$$

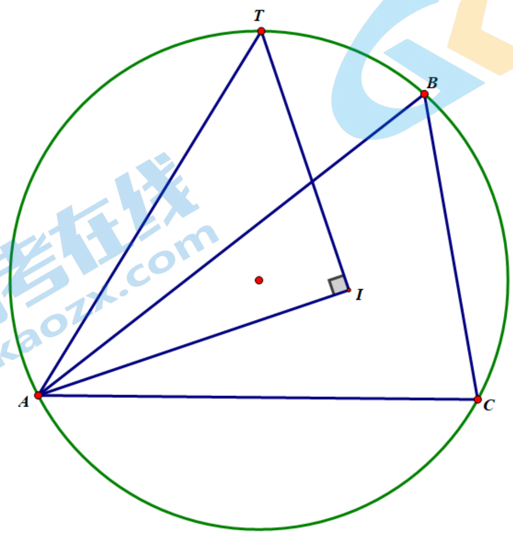
$$y+f(x)+yf(x)=y-\frac{x}{1+x}-\frac{xy}{1+x}=\frac{y-x}{1+x}.$$

故条件 (1) 也成立, 因此所求函数为 $f(x)=-\dfrac{x}{1+x}$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

二试

一、(40 分) $\triangle ABC$ 内心为 I, $\widehat{ABC}$ 的弧中点为 T, $\angle AIT = 90°$, 求证: $AB + AC = 3BC$.



二、(40 分) 令 $a_1, a_2, ..., a_n$ 为非负实数且 $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ 满足

$$f(a_1) f(a_2) ... f(a_n) \geq \lambda > 0,$$

证明:

$$\frac{f(a_1)-1}{f(a_1)} + \frac{f(a_2)-1}{f(a_1)f(a_2)} + ... + \frac{f(a_n)-1}{f(a_1)f(a_2)...f(a_n)} \geq \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

三、(50 分) k 是给定的自然数且 $k \geq 7$, 求一共有多少组不同的 (x, y) 使得 $0 \leq x, y < 2^k$ 且 $73^{73^x} \equiv 9^{9^y} \pmod{2^k}$ 成立?

四、(50 分) 一定数量的机器人被放置在一个有限的矩形方格表中, 每一个方格都可以容纳任意数量的机器人, 方格表中的每一条边要么是红边, 要么是绿边, 红边不允许机器人通过, 而绿边可以. 矩形方格表的边界上的边均为红边. 你可以对所有机器人下达上, 下, 左, 右四个命令.

所有的机器人收到命令时一起向命令中的方向移动, 如果该方向的边是绿边, 则机器人按照指令到达下一个方格, 如果机器人在该方向的边是红边, 则留在原方格不动. 所有机器人移动后你可以继续下达指令;

假设对任意一个独立的机器人, 对任意一个矩形方格来说, 都存在一种指令使得该机器人到达那个方格, 证明: 你可以通过有限次指令, 使得所有的机器人到达同一个方格.

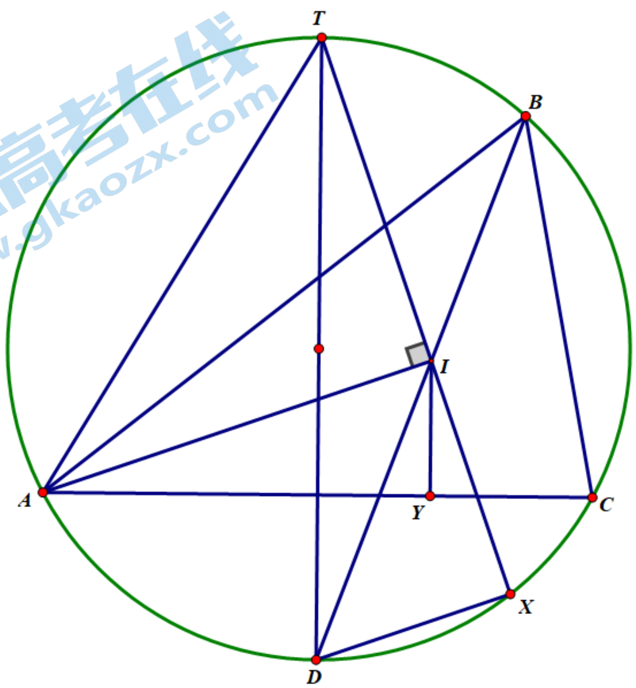
关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

二试参考答案

一、(40 分) $\triangle ABC$ 内心为 I, $\overset{\frown}{ABC}$ 的弧中点为 T, $\angle AIT = 90^\circ$, 求证: $AB + AC = 3BC$.

[解析] I 在 AC 上的投影为 Y, 延长 TI 与外接圆交于 X, T 的对径点为 D,

欲证原命题成立, 只需证明半周长为 $2BC$,



也就是证明 $AY = BC$

$AY = AI\cos\dfrac{A}{2}$, $BC = 2R\sin A = 2DT\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$

故只需证 $AI = 2DT\sin\dfrac{A}{2}$, 即 $AI = 2DX$

注意到 $IX \perp AI$, $DX \perp IX$, $DI = DA$

故原命题成立!

二、(40 分) 令 $a_1, a_2, ..., a_n$ 为非负实数且 $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ 满足

$$f(a_1) f(a_2) ... f(a_n) \geq \lambda > 0,$$

证明:

$$\frac{f(a_1) - 1}{f(a_1)} + \frac{f(a_2) - 1}{f(a_1) f(a_2)} + ... + \frac{f(a_n) - 1}{f(a_1) f(a_2) ... f(a_n)} \geq \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

[解析]

$$\frac{f(a_1)-1}{f(a_1)}+\frac{f(a_2)-1}{f(a_1)f(a_2)}+\ldots+\frac{f(a_n)-1}{f(a_1)f(a_2)\ldots f(a_n)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(a_k)-1}{f(a_1)f(a_2)\ldots f(a_k)}=$$

$$1-\frac{1}{f(a_1)}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{f(a_1)f(a_2)\ldots f(a_{k-1})}-\frac{1}{f(a_1)f(a_2)\ldots f(a_k)}\right)=$$

$$1-\frac{1}{f(a_1)}+\frac{1}{f(a_1)}-\frac{1}{f(a_1)f(a_2)\ldots f(a_n)}=1-\frac{1}{f(a_1)f(a_2)\ldots f(a_n)}\geq 1-\frac{1}{\lambda}=\frac{\lambda-1}{\lambda}$$

三、(50 分) k 是给定的自然数且 $k\geq 7$, 求一共有多少组不同的 (x,y) 使得 $0\leq x,y<2^k$ 且 $73^{73^x}\equiv 9^{9^y}\pmod{2^k}$ 成立?

[解析] 引理 1. 对任意非负整数 a 有 $73^{73^a}\equiv 73\equiv 9\equiv 9^{9^a}\pmod{2^6}$.

引理 1 的证明. 因为 $73=9+2^6$ 且 $v_2\left(73^{73^a}-73\right)=v_2(73-1)+v_2(73^a-1)=6+v_2(a)\geq 6$. 余数相同故证毕. □.

引理 2. 每一对 (x,y), $0\leq x,y<2^k$, 有 $73^{73^x}\equiv 73^{73^y}\pmod{2^k}$ 成立当且仅当 $2^{k-6}\mid x-y$.

引理 2 的证明. 不妨设 $x\neq y$ 且 $73^{73^x}\equiv 73^{73^y}\pmod{2^k}$. 由升幂定理有, $v_2\left(73^{73^x}-73^{73^y}\right)=v_2(73-1)+v_2\left(73^{x-y}-1\right)=6+v_2(x-y)$. □.

回到原题, 令 $S=\left\{73^{73^x}:0\leq x<2^k\right\}$ 则 $|S|=2^k$. 根据引理 2, 我们可以找到互不相交的子集组 $S_1,\ldots,S_{2^6}$ 使得 $\bigcup_{i=1}^{2^6}S_i=S$ 并且对任意的 $a,b\in S_i$ 有 $a\not\equiv b\pmod{2^k}$ 且 $a\equiv b\pmod{2^6}$. 我们有 $|S_i|=2^{k-6}$. 再根据引理 1, S_i 中的每个元素模 2^6 与 9 为底的相同, 事实上, 模 2^k 的完全剩余系中, 恰有 2^{k-6} 个元素在模 2^6 下与 9 为底的相同. 因此对每个 $i=1,\ldots,2^6$, S_i 包含了所有在模 2^6 下与 9 为底余数相同的数.

对每个 y 满足 $0\leq y<2^k$, 和任意的 $i=1,\ldots,2^6$ 都恰有一个 x, $0\leq x<2^k$, 使得 $73^{73^x}\equiv 9^{9^y}\pmod{2^k}$.

因此方程 $73^{73^x}\equiv 9^{9^y}\pmod{2^k}$ 的解的个数为 $2^k\times 2^6=2^{k+6}$ 组.

四、(50 分) 一定数量的机器人被放置在一个有限的矩形方格表中, 每一个方格都可以容纳任意数量的机器人, 方格表中的每一条边要么是红边, 要么是绿边, 红边不允许机器人通过, 而绿边可以. 矩形方格表的边界上的边均为红边. 你可以对所有机器人下达上, 下, 左, 右四个命令.

所有的机器人收到命令时一起向命令中的方向移动, 如果该方向的边是绿边, 则机器人按照指令到达下一个方格, 如果机器人在该方向的边是红边, 则留在原方格不动. 所有机器人移动后你可以继续下达指令;

假设对任意一个独立的机器人, 对任意一个矩形方格来说, 都存在一种指令使得该机器人到达那个方格, 证明: 你可以通过有限次指令, 使得所有的机器人到达同一个方格.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

[解析] 我们先解决两个机器人的问题:

设方格表上 x, y 两个点之间最短的路径距离为 $d(x,y)$, 则表格上的路径满足三角形三边不等式, 即 $d(a,c) \leq d(a,b)+d(b,c)$.

我们观察在方格表中位于 s 与 s' 位置的机器人 A 和 B, 我们下达指令让 A 移动到 s', 会出现如下两种情况:

(1) 整个移动过程中 B 未经过红边, 则重复该操作, 因为表格有限, 最终 B 遇到边界红边, 划归成情况 (2);

(2) 移动第 k 步时, B 遇到了红边, 留在了原地, 记此时 A 与 B 的位置分别为 t 与 t', 那么我们就得到了 $d(t,s')=d(s,s')-k$, $d(s',t') \leq k-1$,

故 $d(t,t') \leq d(t,s')+d(s',t') \leq d(s,s')-k+(k-1) < d(s,s')$.

经过一次这样的操作以后, A 与 B 的最短距离是变小的, 则持续进行下去, 经过有限次这样的操作后, 最终 A 与 B 的最短距离变为 0, 即 A 与 B 在同一格子中.

对一般的情况就变得显而易见了, 先选择两个机器人用上述的方法移动到同一个格子中, 之后将两个机器人视作同一个即可, 有限次操作以后, 所有机器人将移动到同一个格子中.

证毕!

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。