2023 北京首都师大附中高一 12 月月考

数　　学

第 I 卷（共 40 分）

一、单选题（本大题共 10 小题，共 40 分.在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象经过点 $(2,\sqrt{2})$，则实数 $\alpha=$（　）

A. 2　　　　B. -2　　　　C. $\frac{1}{2}$　　　　D. $-\frac{1}{2}$

2. 若集合 $A=\{0,m^2\},B=\{1,2\}$ 则“$m=1$”是“$A\cup B=\{0,1,2\}$”的

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

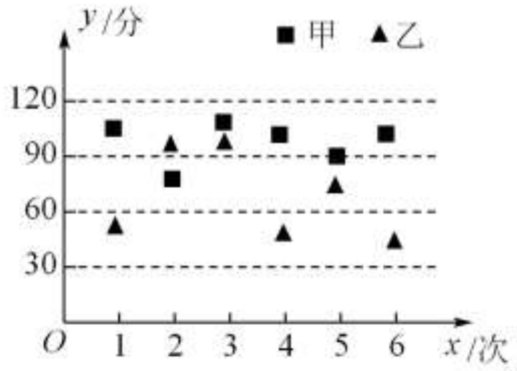
3. 已知实数 $a=e^{\ln 2},b=2+2\ln 2,c=(\ln 2)^2$，则 a,b,c 的大小关系是（　）

A. $c<a<b$　　　　B. $c<b<a$　　　　C. $b<a<c$　　　　D. $a<c<b$

4. 函数 $y=\log_{\frac{1}{3}}\left(-x^2-2x+3\right)$ 的单调递增区间是（　）

A. $(1,+\infty)$　　　　B. $(-\infty,1)$　　　　C. $(1,3)$　　　　D. $(-1,1)$

5. 已知甲、乙两名同学在高三的 6 次数学测试的成绩统计如图（图中纵坐标代表该次数学测试成绩），则下列说法不正确的是（　）



A. 甲成绩的极差小于乙成绩的极差

B. 甲成绩的中位数小于乙成绩的第 75 百分位数

C. 甲成绩的平均数大于乙成绩的平均数

D. 甲成绩的方差小于乙成绩的方差

6. 通常以分贝（符号是 dB）为单位来表示声音强度的等级.一般地，如果强度为 x 的声音对应的等级为 $f(x)$dB，则有 $f(x)=10\lg\dfrac{x}{1\times 10^{-12}}$．生活在深海的抹香鲸是一种拥有高分贝声音的动物，其声音约为 200dB，而人类说话时，声音等级约为 60dB，则抹香鲸声音强度与人类说话时声音强度之比为（　）

A. 10^8　　B. $\frac{10}{3}$　　C. 10^{-14}　　D. 10^{14}

7. 若 x_1 是函数 $f(x)=x\log_a x-2023(a>1)$ 的零点，x_2 是函数 $g(x)=xa^x-2023(a>1)$ 的零点，则 x_1x_2 的值为（　）

A. 1　　B. 2023　　C. 2023^2　　D. 4046

8. 若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则（　）

A. $a>2b$　　B. $a<2b$　　C. $a>b^2$　　D. $a<b^2$

9. 若 $(ax+2)(x^2+b)\le 0$ 对任意 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，其中 a,b 是整数，则 $a+b$ 的可能取值为（　）

A. -4　　B. -5　　C. -6　　D. -7

10. 已知 a、$b\in\mathbf{R}$，定义运算"$\otimes$"：$a\otimes b=\begin{cases}a,a-b\le 1\\ b,a-b>1\end{cases}$，设函数 $f(x)=2^{x+1}\otimes(2-4^x)$，$x\in R$．若函数 $y=f(x)-c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点，则实数 c 的取值范围是

A. $(0,1)$　　B. $(0,2)\cup(2,3)$

C. $(0,2)$　　D. $(0,\sqrt{3}-1)\cup(\sqrt{3}-1,2)$

第Ⅱ卷（共 60 分）

二、填空题（本大题共 5 小题，共 20 分）

11. 已知函数 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 是偶函数，则 $a=$______.

12. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{\ln x}$ 的定义域为__________.

13. 已知一组数据 $9.92,9.96,9.97,9.98,10,10.02,10.03,10.04,10.08$ 的平均数为 $\overline{X}$，方差为 s^2，则这组数据的平均数 $\overline{X}=$______；若新增 3 个均为 10 的数据，方差记为 s'^2，那么 s'^2 ______ s^2（填写">"、"<"或"="）

14. 已知 α,β 是方程 $9^x-2m\cdot 3^x+m^2-1=0$ 的两个根，若 $\alpha+\beta=1$，则 $m=$__，$\alpha\beta=$__.

15. 已知 A、B、C 三个物体同时从同一点出发向同一个方向运动，其路程 y 关于时间 $x(x>0)$ 的函数关系式分别为 $y_A=2^x-1,y_B=\log_2(x+1),y_C=\sqrt{x}$，则下列结论中，所有正确结论的序号是__.

①当 $x>1$ 时，A 总走在最前面；

②当 $0<x<1$ 时，C 总走在最前面；

③当 $x>1$ 时，B 总走在 C 的前面

三、解答题（本大题共 4 小题，共 40 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. 已知函数 $f(x)=x^m-\frac{16}{x^2}$，且 m 是满足 $f(-1)\ge -15$ 的最小正整数.

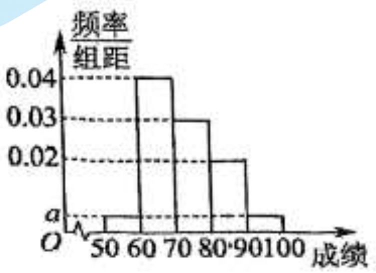
（1）判定 $f(x)$ 的奇偶性；

（2）判断 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性，并用定义证明.

17. 某省实行高考科目“3+1+2”模式.“3”指语文、数学、外语三门统考学科，以原始分数计入高考成绩；“1”指考生从物理、历史两门学科中“首选”一门学科，以原始分数计入高考成绩；“2”指考生从政治、地理、化学、生物四门学科中“再选”两门学科，以等级分计入高考成绩.按照方案，再选学科的等级分赋分规则如下，将考生原始成绩从高到低划分为 A,B，C,D,E 五个等级，各等级人数所占比例及赋分区间如下表：

等级	A	B	C	D	E
人数比例	15%	35%	35%	13%	2%
赋分区间	$[86,100]$	$[71,85]$	$[56,70]$	$[41,55]$	$[30,40]$

将各等级内考生的原始分依照等比例转换法分别转换到赋分区间内，得到等级分，转换公式为 $\dfrac{Y_2-Y}{Y-Y_1}=\dfrac{T_2-T}{T-T_1}$，其中 Y_1,Y_2 分别表示原始分区间的最低分和最高分，T_1,T_2 分别表示等级赋分区间的最低分和最高分，Y 表示考生的原始分，T 表示考生的等级分，规定原始分为 Y_1 时，等级分为 T_1，计算结果四舍五入取整.某次化学考试的原始分最低分为 50，最高分为 98，其频率分布直方图如图：



（1）求实数 a 的值（写出解答过程）；

（2）根据频率分布直方图，按分层抽样抽取一个容量为 100 的样本，求其中 D 等级中化学成绩原始分不及格（低于 60 分）的人数（写出解答过程）；

（3）填空：

用估计的结果近似代替原始分区间，估计此次考试化学成绩 A 等级的原始分区间为______，按照等级分赋分规则，估计原始分为 87.5 时对应的等级分数为______.

18. 已知 $a>0$，且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}+b$，$(b\in \mathrm{R})$ 在 R 上是单调减函数，且满足下列三个条件中的两个：①函数 $f(x)$ 为奇函数；② $f(1)=-\dfrac{3}{5}$；③ $f(-1)=-\dfrac{3}{5}$.

（1）从中选择的两个条件的序号为_______，依所选择的条件求得 $b=$______，$a=$_______（不需要过程，直接将结果写在答题卡上即可）

（2）在（1）的情况下，若方程 $f(x)=m+4^x$ 在 $[0,1]$ 上有且只有一个实根，求实数 m 的取值范围.

19. 若函数 $f(x)$ 满足下列条件：

在定义域内存在 x_0 使得 $f\left(x_0+1\right)=f\left(x_0\right)+f(1)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 具有性质 M；反之若 x_0 不存在，则称函数 $f(x)$ 不具有性质 M.

（1）证明函数 $f(x)=2^x$ 具有性质 M，并求出对应的 x_0 的值；

（2）已知函数 $h(x)=\lg\dfrac{a}{x^2+1}$，具有性质 M，求实数 a 的取值范围.

参考答案

第Ⅰ卷（共 40 分）

一、单选题（本大题共 10 小题，共 40 分.在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1.【答案】C

【分析】利用点代入即可得解.

【详解】因 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象经过点 $\left(2,\sqrt{2}\right)$，

所以 $2^{\alpha}=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，则 $\alpha=\frac{1}{2}$.

故选：C.

2.【答案】A

【详解】由题得 $A\cup B=\{0,1,2\}$ 所以 $\mathrm{m}=\pm\sqrt{2}$ 或 $m=\pm1$，所以“$m=1$”是“$A\cup B=\{0,1,2\}$”的充分不必要条件，选 A.

3.【答案】A

【分析】利用对数函数 $y=\ln x$ 的单调性和不等式的性质即可得到 a,b,c 的大小关系.

【详解】由 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$1<2<\mathrm{e}$，

可得 $\ln1<\ln2<\ln\mathrm{e}$，即 $0<\ln2<1$，

则 $0<(\ln2)^2<1$，$2+2\ln2>2$，又 $a=\mathrm{e}^{\ln2}=2$，

则 $0<(\ln2)^2<1<\mathrm{e}^{\ln2}=2<2+\ln2$，

则 a,b,c 的大小关系是 c<a<b

故选：A

4.【答案】D

【分析】利用二次函数的性质与对数型复合函数的性质即可得解.

【详解】因为 $y=\log_{\frac{1}{3}}\left(-x^2-2x+3\right)$，

所以 $-x^2-2x+3>0$，解得 $-3<x<1$，

又 $y=-x^2-2x+3$ 开口向下，对称轴为 $x=-1$，

所以 $y=-x^2-2x+3$ 在 $(-3,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,1)$ 上单调递减，

而 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 在其定义域上单调递减，

所以 $y=\log_{\frac{1}{3}}\left(-x^2-2x+3\right)$ 的单调递增区间为 $(-1,1)$.

故选：D.

5. 【答案】B

【分析】分析图中数据，结合方差，极差的求法和意义，结合百分位数的求解，得到答案.

【详解】从图表可以看出甲成绩的波动情况小于乙成绩的波动情况，

则甲成绩的方差小于乙成绩的方差，且甲成绩的极差小于乙成绩的极差，AD 正确；

将甲成绩从小到大进行排序，则第三与第四个成绩的平均数作为甲成绩的中位数，

将乙成绩从小到大进行排序，又 $6\times 75\% = 4.5$，

故选择第 5 个成绩成绩作为乙成绩的第 75 百分位数，

即甲的第 4 与第 6 次成绩的平均数为甲成绩的中位数，乙的第 2 或第 3 次成绩作为乙成绩的第 75 百分位数，

从图中可知甲的第 4 与第 6 次成绩都大于乙的第 2 或第 3 次成绩，

所以甲成绩的中位数大于乙成绩的第 75 百分位数，故 B 错误；

甲成绩均集中在 90 分左右，而乙成绩大多数集中在 60 分左右，故 C 正确.

故选：B

6. 【答案】D

【分析】利用函数表达式以及声音的分贝数求出声音强度，求比值即可.

【详解】当声音约为 200dB 时，则 $200 = 10\lg\dfrac{x}{1\times 10^{-12}}$，解得 $x = 10^{8}$，

当声音约为 60dB 时，则 $60 = 10\lg\dfrac{x}{1\times 10^{-12}}$，解得 $x = 10^{-6}$，

所以抹香鲸声音强度与人类说话时声音强度之比为 $\dfrac{10^{8}}{10^{-6}} = 10^{14}$.

故选：D.

7. 【答案】B

【分析】利用指数函数与对数函数互为反函数，其图象关于 $y = x$ 对称，结合反比例函数的图象也关于 $y = x$ 对称，从而数形结合即可得解.

【详解】因为 x_1 是函数 $f\left(x\right) = x\log_a x - 2023(a > 1)$ 的一个零点，x_2 是函数 $g\left(x\right) = xa^{x} - 2023(a > 1)$ 的一个零点，

所以 $x_1\log_a x_1 - 2023 = 0$，$x_2 a^{x_2} - 2023 = 0$，即 $\log_a x_1 = \dfrac{2023}{x_1}$，$a^{x_2} = \dfrac{2023}{x_2}$，

设函数 $y = a^{x}\ \left(a > 1\right)$ 与 $y = \dfrac{2023}{x}$ 的交点为 A，则 $A\left(x_1, y_1\right)$，$y_1 = \dfrac{2023}{x_1}$，

设函数 $y = \log_a x\ \left(a > 1\right)$ 与 $y = \dfrac{2023}{x}$ 的交点为 B，则 $B\left(x_2, y_2\right)$，$y_2 = \dfrac{2023}{x_2}$，

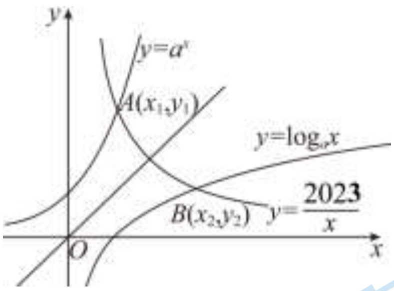
因为函数 $y = \log_a x\ \left(a > 1\right)$ 与函数 $y = a^{x}\ \left(a > 1\right)$ 互为反函数，

所以它们的图象关于 $y = x$ 对称，

而 $y=\dfrac{2023}{x}$ 的图象也关于 $y=x$ 对称，

所以点 A,B 关于 $y=x$ 对称，即 $x_1=y_2$，

所以由 $y_2=\dfrac{2023}{x_2}$ 得 $x_1=\dfrac{2023}{x_2}$，即 $x_1x_2=2023$.



故选：B.

8.【答案】B

【分析】设 $f(x)=2^x+\log_2 x$，利用作差法结合 $f(x)$ 的单调性即可得到答案.

【详解】设 $f(x)=2^x+\log_2 x$，则 $f(x)$ 为增函数，因为 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b=2^{2b}+\log_2 b$

所以 $f(a)-f(2b)=2^a+\log_2 a-(2^{2b}+\log_2 2b)=2^{2b}+\log_2 b-(2^{2b}+\log_2 2b)=\log_2\dfrac{1}{2}=-1<0$，

所以 $f(a)<f(2b)$，所以 $a<2b$.

$f(a)-f(b^2)=2^a+\log_2 a-(2^{b^2}+\log_2 b^2)=2^{2b}+\log_2 b-(2^{b^2}+\log_2 b^2)=2^{2b}-2^{b^2}-\log_2 b$，

当 $b=1$ 时，$f(a)-f(b^2)=2>0$，此时 $f(a)>f(b^2)$，有 $a>b^2$

当 $b=2$ 时，$f(a)-f(b^2)=-1<0$，此时 $f(a)<f(b^2)$，有 $a<b^2$，所以 C、D 错误.

故选：B.

【点睛】本题主要考查函数与方程的综合应用，涉及到构造函数，利用函数的单调性比较大小，是一道中档题.

9.【答案】B

【分析】根据题意，当 $b\ge 0$ 时，得到 a 不存在；当 $b<0$ 时，设 $f(x)=ax+2$ 和 $g(x)=x^2+b$，结合函数的图象，列出关系式，即可求解.

【详解】由题意，不等式 $(ax+2)(x^2+b)\le 0$ 对任意 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，

当 $b\ge 0$ 时，由不等式 $(ax+2)(x^2+b)\le 0$，即 $ax+2\le 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立，此时 a 不存在；

当 $b<0$ 时，由不等式 $(ax+2)(x^2+b)\le 0$，

可设函数 $f(x)=ax+2$ 和 $g(x)=x^2+b$，

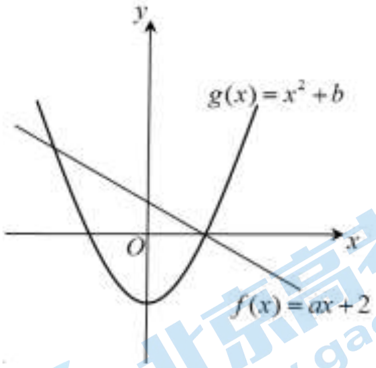
由函数 $g(x)=x^2+b$ 的大致图象，如图所示，

要使得不等式$(ax+2)(x^2+b)\le 0$对任意$x\in[0,+\infty)$恒成立，

则满足$\begin{cases}a<0\\ -\dfrac{2}{a}=\sqrt{-b}\end{cases}$，又因为$a,b$是整数，可得$\begin{cases}a=-1\\ b=-4\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2\\ b=-1\end{cases}$，

所以$a+b=-5$或$a+b=-3$.

故选：B.



10.【答案】A

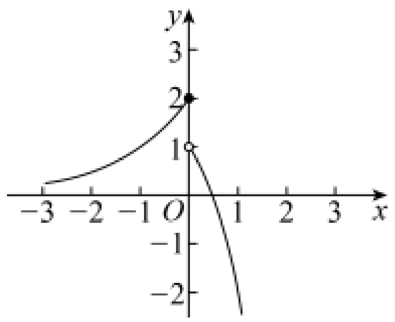
【分析】根据定义得出$f(x)$的解析式，作出函数$f(x)$的图象得出答案.

【详解】解：若$2^{x+1}-(2-4^x)\leqslant 1$，则$(2^x)^2+2\times 2^x-3\le 0$，解得$x\leqslant 0$，

若$2^{x+1}-(2-4^x)>1$，则$(2^x)^2+2\times 2^x-3>0$，则$x>0$，

$\therefore f(x)=\begin{cases}2^{x+1}, & x\le 0\\ 2-4^x, & x>0\end{cases}$，

作出$f(x)$的函数图象如图所示：



$\because y=f(x)-c$有两个零点，

$\therefore f(x)=c$有两解，

$\therefore 0<c<1$.

故选A.

【点睛】（1）函数零点个数（方程根的个数）的判断方法：①结合零点存在性定理，利用函数的单调性、对称性确定函数零点个数；②利用函数图像交点个数判断方程根的个数或函数零点个数.

（2）本题将方程实根个数的问题转化为两函数图象交点的问题解决，解题时注意换元法的应用，以便将

复杂的问题转化为简单的问题处理.

第Ⅱ卷（共 60 分）

二、填空题（本大题共 5 小题，共 20 分）

11.【答案】1

【分析】利用偶函数的定义可求参数a的值.

【详解】因为 $f\left(x\right)=x^3\left(a\cdot 2^x-2^{-x}\right)$，故 $f\left(-x\right)=-x^3\left(a\cdot 2^{-x}-2^x\right)$，

因为 $f\left(x\right)$ 为偶函数，故 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，

时 $x^3\left(a\cdot 2^x-2^{-x}\right)=-x^3\left(a\cdot 2^{-x}-2^x\right)$，整理得到 $\left(a-1\right)\left(2^x+2^{-x}\right)=0$，

故 $a=1$，

故答案为：1

12.【答案】$(0,1)\cup(1,3]$

【分析】根据 $\begin{cases}6+x-x^2\geq 0\\ \ln x\neq 0\end{cases}$，解出两个不等式，最后求交集即可.

【详解】由题意：$\begin{cases}6+x-x^2\geq 0\\ \ln x\neq 0\\ x>0\end{cases}\Rightarrow x\in\left(0,1\right)\cup(1,3]$

故答案为：$\left(0,1\right)\cup(1,3]$.

13.【答案】 ①. 10 ②. >

【分析】空 1，利用平均数的计算公式即可得解；空 2，再利用方差的定义判断即可.

【详解】依题意，得

$$\overline{X}=\frac{1}{9}\times\left(9.92+9.96+9.97+9.98+10+10.02+10.03+10.04+10.08\right)=10；$$

因为新增的 3 个数据均为10，

所以新的数据组的平均数不变，仍为10，则 $\sum_{i=1}^{9}\left(x_i-\overline{X}\right)^2=\sum_{i=1}^{9}\left(x_i-\overline{X}\right)^2+3\times\left(10-\overline{X}\right)^2$，

因为 $s^2=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\left(x_i-\overline{X}\right)^2$，$s'^2=\frac{1}{12}\left[\sum_{i=1}^{9}\left(x_i-\overline{X}\right)^2+3\times\left(10-\overline{X}\right)^2\right]$，

所以 $s^2>s'^2$.

故答案为：10；>.

14.【答案】 ①. 2 ②. 0

【分析】利用一元二次方程根的分布和根与系数的关系列出关于 m 的方程，解之即可求得 m 的值，求得 α,β 的值，进而得到 $\alpha\beta$ 的值.

【详解】由题意得方程$9^x-2m\cdot 3^x+m^2-1=0$有两个根，

则方程$t^2-2mt+m^2-1=0$有二正根，

则$\begin{cases}\Delta=4m^2-4(m^2-1)\geq 0\\ 2m>0\\ m^2-1>0\end{cases}$，解之得$m>1$，

又α,β是方程$9^x-2m\cdot 3^x+m^2-1=0$的两个根，

则$3^\alpha\times 3^\beta=m^2-1$，又$\alpha+\beta=1$，则$m^2-1=3^{\alpha+\beta}=3$，

解之得$m=2$或$m=-2$（舍），

则$3^\alpha+3^\beta=2m=4$，又$\alpha=1-\beta$，

则$3^{1-\beta}+3^\beta=4$，解之得$\beta=0$或$\beta=1$

则$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=0\end{cases}$，或$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\end{cases}$，则$\alpha\beta=0$

故答案为：2，0

15.【答案】①②

【分析】利用指数函数对数函数幂函数的增长变化规律判断①；利用三个函数在$0<x<1$上的图像判断②；举反例否定③.

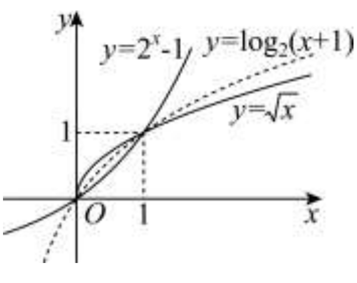
【详解】对于①，指数函数的变化是先慢后快，当$x=1$时，$y_A=y_B=y_C=1$，

所以当$x>1$时，A总走在最前面，判断正确；

对于②，同一坐标系内画出$y=2^x-1, y=\log_2(x+1), y=\sqrt{x}$的简图，

由图可得当$0<x<1$时，$2^x-1<\log_2(x+1)<\sqrt{x}$，

故$0<x<1$时，C总走在最前面.判断正确；



对于③，当$x=63$时，$y_B=\log_2(63+1)=6, y_C=\sqrt{63}>\sqrt{36}=6$，

故$y_B<y_C$，即C走在B的前面.判断错误.

故答案为：①②

三、解答题（本大题共4小题，共40分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16.【答案】（1）$f(x)$为偶函数

（2）$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，证明见解析

【分析】（1）先由题意求得 $m=2$，再利用函数奇偶性的定义即可得解；

（2）利用单调性的定义，结合作差法即可得证.

【小问 1 详解】

因为 $f(x)=x^m-\dfrac{16}{x^2}$，

所以由 $f(-1)\geq -15$，得 $(-1)^m-\dfrac{16}{1}\geq -15$，即 $(-1)^m\geq 1$，

因为 m 是满足 $f(-1)\geq -15$ 的最小正整数，

当 $m=1$ 时，不满足 $(-1)^m\geq 1$；当 $m=2$，满足 $(-1)^m\geq 1$；

所以 $m=2$，则 $f(x)=x^2-\dfrac{16}{x^2}$，其定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

又 $f(-x)=(-x)^2-\dfrac{16}{(-x)^2}=x^2-\dfrac{16}{x^2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

【小问 2 详解】

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，证明如下：

任取 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1^2-\frac{16}{x_1^2}\right)-\left(x_2^2-\frac{16}{x_2^2}\right)=(x_1-x_2)(x_1+x_2)\left(1+\frac{16}{x_1^2x_2^2}\right),$$

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0, x_1+x_2>0, x_1x_2>0$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

17. 【答案】（1） $a=0.005$

（2） 3

（3） $[85,98]$；89

【分析】（1）利用频率分布直方图各小矩形面积和为 1 求解；

（2）由题意求得所求人数的占比，从而得解；

（3）利用频率分布直方图与百分位数求出此次考试化学成绩 A 等级的原始分区间，再利用给定转换公式求出等级分作答.

【小问 1 详解】

依题意，得 $10(a+0.04+0.03+0.02+a)=1$，解得 $a=0.005$，

所以 $a=0.005$.

【小问 2 详解】

由频率分布直方图知，原始分成绩位于区间 $[50,60)$ 的占比为 5%，

又成绩 E 等级占比为2%，成绩 D 等级占比为13%，

所以 D 等级中化学成绩原始分不及格（低于 60 分）的占比为$5\%-2\%=3\%$，

故其人数估计值为$100\times3\%=3$.

【小问 3 详解】

由题意，易知此次考试化学成绩 A 等级的原始分区间的右端点为98，

其左端点对应的是第85%分位数，

因为原始分成绩位于区间$\left[50,80\right]$的占比为$10\times\left(0.005+0.04+0.03\right)=0.75=75\%$，

位于区间$\left[50,90\right]$的占比为$10\times\left(0.005+0.04+0.03+0.02\right)=0.95=95\%$，

则原始成绩分数的85%分位数在区间$\left[80,90\right]$上，不妨设为x，

则$0.75+\left(x-80\right)\times0.02=0.85$，解得$x=85$，

所以此次考试化学成绩 A 等级的原始分区间为$\left[85,98\right]$；

显然原始分为 87.5 时对应的等级为 A，

此时$\dfrac{Y_2-Y}{Y-Y_1}=\dfrac{T_2-T}{T-T_1}$，其中$Y_1=85,Y_2=98$，$Y=87.5$，$T_1=86,T_2=100$，

则$\dfrac{98-87.5}{87.5-85}=\dfrac{100-T}{T-86}$，解得$T=\dfrac{2306}{26}\approx88.7$，

则该学生的等级分为89分.

18.【答案】（1）①②，$b=0,a=\dfrac{1}{2}$

（2）$m\in\left[-\dfrac{23}{5},-1\right]$

【分析】（1）g 利用单调性以及函数的奇偶性确定满足的条件，再利用条件求解得到$b=0,a=\dfrac{1}{2}$；（2）利用函数的单调性求出最值，数形结合求解m的取值范围.

【小问 1 详解】

因为$f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}+b$，$(b\in\mathrm{R})$在 R 上是单调减函数，

所以$f(1)<f(-1)$，所以②③条件中，有且仅有 1 个成立，

所以满足①，则有$f(0)=0$，

又因为$f(-1)>f(0)>f(1)$，

所以满足条件①②.

所以$\begin{cases} b=0 \\ \dfrac{a-\dfrac{1}{a}}{a+\dfrac{1}{a}}+b=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$解得$b=0, a=\dfrac{1}{2}$.

【小问 2 详解】

由（1）可知$f(x)=\dfrac{2^{-x}-2^{x}}{2^{-x}+2^{x}}=\dfrac{1-4^{x}}{1+4^{x}}=\dfrac{2}{1+4^{x}}-1$，

$f(x)=m+4^{x}$等价于$\dfrac{2}{1+4^{x}}-1-4^{x}=m$，

令$g(x)=\dfrac{2}{1+4^{x}}-1-4^{x}$，则$g(x)=\dfrac{2}{1+4^{x}}-1-4^{x}$在$[0,1]$单调递减，

所以$g(x)_{\max}=g(0)=-1, g(x)_{\min}=g(1)=-\dfrac{23}{5}$，

因为$f(x)=m+4^{x}$在$[0,1]$上有且只有一个实根，

所以$m\in\left[-\dfrac{23}{5},-1\right]$.

19. 【答案】（1）证明见解析，$x_0=1$ （2）$a\in[3-\sqrt{5},3+\sqrt{5}]$

【分析】

（1）将$f(x)=2^{x}$代入$f\left(x_0+1\right)=f\left(x_0\right)+f(1)$，求出$x_0$即可证明；

（2）由题意，存在x_0，使$\lg\dfrac{a}{\left(x_0+1\right)^2+1}=\lg\dfrac{a}{x_0^2+1}+\lg\dfrac{a}{2}$，化简得$(a-2)x_0^2+2ax_0+2a-2=0$有实根，分类讨论即可求出答案.

【详解】（1）证明：$f(x)=2^{x}$代入$f\left(x_0+1\right)=f\left(x_0\right)+f(1)$得：

$2^{x+1}=2^{x_0}+2$，

即$2^{x_0}=2$，解得$x_0=1$

所以函数$f(x)=2^{x}$具有性质M；

（2）解：$h(x)$的定义域为R，且可得$a>0$.

因为$h(x)$具有性质M，所以存在x_0，使$h\left(x_0+1\right)=h\left(x_0\right)+h(1)$，

代入得：$\lg\dfrac{a}{\left(x_0+1\right)^2+1}=\lg\dfrac{a}{x_0^2+1}+\lg\dfrac{a}{2}$，化为$2\left(x_0^2+1\right)=a\left(x_0+1\right)^2+a$，

整理得：$(a-2)x_0^2+2ax_0+2a-2=0$有实根，

①若$a=2$，得$x_0=-\dfrac{1}{2}$；

②若 $a\neq 2$，得 $\Delta\geqslant 0$，即 $a^2-6a+4\leq 0$，解得：$a\in[3-\sqrt{5},3+\sqrt{5}]$，

$\therefore a\in[3-\sqrt{5},2)\cup(2,3+\sqrt{5}]$；

综上可得 $a\in[3-\sqrt{5},3+\sqrt{5}]$

【点睛】本题是在新定义下对函数的综合考查，关于新定义型的题，关键是理解定义，并会用定义来解题，属于难题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！