2019年江苏省天一中学十二月份调研考试

高三数学（Ⅰ）试题　　2019.12

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

1. 设全集$U=\{x\,|\,x<5,x\in N^*\}$，集合$A=\{1，3\}$，$B=\{3，4\}$，则$C_U(A\cup B)=$_____.

答案：$\{2\}$，

分析：由全集$U=\{x\,|\,x<5,x\in N^*\}$，可得$U=\{1，2，3，4\}$，然后根据集合混合运算的法则即可求解.

解：$\because A=\{1，3\}$，$B=\{3，4\}$，

$\therefore A\cup B=\{1，3，4\}$，

$\because U=\{x\,|\,x<5,x\in N^*\}=\{1，2，3，4\}$，

$\therefore C_U(A\cup B)=\{2\}$

2. 已知i是虚数单位，若复数$z=(1+2i)(a+i)$的实部与虚部相等，则实数a的值为____.

答案：-3

分析：利用复数代数形式的乘除运算化简，再由实部与虚部相等列式求得a值.

解：$\because z=(1+2i)(a+i)=(a-2)+(2a+1)i$，

且z的实部与虚部相等，

$\therefore a-2=2a+1$，即$a=-3$.

故答案为：-3.

3. 函数$f(x)=\sqrt{x}+\log_2(1-x)$的定义域为_____.

答案：$[0,1)$

分析：利用偶次根式被开方数大于等于0，再结合对数函数的真数大于0即可求解.

解：由题意得$\begin{cases}x\geq 0\\1-x>0\end{cases}$，解得$0\leq x<1$

故函数$f(x)$的定义域为$[0,1)$

4. 从甲，乙，丙，丁4个人中随机选取两人，则甲、乙两人中有且只一个被选取的概率为____.

答案：$\frac{2}{3}$

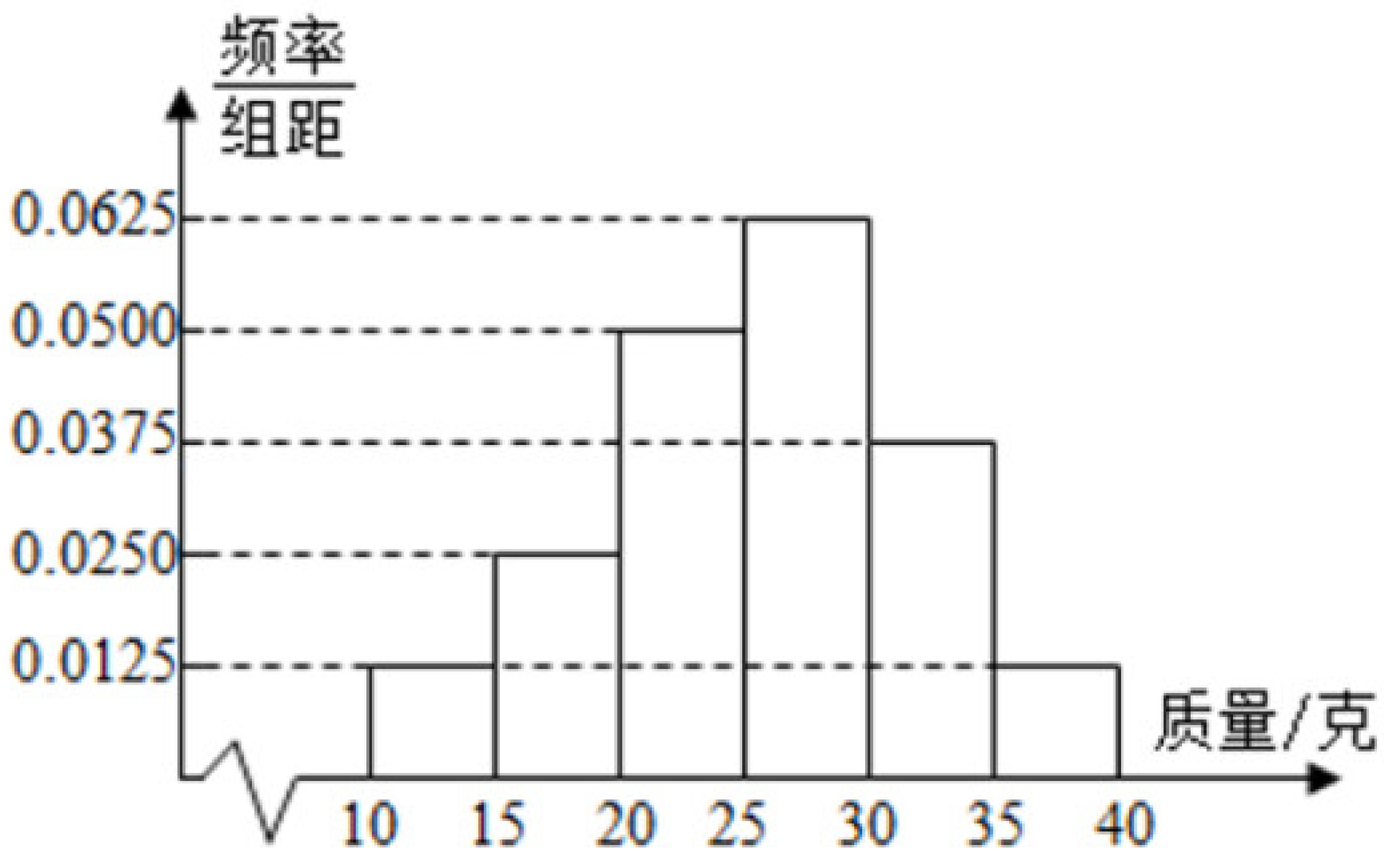
分析：根据古典概型的概率公式即可得到结论.

解：从甲，乙，丙，丁4个人中随机选取两人，共有（甲乙），（甲丙），（甲丁），（乙丙），（乙丁），（丙丁）六种，其中甲乙两人中有且只一个被选取，则（甲丙），（甲丁），（乙丙），（乙丁），共4种，

故甲乙两人中有且只一个被选取的概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，

故答案为：$\frac{2}{3}$

5. 对一批产品的质量（单位：克）进行抽样检测，样本容量为800，检测结果的频率分布直方图如图所示．根据标准，单件产品质量在区间$[25，30)$内为一等品，在区间$[20，25)$和$[30，35)$内为二等品，其余为次品．则样本中次品件数为_____.



答案：200

分析：结合频数分布直方图确定落在$[10，15，)$、$[15，20)$、$[35，40]$的人数由容量$\times\frac{频率}{组距}\times$组距求出.

解：样本容量为800，检测结果的频率分布直方图如图所示.

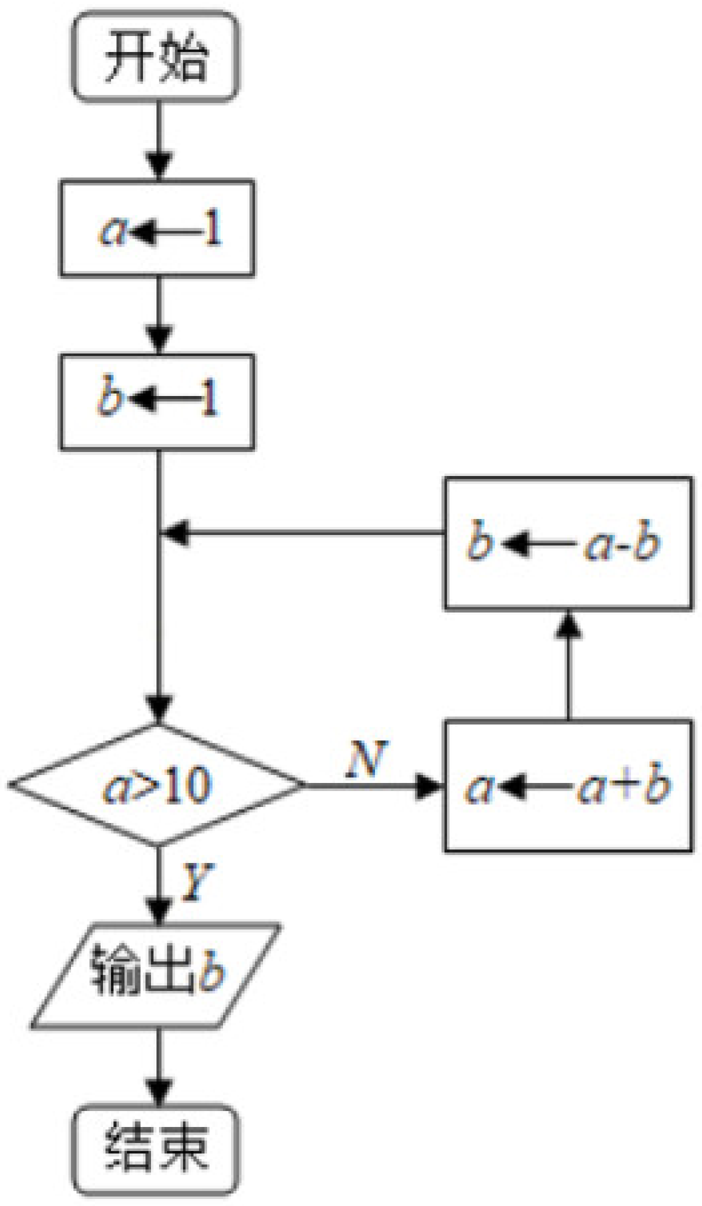
根据标准，单件产品质量在区间$[25，30)$内为一等品，在区间$[20，25)$和$[30，35)$内为二等品，

其余为次品．其件数为：$800\times(0.0125+0.0250+0.0125)\times 5=200$

故答案为：200

6. 如图是一个算法流程图，则输出的 b 的值为____.

答案：8



分析：根据程序框图进行模拟运算即可.

解：$a=1$，$b=1$，$a>10$ 否，$a=2$，$b=1$，

$a>10$ 否，$a=1+2=3$，$b=2-1=1$，

$a>10$ 否，$a=3+1=4$，$b=3-1=2$，

$a>10$ 否，$a=4+2=6$，$b=4-2=2$，

$a>10$ 否，$a=6+2=8$，$b=6-2=4$，

$a>10$ 否，$a=8+4=12$，$b=12-4=8$，

$a>10$ 是，输出 $b=8$，

故答案为：8

7.若抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点恰好是双曲线 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ 的右焦点，则 $p=$____.

分析：根据双曲线方程求出焦点坐标，根据抛物线的几何性质求得 p .

解：双曲线 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ 的右焦点是 $(3，0)$，

$\therefore$ 抛物线 $y^2=2px$ 的焦点为 $(3，0)$，$\therefore$ $\frac{p}{2}=3$，$\therefore$ $p=6$

故答案为：6

8. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\varphi)-\cos(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 是定义在 R 上的奇函数，则 $f(-\frac{\pi}{8})$ 的值为____.

答案：$-\sqrt{2}$

分析：利用辅助角公式进行化简，结合三角函数奇偶性的性质进行求解即可.

解：$f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\varphi)-\cos(2x+\varphi)=2\sin(2x+\varphi-\frac{\pi}{6})$，

$\because f(x)$是奇函数，

$\therefore \varphi-\frac{\pi}{6}=k\pi$，

即$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$，

$\because 0<\varphi<\pi$，$\therefore k=0$时，$\varphi=\frac{\pi}{6}$，

即$f(x)=2\sin 2x$，

则$f(-\frac{\pi}{8})=2\sin(-\frac{\pi}{4})=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$，

故答案为：$-\sqrt{2}$．

9. 已知数列$\{a_n\}$与$\{\frac{a_n^2}{n}\}$均为等差数列$(n\in N^*)$，且$a_1=2$，则$a_{10}=$____.

答案：20

分析：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d．又数列$\{\frac{a_n^2}{n}\}$均为等差数列$(n\in N^*)$，且$a_1=2$，可得

$2\times\frac{(2+d)^2}{2}=\frac{2^2}{1}+\frac{(2+2d)^2}{3}$，解得$d$，即可得出.

解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d．

又$\because$数列$\{\frac{a_n^2}{n}\}$均为等差数列$(n\in N^*)$，且$a_1=2$，

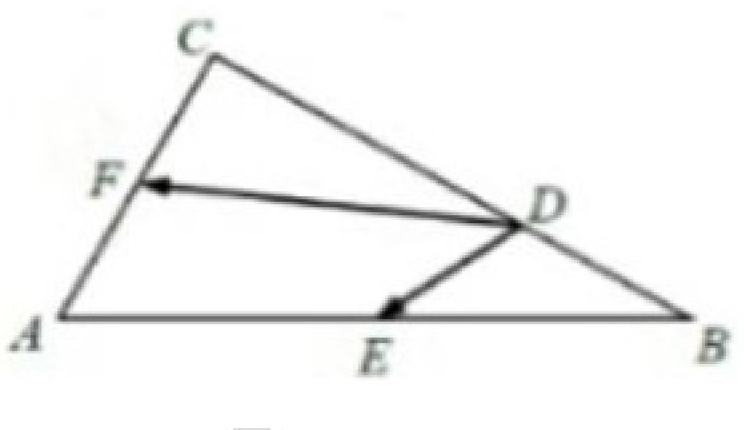
$\therefore 2\times\frac{(2+d)^2}{2}=\frac{2^2}{1}+\frac{(2+2d)^2}{3}$，

解得$d=2$．

则$a_{10}=2+9\times 2=20$．

故答案为：20.

10. 如图，在ΔABC中，$AB=4$，$AC=2$，$\angle BAC=60^\circ$，已知点E，F分别是边AB，AC的中点，点D在边BC上，若$\overrightarrow{DE}\bullet\overrightarrow{DF}=\frac{13}{4}$，则线段$BD$的长为____.



答案：$\frac{\sqrt{3}}{2}$

分析：先由平面向量数量积的运算可得：$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=4$，

再由余弦定理可得：$BC=2\sqrt{3}$，

然后设$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，结合平面向量的线性运算可得：

$\overrightarrow{DE}\bullet\overrightarrow{DF}=(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BD})\bullet(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF})=12\lambda^2-18\lambda+7=\dfrac{13}{4}$，解得：$\lambda=\dfrac{1}{4}$，即可得解.

解：因为在ΔABC中，$AB=4$，$AC=2$，$\angle BAC=60^\circ$，

所以$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=4$，

又在ΔABC中，由余弦定理可得：

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\bullet AC\bullet\cos\angle CAB$，

又$AB=4$，$AC=2$，$\angle BAC=60^\circ$，

得$BC=2\sqrt{3}$，

设$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

则$\overrightarrow{DE}\bullet\overrightarrow{DF}=(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BD})\bullet(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF})$

$=(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{BC})\bullet[(1-\lambda)\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC})$

$=[(\lambda-\dfrac{1}{2})\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{AC}]\bullet[(\dfrac{1}{2}-\lambda)\overrightarrow{AC}-(1-\lambda)\overrightarrow{AB}]$

$=(\lambda-\dfrac{1}{2})(\lambda-1)\overrightarrow{AB}^2-\lambda(\dfrac{1}{2}-\lambda)\overrightarrow{AC}^2-(2\lambda^2-2\lambda+\dfrac{1}{4})\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$

$=12\lambda^2-18\lambda+7$

$=\dfrac{13}{4}$，

解得：$\lambda=\dfrac{1}{4}$，

即$\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$，

即线段BD的长为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

11．已知点$A(-3,0)$，$B(-1,-2)$，若圆$(x-2)^2+y^2=r^2(r>0)$上恰有两点M，N，使得ΔMAB和ΔNAB的面积均为4，则r的取值范围是____.

答案：$(\dfrac{\sqrt{2}}{2}，\dfrac{9\sqrt{2}}{2})$

分析：求得$|AB|$的值，得出两点M，N到直线AB的距离相等，写出AB的直线方程，

根据圆上的点到直线 AB 的距离求出 r 的取值范围.

解：由题意可得 $|AB|=\sqrt{(-1+3)^2+(-2-0)^2}=2\sqrt{2}$，

根据 ΔMAB 和 ΔNAB 的面积均为 4，

可得两点 M，N 到直线 AB 的距离为 $2\sqrt{2}$；

由于 AB 的方程为 $\frac{y-0}{-2-0}=\frac{x+3}{-1+3}$，

即 $x+y+3=0$；

若圆上只有一个点到直线 AB 的距离为 $2\sqrt{2}$，

则有圆心 $(2,0)$ 到直线 AB 的距离为 $\frac{|2+0+3|}{\sqrt{2}}=r+2\sqrt{2}$，解得 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

若圆上只有 3 个点到直线 AB 的距离为 $2\sqrt{2}$，

则有圆心 $(2,0)$ 到直线 AB 的距离为 $\frac{|2+0+3|}{\sqrt{2}}=r-2\sqrt{2}$，解得 $r=\frac{9\sqrt{2}}{2}$；

综上，r 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{9\sqrt{2}}{2})$.

故答案为：$(\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{9\sqrt{2}}{2})$.

12. 已知函数 $f(x)=2x^2-3x-lnx+e^{x-a}+4e^{a-x}$，其中 e 为自然对数的底数，若存在实数 x_0 使 $f(x_0)=3$ 成立，则实数 a 的值为____.

答案：$1-ln2$

分析：令 $g(x)=2x^2-3x-lnx-3$，$h(x)=-e^{x-a}-4e^{a-x}$，求出 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的值域即可判断 x_0 的值，从而得出 a 的值.

解：令 $f(x)=3$ 可得：$2x^2-3x-lnx-3=-e^{x-a}-4e^{a-x}$，

令 $g(x)=2x^2-3x-lnx-3$，$h(x)=-e^{x-a}-4e^{a-x}$，

则 $g'(x)=4x-3-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-3x-1}{x}$，

令 $g'(x)=0$ 可得 $4x^2-3x-1=0$，即 $x=1$ 或 $x=-\frac{1}{4}$（舍），

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)\geqslant g$（1）$=-4$，

$h(x)=-e^{x-a}-4e^{a-x}=-(e^{x-a}+4e^{a-x})\leqslant-2\sqrt{e^{x-a}\bullet 4e^{a-x}}=-4$

（当且仅当 $e^{x-a}=4e^{a-x}$ 即 $x=a+ln2$ 时取等号），

$\because f(x_0)=3$，即 $g(x_0)=h(x_0)$，

$\therefore x_0=1=a+ln2$，

$\therefore a=1-ln2$.

故答案为：$1-ln2$.

13.已知函数 $f(x)=\begin{cases}2e\ln x, x>0\\ x^3+x, x\le 0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-ax^2$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是_____.

答案：$(0,1)\cup\{-2\}$

解：当 $x\le 0$ 时，由 $g(x)=0$ 得，$x^3-ax^2+x=0$，$\therefore x=0$ 或 $x^2-ax+1=0$ ①

$\therefore$当 $a<-2$ 时，在 $(-\infty,0]$ 上有三个根，当 $a=-2$ 时，在 $(-\infty,0]$ 上有两个根，当 $a>-2$ 时，在 $(-\infty,0]$ 上有一根

当 $x>0$ 时，由 $g(x)=0$ 得 $2e\ln x-ax^2=0$，则 $a=\dfrac{2e\ln x}{x^2}$ ②，

设 $h(x)=\dfrac{2e\ln x}{x^2}$（$x>0$），$h'(x)=\dfrac{2e(1-2\ln x)}{x^3}$

$\therefore$当 $x\in(0,\sqrt{e})$ 时，$h'(x)>0$，函数单调递增，

当 $x\in(\sqrt{e},+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，函数单调递减

可结合图像可知，$0<a<h(\sqrt{e})=1$ 时，方程②有两个根；当 $a=1$ 或 $a\le 0$ 时，方程②有一个根；当 $a>1$ 时，方程②没有实根，

综上：当 $0<a<1$ 或 $a=-2$ 时，$g(x)$ 有三个零点.

14. 在锐角三角形 ABC，AD 是边 BC 上的中线，且 $AD=AB$，则 $\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}$ 的最小值为____.

答案：$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

分析：不妨设 $BD=DC=1$，BC 边上的高为 h，则 $\tan B=2h$，$\tan C=\dfrac{2}{3}h$，再根据正切值求出 $\tan A$，然后用基本不等式可求得.

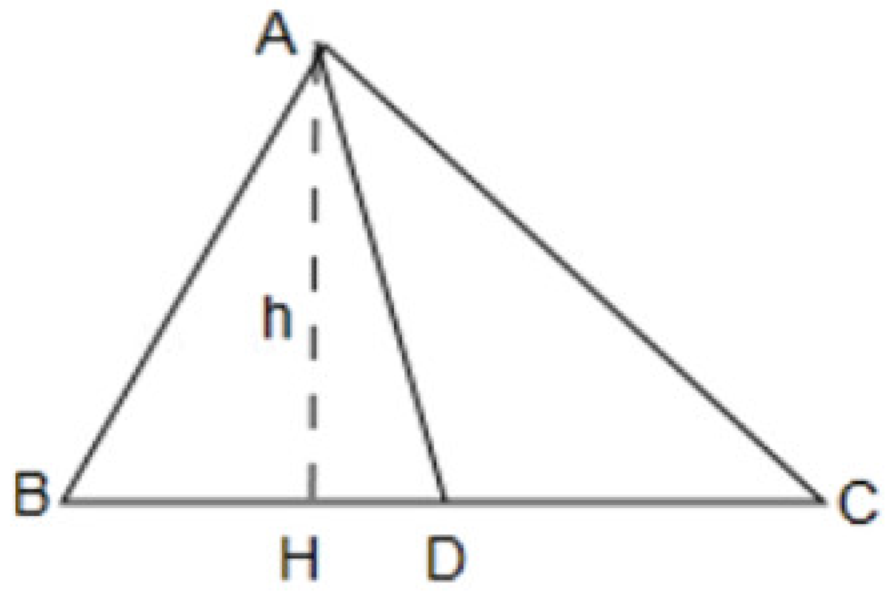
解：不妨设 $BD=DC=1$，BC 边上的高为 h，则 $\tan B=2h$，$\tan C=\frac{2}{3}h$，

从而 $\tan A=-\tan(B+C)=\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}=\dfrac{2}{1-\dfrac{3}{4h}}$，

所以 $\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{h}{2}+\dfrac{13}{8h}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{h}{2}\times\dfrac{13}{8h}}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，

（当且仅当 $\frac{h}{2}=\frac{13}{8h}$，即 $h=\frac{\sqrt{13}}{2}$ 时，取等）

故答案为：$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.



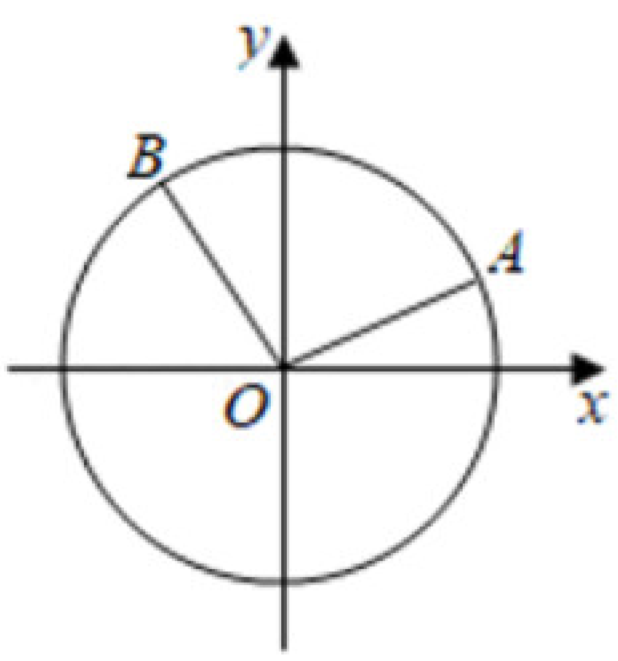
二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤

15. （本小题满分 14 分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，以 x 轴正半轴为始边的锐角 α 的终边与单位圆 O 交于点 A，且点 A 的纵坐标是 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

（1）求 $\cos(\alpha-\frac{3\pi}{4})$ 的值；

（2）若以 x 轴正半轴为始边的钝角 β 的终边与单位圆 O 交于点 B，且点 B 的横坐标为 $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，求 $\alpha+\beta$ 的值.



分析：（1）直接利用三角函数的定义的应用求出结果.

（2）利用三角函数的定义和角的变换的应用求出结果.

解：因为锐角 α 的终边与单位圆 O 交于点 A，且点 A 的纵坐标是 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

所以由任意角的三角函数的定义可知$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

从而$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin 2\alpha}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

（1）$\cos(\alpha-\dfrac{3\pi}{4})=\cos\alpha\cos\dfrac{3\pi}{4}+\sin\alpha\sin\dfrac{3\pi}{4}$，

$=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\times(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})+\dfrac{\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

（2）因为钝角β的终边与单位圆O交于点B，且点B的横坐标是$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，从而$\sin\beta=\sqrt{1-\cos 2\beta}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

于是$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}\times(-\dfrac{\sqrt{5}}{5})+\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因为α为锐角，β为钝角，所以$\alpha+\beta\in(\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{3\pi}{2})$，

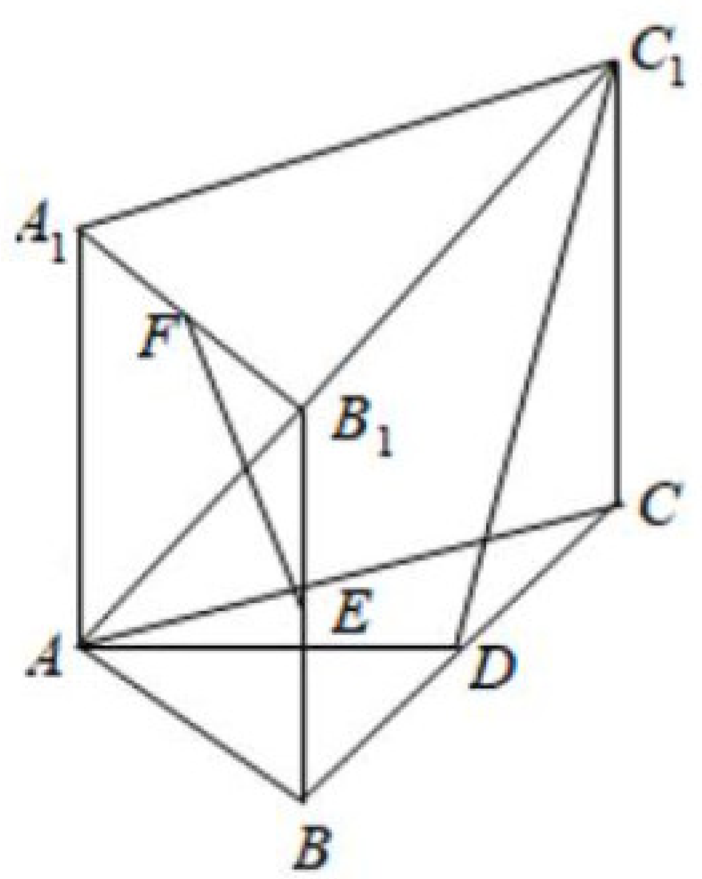
从而$\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.

16.（本小题满分 14 分）

如图，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，点D在棱BC上，$AD\perp C_1D$，点E，F分别是BB_1，A_1B_1的中点.

（1）求证：D为BC的中点；

（2）求证：$EF//$平面ADC_1.



分析：（1）推导出$CC_1\perp ABC$，$AD\perp CC_1$，从而$AD\perp$平面BCC_1B_1，进而$AD\perp BC$，由此能证明D为BC的中点.

（2）连结AC_1，A_1C，交于点O，连结DO，A_1B，推导出$OD//A_1B$，$EF//A_1B$，从而$EF//OD$，由此能证明$EF//$平面ADC_1.

证明：（1）$\because$在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，点D在棱BC上，$AD\perp C_1D$，

$\therefore CC_1 \perp ABC$，$\therefore AD \perp CC_1$，

$\because C_1D \bigcap CC_1 = C_1$，$\therefore AD \perp$平面$BCC_1B_1$，

$\therefore AD \perp BC$，$\therefore D$为BC的中点.

（2）连结AC_1，A_1C，交于点O，连结DO，A_1B，

$\because$正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，ACC_1A_1是矩形，$\therefore O$是A_1C的中点，

$\therefore OD // A_1B$，

$\because$点E，F分别是BB_1，A_1B_1的中点，$\therefore EF // A_1B$，

$\therefore EF // OD$，

$\because EF \not\subset$平面ADC_1，$DO \subset$平面ADC_1.

$\therefore EF //$平面ADC_1.

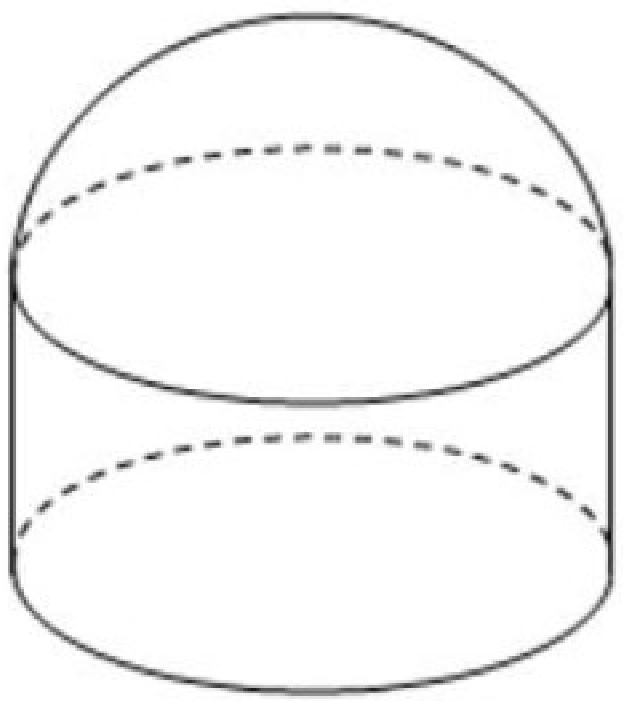
17.（本小题满分 14 分）

某市有一特色酒店由 10 座完全相同的帐篷构成（如图1）. 每座帐篷的体积为$54\pi m^3$，且分上下两层，其中上层是半径为$r(r \geqslant 1)$（单位：m）的半球体，下层是半径为rm，高为hm的圆柱体（如图2）. 经测算，上层半球体部分每平方米建造费用为 2 千元，下方圆柱体的侧面、隔层和地面三个部分平均每平方米建造费用为 3 千元设所有帐篷的总建造费用为y千元.

（1）求y关于r的函数解析式，并指出该函数的定义域；

（2）当半径r为何值时，所有帐篷的总建造费用最小，并求出最小值.

（图1）



（图2）

分析:（1）由图可知帐篷体积 = 半球体积 + 圆柱体积，即$\frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 54\pi$，表示出$h$，则$y = (2\pi r^2 \times 2 + 2\pi r^2 \times 3 + 2\pi rh \times 3) \times 10$，化简得$y = 60\pi(r^2 + \frac{54}{r})$；再由$\frac{54}{r^2} - \frac{2}{3}r > 0$，则$1 \leqslant r < 3\sqrt[3]{3}$，所以定义域为$\{r \mid 1 \leqslant r < 3\sqrt[3]{3}\}$， （2）$f(r)=r^2+\frac{54}{r}$，$1\leqslant r<3\sqrt[3]{3}$，根据导函数求出其最小值即可．

解：（1）由题意可得$\frac{2}{3}\pi r^3+\pi r^2h=54\pi$，所以$h=\frac{54}{r^2}-\frac{2}{3}r$，

所以$y=(2\pi r^2\times 2+2\pi r^2\times 3+2\pi rh\times 3)\times 10=100\pi r^2+60\pi r\cdot(\frac{54}{r^2}-\frac{2}{3}r)$，即$y=60\pi\times(r^2+\frac{54}{r})$；

因为$r\geqslant 1$，$h>0$，所以$\frac{54}{r^2}-\frac{2}{3}r>0$，则$1\leqslant r<3\sqrt[3]{3}$，所以定义域为$\{r\mid 1\leqslant r<3\sqrt[3]{3}\}$，

（2）设$f(r)=r^2+\frac{54}{r}$，$1\leqslant r<3\sqrt[3]{3}$，则$f'(r)=2r-\frac{54}{r^2}$，令$f'(r)=0$，解得$r=3$，

当$r\in[1，3)$时，$f'(r)<0$，$f(r)$单调递减；

当$r\in(3，3\sqrt[3]{3})$时，$f'(r)>0$，$f(r)$单调递增，

所以当$r=3$时，$f(r)$取极小值也是最小值，且$f(r)_{min}=1620\pi$．

答：当半径r为$3m$时，建造费用最小，最小为1620π千元．

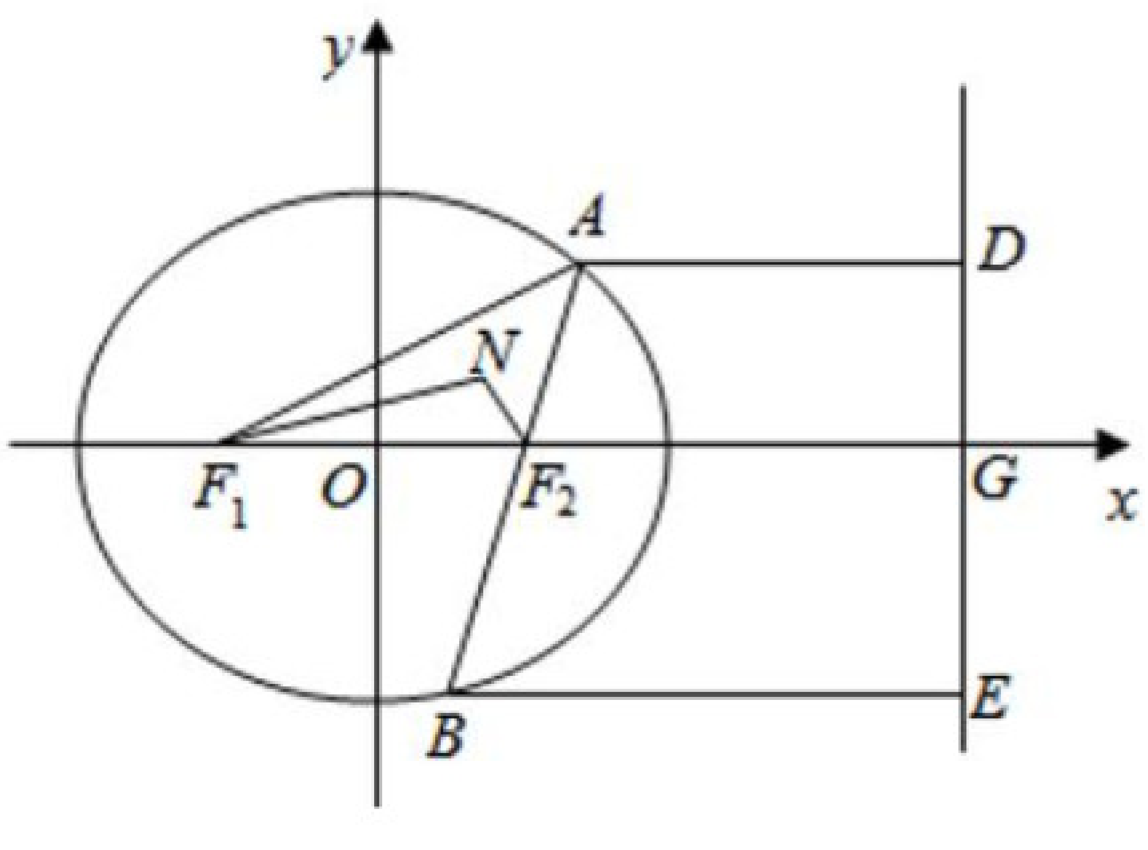
18．（本小题满分 16 分）

如图，已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，若椭圆$C$经过点$(0,\sqrt{3})$，离心率为$\frac{1}{2}$，直线$l$过点$F_2$与椭圆$C$交于$A$，$B$两点．

（1）求椭圆C的方程；

（2）若点N为△F_1AF_2的内心（三角形三条内角平分线的交点），求△F_1NF_2与△F_1AF_2面积的比值；

（3）设点A，F_2，B在直线$x=4$上的射影依次为点D，G，E．连结AE，BD，试问：当直线l的倾斜角变化时，直线AE与BD是否相交于定点T？若是，请求出定点T的坐标；若不是，请说明理由．



分析：（1）由题意知$b=\sqrt{3}$．$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，可得$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$a$即可得出椭圆$C$的方程．

（2）由点N为△F_1AF_2的内心，可得点N为△F_1AF_2的内切圆的圆心，设该圆的半径为r，

可得 $\dfrac{S_{\triangle F_1NF_2}}{S_{\triangle F_1AF_2}}=\dfrac{\frac{1}{2}|F_1F_2|\bullet r}{\frac{1}{2}(|AF_1|+|AF_2|+|F_1F_2|)\bullet r}$.

（3）若直线 l 的斜率不存在时，四边形 $ABED$ 是矩形，此时 AE 与 BD 交于 F_2G 的中点 $(\frac{5}{2},0)$．下面证明：当直线 l 的倾斜角变化时，直线 AE 与 BD 相交于定点 $T(\frac{5}{2},0)$．

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，与椭圆方程联立化简得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$．设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，由题意，得 $D(4,y_1)$，$E(4,y_2)$，则直线 AE 的方程为 $y-y_2=\frac{y_2-y_1}{4-x_1}(x-4)$．令 $x=\frac{5}{2}$，此时 $y=y_2+\frac{y_2-y_1}{4-x_1}(\frac{5}{2}-4)$，把根与系数关系代入可得 $y=0$，因此点 $T(\frac{5}{2},0)$ 在直线 AE 上．同理可证，点 $T(\frac{5}{2},0)$ 在直线 BD 上．即可得出结论．

解：（1）由题意知 $b=\sqrt{3}$．因为 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=2$，

所以椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）因为点 N 为△ F_1AF_2 的内心，

所以点 N 为△ F_1AF_2 的内切圆的圆心，设该圆的半径为 r，

则 $\dfrac{S_{\triangle F_1NF_2}}{S_{\triangle F_1AF_2}}=\dfrac{\frac{1}{2}|F_1F_2|\bullet r}{\frac{1}{2}(|AF_1|+|AF_2|+|F_1F_2|)\bullet r}=\dfrac{2c}{2a+2c}=\dfrac{c}{a+c}=\dfrac{1}{3}$.

（3）若直线 l 的斜率不存在时，四边形 $ABED$ 是矩形，

此时 AE 与 BD 交于 F_2G 的中点 $(\frac{5}{2},0)$．

下面证明：当直线 l 的倾斜角变化时，直线 AE 与 BD 相交于定点 $T(\frac{5}{2},0)$．

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，

联立 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 化简得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$．

因为直线 l 经过椭圆 C 内的点 $(1,0)$，所以△ >0．

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$．

由题意，得 $D(4,y_1)$，$E(4,y_2)$，则直线 AE 的方程为 $y-y_2=\frac{y_2-y_1}{4-x_1}(x-4)$．

令 $x=\frac{5}{2}$，此时 $y=y_2+\frac{y_2-y_1}{4-x_1}(\frac{5}{2}-4)=\frac{2(x_1-4)y_2+3(y_2-y_1)}{2(x_1-4)}$

$=\dfrac{2(x_1-4)k(x_2-1)+3k(x_2-x_1)}{2(x_1-4)}=\dfrac{8k+2kx_1x_2-5k(x_1+x_2)}{2(x_1-4)}$

$=\dfrac{8k+2k\bullet\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}-5k\bullet\dfrac{8k^2}{3+4k^2}}{2(x_1-4)}$

$=\dfrac{24k+32k^3+8k^3-24k-40k^3}{2(x_1-4)(3+4k^2)}=0$，

所以点 $T(\dfrac{5}{2},0)$ 在直线 AE 上.

同理可证，点 $T(\dfrac{5}{2},0)$ 在直线 BD 上.

所以当直线 l 的倾斜角变化时，直线 AE 与 BD 相交于定点 $T(\dfrac{5}{2},0)$.

19. （本小题满分 16 分）

设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 分别是各项为实数的无穷等差数列和无穷等比数列.

（1）已知 $b_1=1$，$b_2b_3-b_2+6=0$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和 S_n；

（2）已知 $a_2=2$，$a_4+a_7+a_{10}=21$，且数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前三项成等比数列，若数列 $\{b_n\}$ 唯一，求 b_1 的值.

（3）已知数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq 0)$，且 $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=(n-1)2^{n+1}+2$，求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式（用含 n，d 的式子表达）；

（1）解：设 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

则有 $q^3-q+6=0$，即 $(q+2)(q^2-2q+3)=0$；

解得 $q=-2$；

$\therefore\ S_n=\dfrac{1-(-2)^n}{3}$；

（2）$\because\{a_n\}$ 为等差数列，又 $\because\ a_2=2$，$a_4+a_7+a_{10}=21$

$\therefore 3a_7=21$，$a_7=7$，则公差 $d=1$，则 $a_n=n$

数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前三项成等比数列，即 $1+b_1$，$2+b_2$，$3+b_3$ 成等比，

$(2+b_2)^2=(1+b_1)(3+b_3)$，整理得 $1+b_1=b_3$

设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，显然 $b_1\neq 0$

则 $1+b_1=b_1q^2$，$b_1q^2-b_1-1=0$

$\because$ 数列 $\{b_n\}$ 唯一确定，

$\therefore \Delta = 0 + 4b_1(1+b_1) = 0$

解得：$b_1 = -1$ 或 $b_1 = 0$（舍）

即 $b_1 = -1$

（3）解：$\because a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = (n-1)2^{n+1} + 2 \ldots$ ①

$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{n-1}b_{n-1} = (n-2)2^n + 2 \ldots$ ②

$\therefore$ ①－②，得 $a_nb_n = n \bullet 2^n (n \geqslant 2)$；

$\because a_1b_1 = 2$；

$\therefore a_nb_n = n \bullet 2^n (n \in N^*) \ldots$ ③

$\therefore a_{n-1}b_{n-1} = (n-1)2^{n-1}(n \geqslant 2) \ldots$ ④

令③÷④，得 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \bullet q = \dfrac{2n}{n-1}(n \geqslant 2) \ldots$ ⑤；其中 q 是数列 $\{b_n\}$ 的公比；

$\therefore \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \bullet q = \dfrac{2(n-1)}{n-2}(n \geqslant 3) \ldots$ ⑥

令⑤÷⑥，得 $\dfrac{a_na_{n-2}}{a_{n-1}^2} = \dfrac{n(n-2)}{(n-1)^2}(n \geqslant 3)$；

$\therefore \dfrac{a_3a_1}{a_2} = \dfrac{3}{4}$，即 $\dfrac{(a_1+2d)a_1}{(a_1+d)^2} = \dfrac{3}{4}$；

解得 $a_1 = d$ 或 $a_1 = -3d$；

若 $a_1 = -3d$，则 $a_4 = 0$，有 $4 \times 2^4 = a_4b_4 = 0$，矛盾；

$\therefore a_1 = d$ 满足条件，此时 $a_n = dn$；$b_n = \dfrac{2^n}{d}$；

20.（本小题满分 16 分）

设 a 为实数，已知函数 $f(x) = axe^x\ (a \in R)$．

（1）当 $a < 0$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）设 b 为实数，若不等式 $f(x) \geqslant 2x^2 + bx$ 对任意的 $a \geqslant 1$ 及任意的 $x > 0$ 恒成立，求 b 的取值范围；

（3）若函数 $g(x) = f(x) + x + \ln x\ (x > 0)$ 有两个相异的零点，求 a 的取值范围．

分析：（1）根据导数和函数单调性的关系即可求出，

（2）分离参数，可得 $e^x - 2x \geqslant b$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立，构造函数 $\varphi(x) = e^x - 2x$，利用导数求出函数的最值即可求出 b 的范围，

（3）先求导，再分类讨论，根据导数和函数单调性以及最值得关系即可求出 a 的范围．

解：（1）当 $a<0$ 时，因为 $f'(x)=a(x+1)e^x$，当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x>-1$ 时，$f'(x)<0$．所以函数 $f(x)$ 单调减区间为 $(-\infty,-1)$，单调增区间为 $(-1,+\infty)$．

（2）由 $f(x)\geqslant 2x^2+bx$，得 $axe^x\geqslant 2x^2+bx$，由于 $x>0$，

所以 $ae^x\geqslant 2x+b$ 对任意的 $a\geqslant 1$ 及任意的 $x>0$ 恒成立．

由于 $e^x>0$，所以 $ae^x\geqslant e^x$，所以 $e^x-2x\geqslant b$ 对任意的 $x>0$ 恒成立．

设 $\varphi(x)=e^x-2x$，$x>0$，则 $\varphi'(x)=e^x-2$，

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,\ ln\ 2)$ 上单调递减，在 $(ln\ 2,\ +\infty)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(x)_{min}=\varphi(ln\,2)=2-2ln\,2$，

所以 $b\leqslant 2-2ln\,2$．

（3）由 $g(x)=axe^x+x+\ln x$，得 $g'(x)=a(x+1)e^x+1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x+1)(axe^x+1)}{x}$，其中 $x>0$．

①若 $a\geqslant 0$ 时，则 $g'(x)>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $g(x)$ 至多有一个零点，不合题意；

②若 $a<0$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $xe^x=-\dfrac{1}{a}>0$．

由第（2）小题知，当 $x>0$ 时，$\varphi(x)=e^x-2x\geqslant 2-2ln\ \ 2>0$，所以 $e^x>2x$，所以 $xe^x>2x^2$，

所以当 $x>0$ 时，函数 xe^x 的值域为 $(0,+\infty)$．

所以存在 $x_0>0$，使得 $ax_0ex_0+1=0$，即 $ax_0ex_0=-1$　①，

且当 $x<x_0$ 时，$g'(x)>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,\ +\infty)$ 上单调递减．

因为函数有两个零点 x_1，x_2，

所以 $g(x)_{max}=g(x_0)=ax_0ex_0+x_0+ln\ x_0=-1+x_0+ln\ x_0>0$　②．

设 $\varphi(x)=-1+x+\ln x$，$x>0$，则 $\varphi'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

由于 $\varphi(1)=0$，所以当 $x>1$ 时，$\varphi(x)>0$，所以②式中的 $x_0>1$．

又由①式，得 $x_0ex_0=-\dfrac{1}{a}$．

由第（1）小题可知，当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $-\dfrac{1}{a}>e$，

即 $a\in(-\dfrac{1}{e},\ 0)$．

(i) 由于 $g(\dfrac{1}{e})=\dfrac{ae^{\frac{1}{e}}}{e}+(\dfrac{1}{e}-1)<0$，所以 $g(\dfrac{1}{e})\bullet g(x_0)<0$．

因为$\frac{1}{e}<1<x_0$，且函数$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，函数$g(x)$的图象在$(0,x_0)$上不间断，

所以函数$g(x)$在$(0,x_0)$上恰有一个零点；

(ii) 由于$g(-\frac{1}{a})=-e-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+ln(-\frac{1}{a})$，令$t=-\frac{1}{a}>e$，

设$F(t)=-e^t+t+ln\,t$，$t>e$，

由于$t>e$时，$ln\,t<t$，$e^t>2t$，所以设$F(t)<0$，即$g(-\frac{1}{a})<0$.

由①式，得当$x_0>1$时，$-\frac{1}{a}=x_0ex_0>x_0$，且$g(-\frac{1}{a})\bullet g(x_0)<0$，

同理可得函数$g(x)$在$(x_0，+\infty)$上也恰有一个零点.

综上，$a\in(-\frac{1}{e}，0)$.