秘密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

2023年茂名市高三级第二次综合测试

数学试卷

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号填写在答题卡指定的位置上。
2. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，擦干净后，再选涂其它答案，答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将答题卡交回。

一、单选题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{x||x|\le 1\}$，$B=\{x|2x-a<0\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是

A．$(2,+\infty)$　　B．$[2,+\infty)$　　C．$(-\infty,2)$　　D．$(-\infty,2]$

2．若复数 z 满足 $i\cdot z=4+3i$，则 $|z|=$

A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．3　　D．5

3．已知平面 α，直线 m,n 满足 $m\not\subset\alpha,n\subset\alpha$，则 $m//n$ 是 $m//\alpha$ 的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．从1、2、3、4、5中任选3个不同数字组成一个三位数，则该三位数能被3整除的概率为

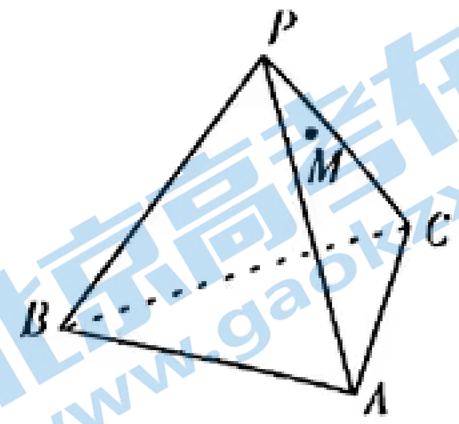
A．$\frac{1}{10}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{3}{10}$　　D．$\frac{2}{5}$

5．已知平面 xoy 内的动点 P，直线 l：$x\sin\theta+y\cos\theta=1$，当 θ 变化时点 P 始终不在直线 l 上，点 Q 为 $\odot C$：$x^2+y^2-8x-2y+16=0$ 上的动点，则 $|PQ|$ 的取值范围为

A．$(\sqrt{17}-2,\sqrt{17})$　　B．$(\sqrt{17}-2,\sqrt{17}+2]$　　C．$[\sqrt{17}-2,\sqrt{17}+2)$　　D．$(\sqrt{17}-2,\sqrt{17}+2)$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

6. 如图所示，正三棱锥 $P-ABC$，底面边长为 2，点 P 到平面 ABC 距离为 2，点 M 在平面 PAC 内，且点 M 到平面 ABC 的距离是点 P 到平面 ABC 距离的 $\frac{2}{3}$，过点 M 作一个平面，使其平行于直线 PB 和 AC，则这个平面与三棱锥表面交线的总长为



A. $\frac{24+16\sqrt{3}}{9}$　B. $\frac{12+16\sqrt{3}}{9}$　C. $\frac{12+8\sqrt{3}}{9}$　D. $\frac{24+8\sqrt{3}}{9}$

7. 黎曼函数 $R(x)$ 是由德国数学家黎曼发现并提出的，它是一个无法用图象表示的特殊函数，此函数在高等数学中有着广泛的应用，$R(x)$ 在 $[0,1]$ 上的定义为：当 $x=\frac{q}{p}$（$p>q$，且 p，q 为互质的正整数）时，$R(x)=\frac{1}{p}$；当 $x=0$ 或 $x=1$ 或 x 为 $(0,1)$ 内的无理数时，$R(x)=0$，则下列说法错误的是

A. $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $\frac{1}{2}$

B. 若 $a,b\in[0,1]$，则 $R(a\cdot b)\geq R(a)\cdot R(b)$

C. 存在大于 1 的实数 m，使方程 $R(x)=\frac{m}{m+1}$（$x\in[0,1]$）有实数根

D. $\forall x\in[0,1], R(1-x)=R(x)$

8. 已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+4\cos^2 x-1$，若实数 a、b、c 使得 $af(x)-bf(x+c)=3$ 对任意的实数 x 恒成立，则 $2a+b-\cos c$ 的值为

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{3}{2}$　C. 2　D. $\frac{5}{2}$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 小爱同学在一周内自测体温（单位：℃）依次为 36.4, 36.2, 36.1, 36.5, 36.3, 36.6, 36.3，则该组数据的

A. 平均数为 36.3　　B. 方差为 0.04

C. 中位数为 36.3　　D. 第 80 百分位数为 36.55

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

10．已知 O 为坐标原点，椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，椭圆的上顶点和右顶点分别为 A、B，点 P、Q 都在 C 上，且 $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{OQ}$，则下列说法正确的是

A．ΔPQF_2 周长的最小值为 14

B．四边形 PF_1QF_2 可能是矩形

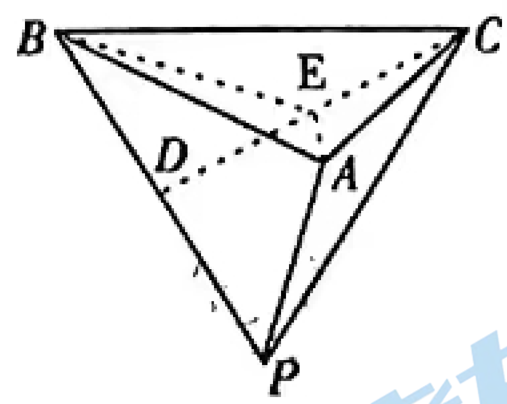
C．直线 PB，QB 的斜率之积为定值 $-\frac{9}{16}$

D．ΔPQF_2 的面积最大值为 $3\sqrt{7}$

11．已知 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1 & x<0\\ \frac{x}{e^x} & x\geq 0\end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $4ef^2(x)-af(x)+\frac{1}{e}=0$ 恰好有6个不同的实数解，则 a 的取值可以是

A．$\frac{17}{4}$　　B．$\frac{19}{4}$　　C．$\frac{21}{4}$　　D．$\frac{23}{4}$

12．如图所示，有一个棱长为 4 的正四面体 $P-ABC$ 容器，D 是 PB 的中点，E 是 CD 上的动点，则下列说法正确的是



A．若 E 是 CD 的中点，则直线 AE 与 PB 所成角为 $\frac{\pi}{2}$

B．ΔABE 的周长最小值为 $4+\sqrt{34}$

C．如果在这个容器中放入 1 个小球（全部进入），则小球半径的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D．如果在这个容器中放入 10 个完全相同的小球（全部进入），则小球半径的最大值为 $\sqrt{6}-2$

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

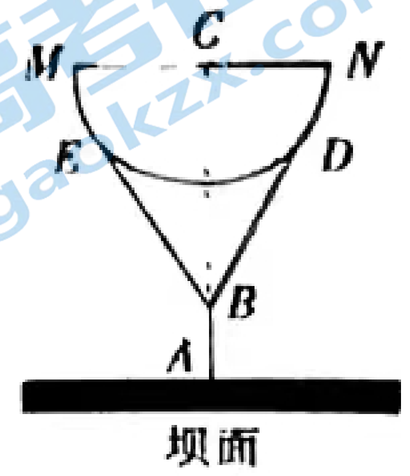
13．已知实数 a,b 满足 $\lg a+\lg b=\lg(a+2b)$，则 $a+b$ 的最小值是

14．已知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，且 $x\leq 1$ 时，$f(x)=e^x+x-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2, f(2))$ 处的切线方程为

15．已知抛物线 $y^2=6x$ 的焦点为 F，准线为 l，过 F 的直线与抛物线交于点 A、B，与直线 l 交于点 D，若 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$ $(\lambda>1)$ 且 $|\overrightarrow{BD}|=4$，则 $\lambda=$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

16. 修建栈道是提升旅游观光效果的一种常见手段. 如图，某水库有一个半径为1百米的半圆形小岛，其圆心为C且直径MN平行坝面. 坝面上点A满足$AC\perp MN$，且AC长度为3百米，为便于游客到小岛观光，打算从点A到小岛建三段栈道AB、BD与BE，水面上的点B在线段AC上，且BD、BE均与圆C相切，切点分别为D、E，其中栈道AB、BD、BE和小岛在同一个平面上. 此外在半圆小岛上再修建栈道ME、DN以及MN，则需要修建的栈道总长度的最小值为______百米.



四、解答题：共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. （10分）已知数列$\{a_n\}$的前$n(n\in N^*)$项和S_n满足$S_{n+1}+S_n=2(n+1)^2$，且$a_1=1$

(1) 求a_2,a_3,a_4；

(2) 若S_n不超过240，求n的最大值.

18. （12分）在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且满足$\tan B=\dfrac{\sin(C+\frac{\pi}{3})}{\sin(C-\frac{\pi}{3})}$

(1) 求A；

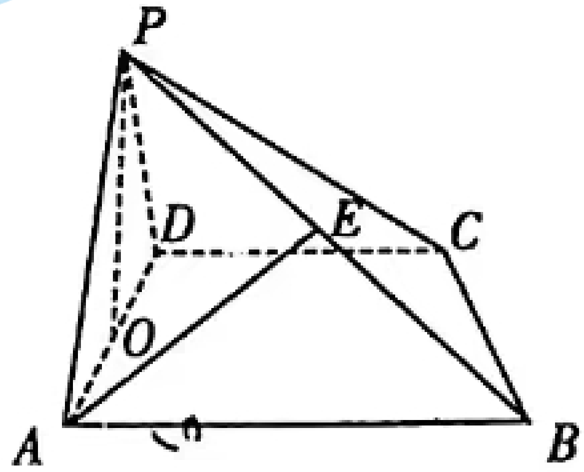
(2) 若D为边BC上一点，且$2CD=AD=BD$，试判断ΔABC的形状.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx) 获取更多试题资料及排名分析信息。

19.（12分）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=PD$，O 为 AD 的中点.

(1) 求证：$PO\perp BC$；

(2) 若 $AB//CD$，$AB=8$，$AD=DC=CB=4$，$PO=2\sqrt{7}$，点 E 在棱 PB 上，直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\frac{\pi}{6}$，求点 E 到平面 PCD 的距离.



20.（12分）已知 F_1，F_2 分别为双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，P 为渐近线上一点，且 $\sqrt{3}|PF_1|=\sqrt{7}|PF_2|$，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

(1) 求双曲线的离心率；

(2) 若双曲线 E 实轴长为2，过点 F_2 且斜率为 k 的直线 l 交双曲线 C 的右支不同的 A,B 两点，Q 为 x 轴上一点且满足 $|QA|=|QB|$，试探究 $\frac{2|QF_2|}{|AF_1|+|BF_1|-4}$ 是否为定值，若是，则求出该定值；若不是，请说明理由.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

21.（12 分）已知函数 $f(x)=\frac{\text{[illegible]}}{2}+\ln x-2ax$，$a$ 为常数，且 $a>0$.

(1) 判断 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $0<a<1$ 时，如果存在两个不同的正实数 m,n 且 $f(m)+f(n)=1-4a$，证明：$m+n>2$.

22.（12 分）马尔可夫链是因俄国数学家安德烈·马尔可夫得名，其过程具备“无记忆”的性质，即第 $n+1$ 次状态的概率分布只跟第 n 次的状态有关，与第 $n-1,n-2,n-3,\cdots$ 次状态是“没有任何关系的”．现有甲、乙两个盒子，盒子中都有大小、形状、质地相同的 2 个红球和 1 个黑球．从两个盒子中各任取一个球交换，重复进行 $n\ (n\in N^*)$ 次操作后，记甲盒子中黑球个数为 X_n，甲盒中恰有 1 个黑球的概率为 a_n，恰有 2 个黑球的概率为 b_n.

(1) 求 X_1 的分布列；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3) 求 X_n 的期望.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

数学答案

一、单选题

1	2	3	4	5	6	7	8
A	D	A	D	D	B	C	B

5. 【提示】由原点O到直线l：$x\sin\theta+y\cos\theta=1$的距离为$d=\dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=1$

可知直线l是$\odot O:x^2+y^2=1$的切线，又动直线始终没有经过点P，所以点P在该圆内，

因为点Q为$\odot C:x^2+y^2-8x-2y+16=0$上的动点，且$C(4,1),r=1$

$\therefore |OC|-2<|PQ|<|OC|+2$，即$|PQ|$的取值范围为$(\sqrt{17}-2,\sqrt{17}+2)$.

7. 【提示】解：设$A=\left\{x\middle|x=\dfrac{q}{p}\right\}$，（$p>q$，且$p$，$q$为互质的正整数），$B=\{x|x=0$或$x=1$或$x$是$[0，1]$上的无理数$\}$，

对于A选项：由题意，$R(x)$的值域为$\left\{0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{p},\cdots\right\}$，其中$p$是大于等于2的正整数，

故选项A正确；

对于B选项：①若a，$b\in(0,1]$，设$a=\dfrac{q}{p},b=\dfrac{n}{m}$($p,q$互质，$m,n$互质)，$a\cdot b=\dfrac{q}{p}\cdot\dfrac{n}{m}\geq\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{1}{m}$，则$R(a\cdot b)\geq R(a)\cdot R(b)$；

②若a,b有一个为0，则$R(a\cdot b)\geq R(a)\cdot R(b)=0$；

所以选项B正确；

对于C选项：若n为大于1的正数，则$\dfrac{n}{n+1}\neq\dfrac{1}{2}$，而$R(x)$的最大值为$\dfrac{1}{2}$，所以该方程不可能有实根．故选项$C$错误；

对于D $x=0,1$和$(0,1)$内的无理数，则$R(x)=0,R(1-x)=0,R(x)=R(1-x)$，若$x$为$(0,1)$内的有

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

理数，设 $x=\frac{q}{p}$（p,q 为正整数，$\frac{q}{p}$ 为最简真分数），则 $R(x)=R(1-x)=\frac{1}{p}$，故选项 D 正确.

8.【提示】由题设可得 $f(x)=\sin 2x+2\cos 2x+1=\sqrt{5}\sin(2x+\varphi)+1$

$f(x+c)=\sqrt{5}\sin(2x+\varphi+2c)+1$ 其中 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，且 $\tan\varphi=2$，

于是可化为 $\sqrt{5}a\sin(2x+\varphi)-\sqrt{5}b\sin(2x+\varphi+2c)+a-b=3$

即 $\sqrt{5}a\sin(2x+\varphi)-\sqrt{5}b\sin(2x+\varphi+2c)+(a-b-3)=0$

所以 $\sqrt{5}(a-b\cos 2c)\sin(2x+\varphi)-\sqrt{5}b\sin 2c\cos(2x+\varphi)+(a-b-3)=0$

由已知条件，上式对任意 $x\in R$ 恒成立，故必有 $\begin{cases} a-b\cos 2c=0 & (1) \\ b\sin 2c=0 & (2) \\ a-b-3=0 & (3) \end{cases}$

若 $b=0$，则由式①知 $a=0$，显然不满足式③.故 $b\neq 0$
所以，由式②知 $\sin 2c=0$，则 $\cos 2c=\pm 1$
当 $\cos 2c=1$ 时，则式①，③矛盾.

所以 $\cos 2c=-1$ 由式①，③知 $a=-b=\frac{3}{2}$，所以 $2a+b-\cos c=\frac{3}{2}$

（法二）因为 $f(x)=\sin 2x+2\cos 2x+1=\sqrt{5}\sin(2x+\varphi)+1$ 为中心对称函数，对称中心的纵坐标为 1，从 $af(x)-bf(x+c)=3$ 恒成立，可以看出 $a=-b=\frac{3}{2}$，故 c 的可能一个取值为 $\frac{\pi}{2}$,所以 $2a+b-\cos c=\frac{3}{2}$

二、多选题

9	10	11	12
AC	ACD	AB	ACD

10. 【提示】由 $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{OQ}$，可知 P,Q 关于原点对称.

对于 A. 根据椭圆的对称性，$|PQ|+|PF_1|+|QF_1|=|PQ|+|PF_2|+|PF_1|=|PQ|+8$，当 PQ 为椭圆的短轴时，$|PQ|$ 有最小值 6，所以 ΔPQF_1 周长的最小值为 14，正确；

对于 B. 因为 $\tan\angle F_1AO=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{7}}{3}$，所以 $\angle F_1AO<\frac{\pi}{4}$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

则 $\angle F_1AF_2 < \dfrac{\pi}{2}$，故椭圆上不存在点 P，使得 $\angle F_1PF_2 = \dfrac{\pi}{2}$，

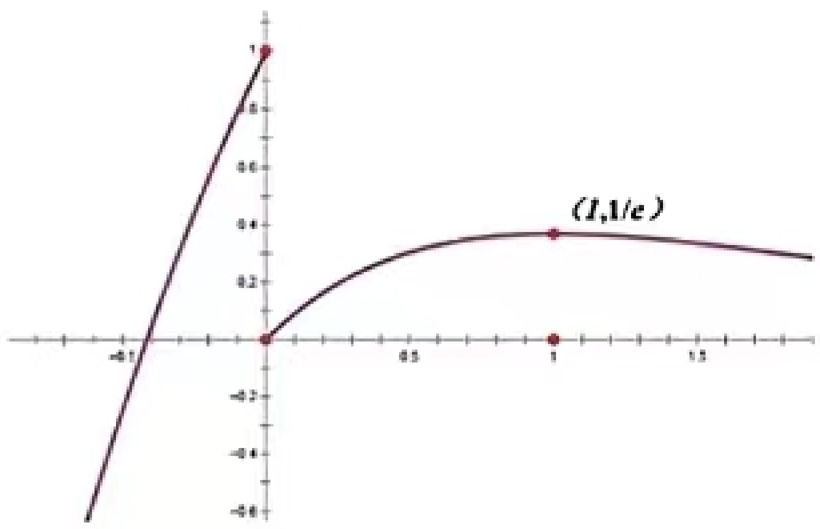
又四边形 PF_1QF_2 是平行四边形，所以四边形 PF_1QF_2 不可能是矩形，故 B 不正确.

对于 C．由题意得 $B(4,0)$，设 $P(x,y)$，则 $Q(-x,-y)$，

所以 $k_{PB}\cdot k_{QB} = \dfrac{y}{x-4}\cdot\dfrac{-y}{(-x)-4} = \dfrac{y^2}{x^2-16} = \dfrac{9\left(1-\dfrac{x^2}{16}\right)}{x^2-16} = -\dfrac{9}{16}$，故 C 正确；

对于 D．设 $\triangle PF_2Q$ 的面积为

$S = \dfrac{1}{2}|OF||y_P - y_Q| \le \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 6 = 3\sqrt{7}$.



11．【提示】记 $g(x) = \dfrac{x}{e^x}$，则 $g'(x) = \dfrac{1-x}{e^x}$

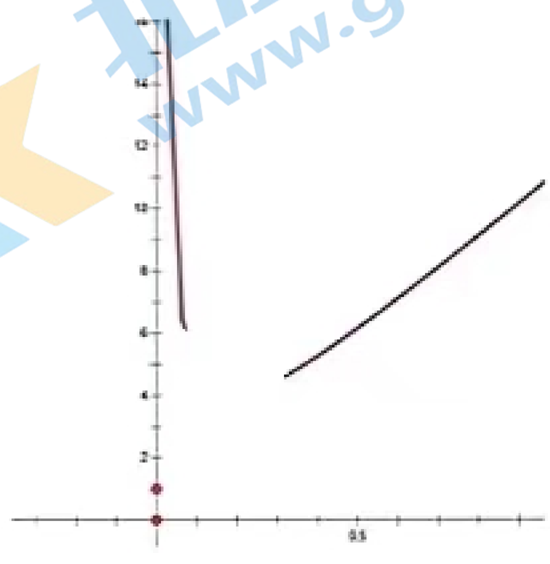
所以 $g(x)$ 在 $[0,1)$ 单调增，在 $(1,+\infty)$ 单调减

所以 $f(x)$ 的大致图像如下所示：

所以关于 x 的方程 $4ef^2(x) - af(x) + \dfrac{1}{e} = 0$ 有 6 个不同实根等价于关于 t 方程 $4et^2 - at + \dfrac{1}{e} = 0$ 在 $t \in (0,\dfrac{1}{e})$ 内有 2 个不等实根

即 $h(t) = 4et + \dfrac{1}{et}$ 与 $y = a$ 在 $t \in (0,\dfrac{1}{e})$ 内有 2 个不同交点

又 $h(t) = 4et + \dfrac{1}{et}$ 的大致图像如下所示：



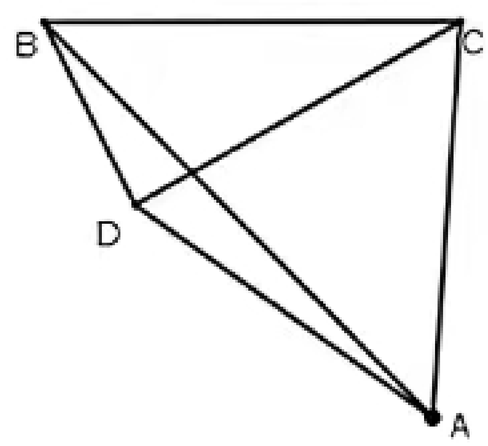
又 $h(\dfrac{1}{2e}) = 4$ ，$h(\dfrac{1}{e}) = 5$

所以 $a \in (4,5)$

12．【提示】A 选项，直线 $PB \perp$ 平面 ACD，$PB \perp AE$；A 选项正确

B 选项，把 $\triangle ACD$ 沿着 CD 展开与面 BDC 同一个平面内，由

$AD = CD = 2\sqrt{3}, AC = 4$，$\cos\angle ADC = \dfrac{1}{3}$



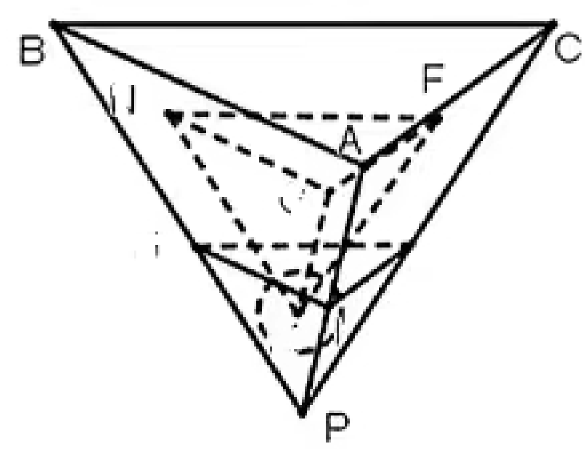
关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息

$$\cos\angle ADB=\cos(\frac{\pi}{2}+\angle ADC)=-\sin\angle ADC=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\therefore AB^2=2^2+(2\sqrt{3})^2-2\times2\times2\sqrt{3}\times(-\frac{2\sqrt{2}}{3})=16+\frac{16\sqrt{6}}{3}\neq34$ ，B 选项错误

C 选项，要使小球半径最大，则小球与四个面相切，是正四面体的内切球，半径为

$\frac{\sqrt{6}}{12}a=\frac{\sqrt{6}}{3}$($a$为棱长)，C 选项正确



D 选项，10 个小球分三层（1 个，3 个，6 个）放进去，要使小球半径要最大，则外层小球与四个面相切，设小球半径为 r，四个角小球球心连线 $M-NGF$ 是棱长为 $4r$ 的正四面体，其高为 $\frac{4\sqrt{6}}{3}r$，由正四面体内切球的半径是高的 $\frac{1}{4}$ 得，

如图正四面体 $P-HIJ$，则 $MP=3r$，正四面体 $P-ABC$ 高为 $3r+\frac{4\sqrt{6}}{3}r+r=\frac{\sqrt{6}}{3}\times4$，得

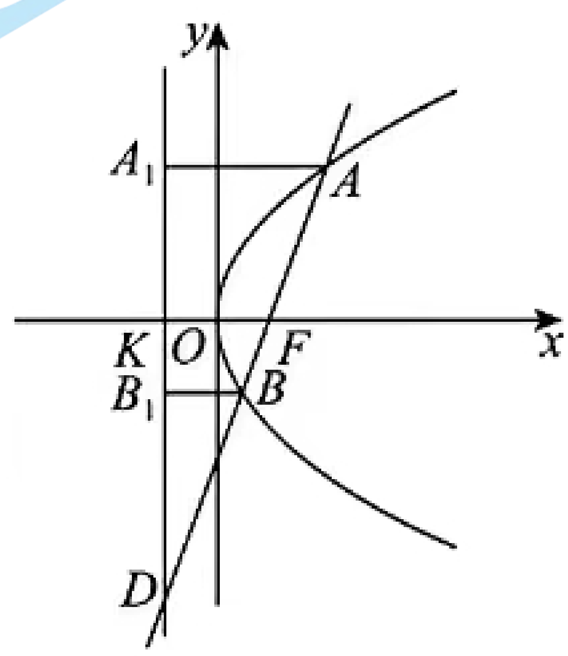
$r=\sqrt{6}-2$. D 选项正确

三、填空题：

13. 【答案】$3+2\sqrt{2}$

14. 【答案】$2x+y-4=0$

15. 【答案】3



【提示】如图，设准线与 x 轴的交点为 K，作 $AA_1\perp l$，$BB_1\perp l$ 垂足分别为 A_1，B_1，

则 $BB_1//FK//AA_1$，根据抛物线定义知

$|BB_1|=|BF|$，$|AA_1|=|AF|$，

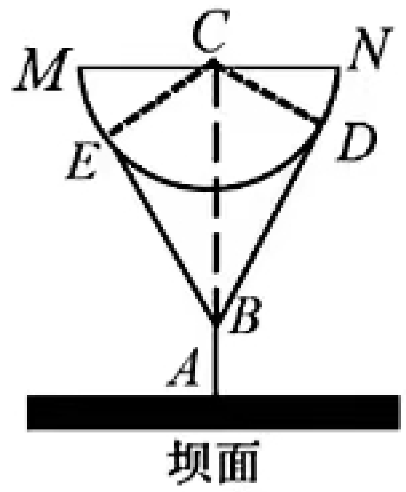
设 $\angle DBB_1=\theta$，因为 $BB_1//FK//AA_1$，所以 $\angle FAA_1=\angle KFD=\angle DBB_1=\theta$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$\therefore \cos\theta = \frac{BB_1}{BD} = \frac{AA_1}{AD} = \frac{KF}{FD}$.

设$|BF| = a$，所以$\cos\theta = \frac{a}{4} = \frac{3}{4+a} = \frac{\lambda a}{4+(\lambda+1)a}$，所以$\lambda = 3$

16. 【答案】$\frac{2\pi}{3}+5$



【提示】：(1) 连CD，CE，由半圆半径为1得

记$\angle CBE = \angle CBD = \theta$，又$CD \perp BD$，$CE \perp BE$，

$BE = BD = \frac{CD}{\tan\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$，$BC = \frac{CD}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}$，

则$\angle MCE = \angle NCD = \theta$，

所以$\overset{\frown}{ME} = \overset{\frown}{ND}$的长为$\theta$.

又$AC = 3$，故$AB = AC - BC = 3 - \frac{1}{\sin\theta} \geq 0$，$\sin\theta \geq \frac{1}{3}$，即$\sin\theta_0 = \frac{1}{3}$，$\theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，

所以，$f(\theta) = 5 - \frac{1}{\sin\theta} + \frac{2}{\tan\theta} + 2\theta$，$\theta \in \left[\theta_0, \frac{\pi}{2}\right)$，则$\sin\theta \in \left[\frac{1}{3}, 1\right)$；

所以$f'(\theta) = \frac{-\cos\theta(2\cos\theta - 1)}{\sin^2\theta}$.

θ	$\left(\theta_0, \frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$	$-$	0	+
$f(\theta)$	单调递减	极小值	单调递增

所以栈道总长度最小值$f(\theta)_{\min} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + 5$.

四、解答题：共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

17．解：(1)当$n=1$时，$S_2+S_1=a_2+2a_1=2(1+1)^2=8$，$a_2=6$…………1 分

当$n=2$时，$S_3+S_2=a_3+2a_2+2a_1=2(2+1)^2=18$，$a_3=4$…………2 分

当$n=3$时，$S_4+S_3=a_4+2a_3+2a_2+2a_1=2(3+1)^2=32$，$a_4=10$…………3 分

(2)$\because S_{n+1}+S_n=2(n+1)^2$①，

$\therefore$当$n=1$时，$S_2+S_1=2\times2^2=8$，又$a_1=1$，则$S_2=8-S_1=8-a_1=7$，…………4 分

当$n\geq2$时，$S_n+S_{n-1}=2n^2$②，

①-②可得：$S_{n+1}-S_{n-1}=4n+2$，…………5 分

当$n\ (n>2)$为偶数时，$S_n-S_2=(4\times4-2)+(4\times6-2)+\cdots+(4n-2)$

$=\dfrac{[14+(4n-2)]}{2}\cdot(\dfrac{n}{2}-1)=n^2+n-6$

$\therefore S_n=n(n+1)+1$…………7 分

当$n\ (n>2)$为奇数时，$S_n-S_1=(4\times3-2)+(4\times5-2)+\cdots+(4n-2)$

$=\dfrac{[10+(4n-2)]}{2}\cdot\dfrac{n-1}{2}=n^2+n-2$

$\therefore S_n=n(n+1)-1$…………8 分

由$15\times16-1=239<240$，$16\times17+1=273>240$得，…………9 分

n的最大取值为 15．…………10 分

法二：$\because S_{n+1}+S_n=2(n+1)^2$①，

$\therefore$当$n=1$时，$S_2+S_1=2\times2^2=8$，又$a_1=1$，则$S_2=8-S_1=8-a_1=7$，…………4 分

当$n\geq2$时，$S_n+S_{n-1}=2n^2$②，

①-②可得：$S_{n+1}-S_{n-1}=4n+2$，…………5 分

可得：$a_{n+1}+a_n=4n+2$③，故$a_{n+2}+a_{n+1}=4(n+1)+2=4n+6$④，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

④-③可得：$a_{n+2}-a_n=4$，$n\geq 2$，

当 $n=1$ 时，$S_2+S_1=2\times 2^2=8$，即 $2a_1+a_2=8$，$a_2=6$

$\therefore\{a_n\}$ 的偶数项组成一个等差数列，公差为 4，

且从第 3 项起，$\{a_n\}$ 所有的奇数项也组成一个等差数列，公差为 4，…………6 分

当 n 为偶数时，$S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n$

$$=1+6\times\frac{n}{2}+\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)}{2}\times 4+4\times(\frac{n}{2}-1)+\frac{(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)}{2}\times 4$$

$=n(n+1)+1$ …………7 分

当 n 为奇数时，$S_n=S_{n-1}+a_n=n(n-1)+1+[4+(\frac{n-1}{2}-1)\times 4]=n(n+1)-1$ …………8 分

由 $15\times 16-1=239<240$，$16\times 17+1=273>240$ 得，…………9 分

n 的最大取值为 15. …………10 分

18. （1）由 $\tan B=\dfrac{\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)}$ 得 $\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)}$

$\sin B\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\cos B\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)$ ……………………1 分

所以 $\sin B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C-\frac{1}{2}\cos C\right)=\cos B\left(\frac{1}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\right)$

所以 $\sin B\left(\sqrt{3}\sin C-\cos C\right)=\cos B\left(\sin C+\sqrt{3}\cos C\right)$ ………………2 分

所以 $\sin C\cos B+\cos C\sin B+\sqrt{3}\left(\cos C\cos B-\sin C\sin B\right)=0$

所以 $\sin(B+C)+\sqrt{3}\cos(B+C)=0$ ……………………3 分

所以 $\tan(B+C)=-\sqrt{3}$，即 $\tan A=\sqrt{3}$ ……………………4 分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

因为$A\in(0,\ \pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$.　……………………………5 分

法一：（2）设$\angle BAD=\theta,\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，则$\angle ADC=2\theta,\angle DAC=\dfrac{\pi}{3}-\theta,\angle ACD=\dfrac{2\pi}{3}-\theta$，…7 分

在$\triangle ADC$中，由正弦定理知$\dfrac{AD}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{DC}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}$，　……………9 分

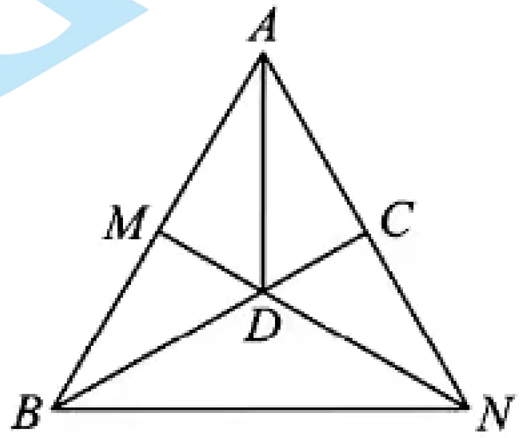
即$2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)$，

化简得$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　……………………10 分

所以$\theta=\dfrac{\pi}{6},\angle ACD=\dfrac{2\pi}{3}-\theta=\dfrac{\pi}{2}$，　…………………11 分

所以ΔABC是直角三角形.　………………12 分

法二：（2）如图所示，



取AB中点M，延长MD与AC的延长线交于点N，连接NB，

由$2CD=BD$有$\overrightarrow{ND}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{NB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{NC}$，由$\overrightarrow{NM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{NB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{NA}$，…………………6 分

设$\overrightarrow{ND}=\lambda\overrightarrow{NM}$，则$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{NB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{NC}=\dfrac{\lambda}{2}\overrightarrow{NB}+\dfrac{\lambda}{2}\overrightarrow{NA}$，……………7 分

即$\dfrac{2-3\lambda}{6}\overrightarrow{NB}=\dfrac{\lambda}{2}\overrightarrow{NA}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{NC}$，……………………8 分

故$\lambda=\dfrac{2}{3}$，所以$\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NC}$，即$C$为$AN$中点.……………9 分

又$AD=BD,M$为AB中点，所以$NM\perp AB$，　………10 分

又$A=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\triangle ABN$为正三角形，

又BC平分AN，所以$BC\perp AN$，……………11 分

所以ΔABC是直角三角形.　…………………12 分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

19．证明：（1）$\because PA=PD$，O 为 AD 的中点 $\therefore PO\perp AD$ …………1 分

又 $\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，…………2 分

$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$，又 $BC\subset$ 平面 $ABCD$ …………3 分

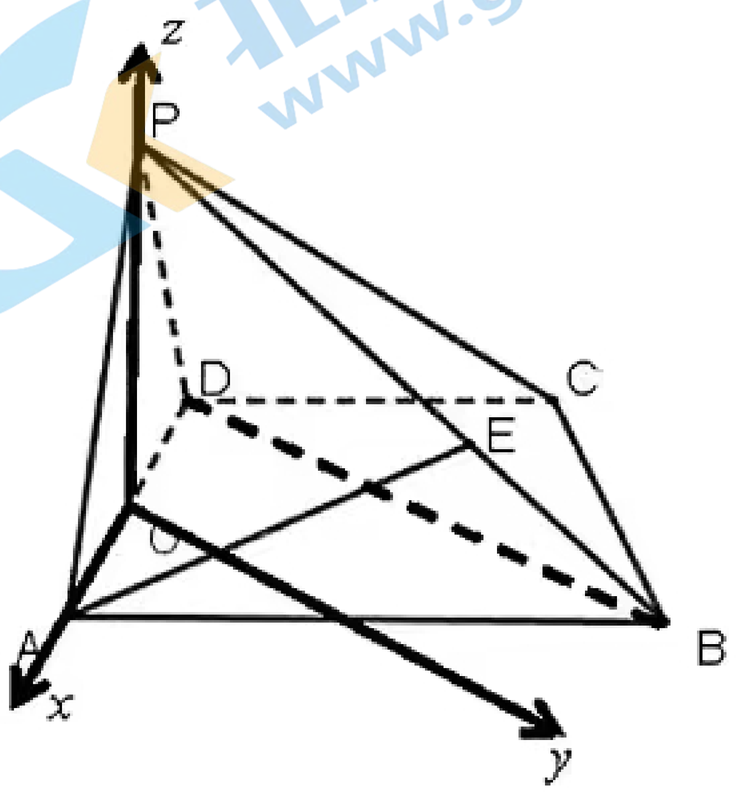
$\therefore PO\perp BC$ …………4 分

（2）法（一）由，$AB=8, AD=DC=CB=4$，可知四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，易知

$BD=4\sqrt{3}$，

$\because AD^2+BD^2=AB^2$，$\therefore AD\perp BD$

建立如图所示的空间直角坐标系，…………5 分



$P(0,0,2\sqrt{7}), A(2,0,0), B(-2,4\sqrt{3},0), C(-4,2\sqrt{3},0)$，$D(-2,0,0)$，…………6 分

平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，…………7 分

设 $E=(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{AE}=(x-2,y,z)$，$\overrightarrow{PE}=(x,y,z-2\sqrt{7})$，$\overrightarrow{PB}=(-2,4\sqrt{3},-2\sqrt{7})$

$\because$ 直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\frac{\pi}{6}$

$\therefore \sin\frac{\pi}{6}=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{AE}>|=\frac{|z|}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{2}$

$\therefore x^2-4x+4+y^2-3z^2=0$ ①…………8 分

$\because$ 点 E 在棱 PB 上

$\therefore \overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PB}$ 即 $(x,y,z-2\sqrt{7})=\lambda(-2,4\sqrt{3},-2\sqrt{7})$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

$\therefore x=-2\lambda, y=4\sqrt{3}\lambda, z=2\sqrt{7}-2\sqrt{7}\lambda$ 代入①解得 $\lambda=\frac{1}{2}$ 或 $\lambda=5$（舍去）…………9 分

$\overrightarrow{PE}=(-1,2\sqrt{3},-\sqrt{7})$

$\overrightarrow{PD}=(-2,0,-2\sqrt{7}), \overrightarrow{PC}=(-4,2\sqrt{3},-2\sqrt{7})$,

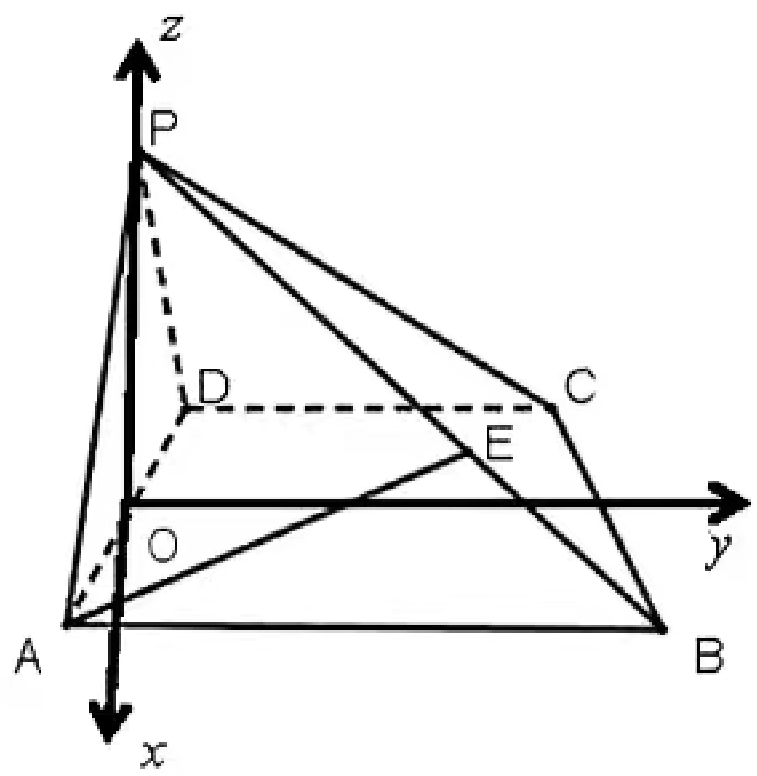
设平面 PCD 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PD}=-2x_1-2\sqrt{7}z_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=-4x_1+2\sqrt{3}y_1-2\sqrt{7}z_1=0\end{cases}$ 令 $z_1=1$，得 $x_1=-\sqrt{7}, y_1=-\frac{\sqrt{21}}{3}$

$\vec{m}=(-\sqrt{7},-\frac{\sqrt{21}}{3},1)$…………11 分

点 E 到平面 PCD 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{PE}\cdot\vec{m}|}{|\vec{m}|}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{\frac{31}{3}}}=2\sqrt{\frac{21}{31}}=\frac{2\sqrt{651}}{31}$…………12 分

法（二）建立如图所示的空间直角坐标系，



…………………………5 分

$P(0,0,2\sqrt{7}), A(\sqrt{3},-1,0), B(\sqrt{3},7,0), C(-\sqrt{3},5,0)$, $D(-\sqrt{3},1,0)$，…………6 分

平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，…………7 分

设 $E(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{AE}=(x-\sqrt{3},y+1,z)$，$\overrightarrow{PE}=(x,y,z-2\sqrt{7})$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},7,-2\sqrt{7})$

$\because$ 直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\frac{\pi}{6}$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

$\therefore \sin\frac{\pi}{6} = |\cos < \vec{n}, \overrightarrow{AE} >| = \frac{|z|}{\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2+z^2}} = \frac{1}{2}$

$\therefore (x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2-3z^2=0$ ①…………8 分

$\because$ 点 E 在棱 PB 上

$\therefore \overrightarrow{PE} = \lambda\overrightarrow{PB}$ 即 $(x, y, z-2\sqrt{7}) = \lambda(\sqrt{3}, 7, -2\sqrt{7})$

$\therefore x=\sqrt{3}\lambda, y=7\lambda, z=2\sqrt{7}-2\sqrt{7}\lambda$ 代入①解得 $\lambda=\frac{1}{2}$ 或 $\lambda=5$（舍去）…………9 分

$\overrightarrow{PE} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{7}{2}, -\sqrt{7})$，$\overrightarrow{PD} = (-\sqrt{3}, 1, -2\sqrt{7})$，$\overrightarrow{DC} = (0, 4, 0)$，

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$

$$\begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{PD} = -\sqrt{3}x_1 + y_1 - 2\sqrt{7}z_1 = 0 \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DC} = 4y_1 = 0 \end{cases}$$

令 $z_1=\sqrt{3}$，得 $x_1=-2\sqrt{7}$，$y_1=0$，$\therefore \vec{m} = (-2\sqrt{7}, 0, \sqrt{3})$…………11 分

点 E 到平面 PCD 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{PE}\cdot\vec{m}|}{|\vec{m}|} = \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{31}} = 2\sqrt{\frac{21}{31}} = \frac{2\sqrt{651}}{31}$…………12 分

20.解：（1）由 $\sqrt{3}|PF_1| = \sqrt{7}|PF_2|$，可设 $|PF_1| = \sqrt{7}x, |PF_2| = \sqrt{3}x$…………1 分

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，因为 $\cos\angle F_1PF_2 = \frac{\sqrt{21}}{7}$，

所以 $|F_1F_2|^2 = 7x^2+3x^2-2\sqrt{7}x\cdot\sqrt{3}x\cdot\frac{\sqrt{21}}{7} = 4x^2$，…………2 分

即 $|F_1F_2| = 2x$，所以 $|PF_1|^2 = |PF_2|^2 + |F_1F_2|^2$，即 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形.

所以在 ΔOPF_2 中，$PF_2 \perp OF_2$，$|PF_2| = \sqrt{3}x$，$|OF_2| = x$，所以 $\frac{b}{a} = \frac{|PF_2|}{|OF_2|} = \sqrt{3}$，…………3 分

则双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1+(\frac{b}{a})^2} = \sqrt{1+3} = 2$…………4 分

（2）由（1）可知在双曲线 E 中有 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ 且实轴长为 2，所以 $a=1, b=\sqrt{3}$

所以双曲线 E 方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$．…………5 分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

由 $F_2(2,0)$，故设斜率为 k 的直线 l 为 $y=k(x-2)$，

联立 $\begin{cases} y=k(x-2) \\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，可得 $(3-k^2)x^2+4k^2x-4k^2-3=0$，…………………6 分

因为直线 l 与双曲线右支交于不同两点，所以 $\begin{cases} \Delta=36\left(k^2+1\right)>0 \\ \dfrac{-4k^2}{3-k^2}>0 \\ \dfrac{-4k^2-3}{3-k^2}>0 \end{cases} \Rightarrow k^2>3$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-3},x_1x_2=\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}$，…………………7 分

则 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k^2}{k^2-3},\dfrac{y_1+y_2}{2}=k(\dfrac{2k^2}{k^2-3}-2)=\dfrac{6k}{k^2-3}$，

即 A,B 的中点坐标为 $(\dfrac{2k^2}{k^2-3},\dfrac{6k}{k^2-3})$，…………………8 分

因为 Q 为 x 轴上一点，满足 $|QA|=|QB|$，故 Q 为 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点，

AB 的垂直平分线的方程为：$y-\dfrac{6k}{k^2-3}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{2k^2}{k^2-3})$，

令 $y=0$，则得 $x=\dfrac{8k^2}{k^2-3}$，即 $Q(\dfrac{8k^2}{k^2-3},0)$，

所以 $|QF_2|=|\dfrac{8k^2}{k^2-3}-2|=\dfrac{6(k^2+1)}{|k^2-3|}$，……………………9 分

又 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$，

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\frac{4k^2}{k^2-3})^2-4\times\frac{4k^2+3}{k^2-3}}=\frac{6(k^2+1)}{|k^2-3|}$$ …………10 分

又因为 A,B 在双曲线的右支上，故 $|AF_1|-|AF_2|=2a=2,|BF_1|-|BF_2|=2$，

故 $|AF_1|+|BF_1|-|AF_2|-|BF_2|=4$，即 $|AF_1|+|BF_1|-4=|AB|$，……………11 分

故 $\dfrac{2|QF_2|}{|AF_1|+|BF_1|-4}=\dfrac{2|QF_2|}{|AB|}=\dfrac{2\cdot\dfrac{6(k^2+1)}{|k^2-3|}}{\dfrac{6(k^2+1)}{|k^2-3|}}=2$，即 $\dfrac{2|QF_2|}{|AF_1|+|BF_1|-4}$ 为定值. ……12 分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

21.解：$\because f(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x-2ax$

$\therefore f'(x)=x+\frac{1}{x}-2a=\frac{x^2-2ax+1}{x}, x\in(0,+\infty)$ ……………1 分

记 $g(x)=x^2-2ax+1$

当 $\Delta=4a^2-4\le 0$，即 $0<a\le 1$ 时，$g(x)=x^2-2ax+1\ge 0$ 恒成立

$\therefore f'(x)\ge 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立

f(x)在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增 ……………2 分

当 $\Delta=4a^2-4>0$，即 $a>1$ 时，方程有两个不等实根，且

$x_1=\frac{2a-\sqrt{4a^2-4}}{2}=a-\sqrt{a^2-1}>0, x_2=\frac{2a+\sqrt{4a^2-4}}{2}=a+\sqrt{a^2-1}>0$, ……………3 分

$\therefore \forall x\in(0,a-\sqrt{a^2-1}), x^2-2ax+1>0, f'(x)>0, f(x)$ 单调递增

$\forall x\in(a-\sqrt{a^2-1},a+\sqrt{a^2-1}), x^2-2ax+1<0, f'(x)<0, f(x)$ 单调递减

$\forall x\in(a+\sqrt{a^2-1},+\infty), x^2-2ax+1>0, f'(x)>0, f(x)$ 单调递增…………4 分

综上所述：当 $0<a\le 1$ 时 $f(x)$ 在上单调递增

$a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a-\sqrt{a^2-1})$ 和 $(a+\sqrt{a^2-1},+\infty)$ 上单调递增，

在 $(a-\sqrt{a^2-1},a+\sqrt{a^2-1})$ 上单调递减 ……………5 分

(2) $\because f(1)=\frac{1}{2}-2a, \therefore f(m)+f(n)=1-4a=2f(1)$ ……………6 分

由（1）可知 0<a<1 时 f(x)在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

故不妨设 0<m<1<n,

要证 $m+n>2 \Leftrightarrow n>2-m>1 \Leftrightarrow f(n)>f(2-m)$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息

$\Leftrightarrow 1-4a-f(m)>f(2-m) \Leftrightarrow f(m)+f(2-m)<1-4a$ ……………8 分

记 $F(x)=f(x)+f(2-x), x\in(0,1)$

$F'(x)=f'(x)-f'(2-x)=x+\dfrac{1}{x}-2a-(2-x)-\dfrac{1}{2-x}+2a=-\dfrac{(x-1)^3}{x(2-x)}$ ……10 分

$\therefore x\in(0,1)$ 时，$F'(x)>0$ 恒成立，$F(x)$ 单调递增 ……………11 分

$\therefore F(x)<F(1)=2f(1)=1-4a$

$\therefore m+n>2$ ……………12 分

22.解:(1)由题可知, X_1 的可能取值为 0,1,2.由相互独立事件概率乘法公式可知……1 分

$p(X_1=0)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$ ……………2 分

$p(X_1=1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{9}$ ……………3 分

$p(X_1=2)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$ ……………4 分

故 X_1 的分布列如下表:

X_1	0	1	2
P	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{5}{9}$	$\dfrac{2}{9}$

(2) 由全概率公式可知:

$p(X_{n+1}=1)=p(X_n=1)\cdot p(X_{n+1}=1|X_n=1)+p(X_n=2)\cdot p(X_{n+1}=1|X_n=2)+p(X_n=0)\cdot p(X_{n+1}=1|X_n=0)$

$=(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3})p(X_n=1)+(\dfrac{2}{3}\times 1)p(X_n=2)+(1\times\dfrac{2}{3})p(X_n=0)$

$=\dfrac{5}{9}p(X_n=1)+\dfrac{2}{3}p(X_n=2)+\dfrac{2}{3}p(X_n=0)$ ……………5 分

即: $a_{n+1}=\dfrac{5}{9}a_n+\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{2}{3}(1-a_n-b_n)$　　所以 $a_{n+1}=-\dfrac{1}{9}a_n+\dfrac{2}{3}$

所以 $a_{n+1}-\dfrac{3}{5}=-\dfrac{1}{9}(a_n-\dfrac{3}{5})$ ……………6 分

又 $a_1=p(X_1=1)=\dfrac{5}{9}$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

所以，数列$\{a_n-\frac{3}{5}\}$为以$a_1-\frac{3}{5}=-\frac{2}{45}$为首项，以$-\frac{1}{9}$为公比的等比数列 ……………7 分

所以$a_n-\frac{3}{5}=-\frac{2}{45}\cdot(-\frac{1}{9})^{n-1}=\frac{2}{5}\cdot(-\frac{1}{9})^n$

即：$a_n=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot(-\frac{1}{9})^n$ ……………8 分

（3）(法一)易知：$E(X_n)=a_n+2b_n+0(1-a_n-b_n)=a_n+2b_n$

由全概率公式可得：

$p(X_{n+1}=2)=p(X_n=1)\cdot p(X_{n+1}=2|X_n=1)+p(X_n=2)\cdot p(X_{n+1}=2|X_n=2)+p(X_n=0)\cdot p(X_{n+1}=2|X_n=0)$

$(\frac{2}{3}\ \frac{1}{3})\ p(X_n=1)+(\frac{1}{3}\ 1)\ p(X_n=2)+0\ p(X_n\ \ 0)$

即：$b_{n+1}=\frac{2}{9}a_n+\frac{1}{3}b_n$ ……………9 分

又$a_{n+1}=-\frac{1}{9}a_n+\frac{2}{3}$

所以$a_{n+1}+2b_{n+1}=-\frac{1}{9}a_n+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}a_n+\frac{2}{3}b_n=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n+\frac{2}{3}$

所以$a_{n+1}+2b_{n+1}-1=\frac{1}{3}(a_n+2b_n-1)$ ……………10 分

又$b_1=p(X_1=2)=\frac{2}{9}$

所以$a_1+2b_1-1=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}-1=0$

所以$a_n+2b_n-1=0$ ……………11 分

即：$E(X_n)=a_n+2b_n+0(1-a_n-b_n)=a_n+2b_n=1$ ……………12 分

(法二)由全概率公式可得：

$p(X_{n+1}=2)=p(X_n=1)\cdot p(X_{n+1}=2|X_n=1)+p(X_n=2)\cdot p(X_{n+1}=2|X_n=2)+p(X_n=0)\cdot p(X_{n+1}=2|X_n=0)$

$=(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3})\cdot p(X_n=1)+(\frac{1}{3}\times1)\cdot p(X_n=2)+0\cdot p(X_n=0)$

即：$b_{n+1}=\frac{2}{9}a_n+\frac{1}{3}b_n$ ……………9 分

又$a_n=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot(-\frac{1}{9})^n$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

所以 $b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{2}{9}(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}(-\frac{1}{9})^n)=\frac{1}{3}b_n+\frac{2}{15}+\frac{4}{45}(-\frac{1}{9})^n)$

所以 $b_{n+1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}(-\frac{1}{9})^{n+1}=\frac{1}{3}(b_n-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}(-\frac{1}{9})^n)$) ……………10 分

又 $b_1=p(X_1=2)=\frac{2}{9}$

所以 $b_1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times(-\frac{1}{9})=\frac{2}{9}-\frac{1}{5}-\frac{1}{45}=0$

所以 $b_n-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}(-\frac{1}{9})^n)=0$

所以 $b_n=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}(-\frac{1}{9})^n)$ ……………11 分

所以 $E(X_n)=a_n+2b_n+0(1-a_n-b_n)=a_n+2b_n=1$ ……………12 分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〃精益求精、专业严谨〃的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜
北京高考资讯