延庆区 2022—2023 学年第一学期期末试卷

高二数学参考答案及评分标准

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	D	D	D	B	C	B	A	A

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

题号	11	12	13	14	15
答案	$(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$	$2\sqrt{2}$，$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$	$[0,1]$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$，$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	① ③

12、14 题第一空 2 分，第二空 3 分； 15 题选对一个给 3 分，选对二个给 5 分，选错不给分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

（16）（共 16 分）

解：（Ⅰ）所求圆的半径 $r=\sqrt{(2+2)^2+(-1-2)^2}=5$． ……2 分

又因为圆心为 $(2,-1)$，

所以所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=25$． ……4 分

（Ⅱ）设圆心坐标为 (a,b) ，则圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$． ……5 分

因为 $(0,0),(0,2)$ 是圆上的点，

所以 $\begin{cases} a^2+b^2=4, \\ a^2+(2-b)^2=4. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=\sqrt{3}, \\ b=1. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-\sqrt{3}, \\ b=1. \end{cases}$ ……7 分

所以所求圆的方程为 $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$ 或 $(x+\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$． ……8 分

（Ⅲ）由已知可得 $(1,2),(3,4)$ 的中点 $(2,3)$ 就是圆心. ……9 分

所以半径为 $\sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$． ……11 分

所以所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y-3)^2=2$ ． ……12 分

（Ⅳ）设线段 PQ 的垂直平分线为 m，则圆心既在直线 m 上，又在直线 l 上，

所以圆心是直线 m 与 l 的交点. ……13 分

因为直线 PQ 的斜率为 $\dfrac{2-0}{3-1}=1$，

所以 m 的斜率为 -1.

因为 P,Q 的中点为 $(2,1)$，

所以直线 m 的方程为 $y-1=-(x-2)$，即 $x+y-3=0$. ……14 分

解方程组 $\begin{cases} x+y-3=0, \\ 2x+3y-8=0. \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$

因此圆心的坐标为 $(1,2)$，又圆的半径为 $\sqrt{(1-1)^2+(2-0)^2}=2$，

所以所求圆的方程是 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. ……16 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）如果切线的斜率不存在，则切线方程为 $x=2$.

因为圆心 $(0,0)$ 到 $x=2$ 的距离为 2，等于半径，

所以 $x=2$ 是圆的一条切线方程. ……2 分

如果切线的斜率存在，设为 k，

则切线的方程为 $y-1=k(x-2)$，即 $kx-y-2k+1=0$. ……3 分

因为 $\dfrac{|-2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=-\dfrac{3}{4}$，

所以切线方程为 $y-1=-\dfrac{3}{4}(x-2)$，即 $3x+4y-10=0$.

综上，过点 A 的圆的切线方程为 $x=2$ 和 $3x+4y-10=0$. ……4 分

（Ⅱ）设 DE 中点为 F，圆心为 O，则 $OF\perp DE$，因此 ΔDFO 是直角三角形.

直线 AB 的两点式方程为 $\dfrac{y-1}{-\frac{2}{3}-1}=\dfrac{x-2}{\frac{1}{3}-2}$，整理得 $x-y-1=0$. ……5 分

因为圆心 $O(0,0)$ 到直线 AB 的距离为 $|OF|=\dfrac{|0+0-1|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，半径 $|OD|=2$，…6 分

所以 $|DF|=\sqrt{|OD|^2-|OF|^2}=\sqrt{4-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. ……7 分

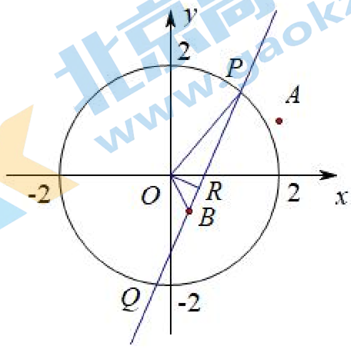
所以线段 DE 的长为 $2|DF|=\sqrt{14}$. ……8 分

（Ⅲ）过点 B 做任意一条直线交圆于 P,Q 两点，设线段 PQ 中点为 R，连接 OP,OR,OB，

因为 $OR \perp PQ$，

所以 $|PQ| = 2|PR| = 2\sqrt{|OP|^2 - |OR|^2} = 2\sqrt{4 - |OR|^2}$.

所以当 $|OR|$ 最大时，$|PQ|$ 最小. ……9 分



又因为在 $\mathrm{Rt}\Delta ORB$ 中，$|OR| \le |OB|$，

所以当 R 与 B 重合时，

即 $OB \perp PQ$ 时，$|PQ|$ 最小. ……10 分

因为直线 OB 的斜率为 $\dfrac{-\frac{2}{3}-0}{\frac{1}{3}-0} = -2$，

所以直线 PQ 的斜率为 $-\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}$. ……12 分

所以直线 PQ 的方程为 $y-(-\dfrac{2}{3}) = \dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{3})$，即 $3x-6y-5=0$. ……14

（18）（共 13 分）

证明：（Ⅰ）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 C_1D.

因为 $AD // B_1C_1$ 且 $AD = B_1C_1$，

所以 ADC_1B_1 是平行四边形. ……1 分

所以 $AB_1 // DC_1$， ……2 分

因为 $AB_1 \not\subset$ 平面CDD_1C_1，$DC_1 \subset$ 平面CDD_1C_1， ……3 分

所以 $AB_1 //$ 平面 CDD_1C_1. ……4 分

证明：（Ⅱ）（法一）

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为 $BC \perp$ 平面 AA_1B_1B，$AB_1 \subset$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $BC \perp AB_1$，即 $BM \perp AB_1$. ……5 分

因为四边形 AA_1B_1B 是正方形，

所以 $A_1B \perp AB_1$. ……6 分

因为 $A_1B \cap BM = B, A_1B, BM \subset$ 平面 A_1BM，

所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BM． ……7 分

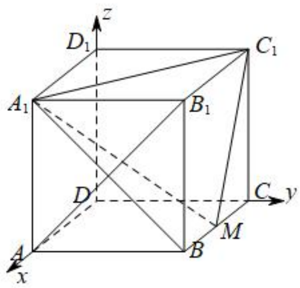
因为 $A_1M \subset$ 平面 A_1BM，

所以 $AB_1 \perp A_1M$． ……8 分

（法二）如图，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，则

$A(4,0,0), B(4,4,0), B_1(4,4,4), A_1(4,0,4)$， $C(0,4,0), M(2,4,0)$．

所以 $\overrightarrow{AB_1}=(0,4,4), \overrightarrow{A_1M}=(-2,4,-4)$． ……6 分



因为 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0+16-16=0$，

所以 $\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{A_1M}$，即 $AB_1 \perp A_1M$． ……8 分

（III）因为 $C_1(0,4,4)$，

所以 $\overrightarrow{AB_1}=(0,4,4), \overrightarrow{A_1C_1}=(-4,4,0), \overrightarrow{C_1M}=(2,0,-4)$． ……9 分

由（II）知，平面 A_1BM 的一个法向量为 $\overrightarrow{AB_1}=(0,4,4)$， ……10 分

（若（II）用法二证，需要补证 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BM．）

设平面 A_1MC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1M}=0.\end{cases} \text{即} \begin{cases}-4x+4y=0,\\ 2x-4z=0.\end{cases}$$

所以 $x=y, x=2z$．

令 $x=2$，则 $y=2, z=1$，

所以 $\vec{n}=(2,2,1)$． ……11 分

所以 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{AB_1}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}}{|\vec{n}||\overrightarrow{AB_1}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$． ……12 分

由图可知，二面角 $B-A_1M-C_1$ 为钝角，

所以二面角 $B-A_1M-C_1$ 的大小为 135°． ……13 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由已知得 $2a=2\sqrt{2}$，因此 $a=\sqrt{2}$，又因为 $c=1$， ……2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=(\sqrt{2})^2-1^2=1$. ……3 分

因为椭圆的焦点在 x 轴上，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ……4 分

（Ⅱ）联立直线 l 的方程与椭圆 C 的方程得方程组 $\begin{cases} y=2x+m, \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1. \end{cases}$ ……5 分

消去 y，整理得 $9x^2+8mx+2m^2-2=0$. ……6 分

因为 $\Delta=(8m)^2-4\times 9\times(2m^2-2)=-8m^2+72$， ……7 分

所以当 $\Delta>0$ 时，$m^2<9$，即 $-3<m<3$ 时，方程有两个不同的实数解，

此时原方程组的实数解集中有两个元素，直线 l 与椭圆 C 有两个公共点. ……8 分

（Ⅲ）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$ ……10 分

又因为 $k=2$，由（Ⅱ）可知 $x_1+x_2=-\dfrac{8m}{9}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{9}$， ……12 分

所以 $|AB|=\sqrt{1+4}\sqrt{\dfrac{64m^2}{81}-4\times\dfrac{2m^2-2}{9}}=\sqrt{5}\sqrt{\dfrac{-8m^2+72}{81}}=\dfrac{\sqrt{5}}{9}\sqrt{72-8m^2}$.

……14 分

所以当 $m=0$ 时，$|AB|$ 有最大值为 $\dfrac{\sqrt{5}\sqrt{72}}{9}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$. ……15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由已知得 $2c=2\sqrt{2}$，所以 $c=\sqrt{2}$. ……1 分

因为 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $a=2$. ……2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=4-2=2$. ……3 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……4 分

（II）因为直线 l 过 $P(3,0)$，

当斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=3$，与 C 无交点. ……5 分

当斜率存在时，设 $l:y-0=k(x-3)$，即 $y=kx-3k$. ……6 分

联立直线 l 的方程与椭圆 C 的方程得方程组 $\begin{cases} y=kx+3k, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$.

消去 y，整理得 $(1+2k^2)x^2-12k^2x+18k^2-4=0$ ， ……7 分

由已知 $\Delta=(-12k^2)^2-4\times(1+2k^2)\times(18k^2-4)=-40k^2+16>0$，

即 $k^2<\dfrac{2}{5}$， ……8 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由韦达定理可知 $x_1+x_2=\dfrac{12k^2}{1+2k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{18k^2-4}{1+2k^2}$， ……9 分

因为线段 AB 的中点横坐标为 1，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{12k^2}{1+2k^2}=2$. ……10 分

解得 $k^2=\dfrac{1}{4}<\dfrac{2}{5}$.

于是 $k=\pm\dfrac{1}{2}$，方程为 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$ 或者 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$. ……11 分

（III）因为 $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$， $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2$.

将 $y_1=kx_1-3k$， $y_2=kx_2-3k$ 代入上式可得

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+(kx_1-3k)(kx_2-3k)=(1+k^2)\ x_1x_2-3k^2(x_1+x_2)+9k^2$，

……12 分

由题意可知 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$， ……13 分

即 $\dfrac{(1+k^2)(18k^2-4)}{1+2k^2}-\dfrac{36k^4}{1+2k^2}+9k^2=0$，

解得 $k^2=\frac{4}{23}<\frac{2}{5}$，即 $k=\pm\frac{2\sqrt{23}}{23}$. ……14 分

方程为 $y=\frac{2\sqrt{23}}{23}x-\frac{6\sqrt{23}}{23}$ 或者 $y=-\frac{2\sqrt{23}}{23}x+\frac{6\sqrt{23}}{23}$. ……15 分

（21）（共 12 分）

解：（Ⅰ） $X+X=\{0,1,2,3,4\}$， ……3 分

$X+Y=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. ……6 分

（Ⅱ）因为 $x_1<x_2<\cdots<x_{1012}$，

所以 $x_1+x_1<x_1+x_2<x_1+x_3<\cdots<x_1+x_{1012}<x_2+x_{1012}<x_3+x_{1012}<\cdots<x_{1012}+x_{1012}$.

……9 分

所以 $|X+X|\geqslant 2023$. ……11 分

又因为 $|X+X|$ 是整数且 $|X+X|<2024$，

所以 $|X+X|=2023$. ……12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。