参考答案及解析

衡中同卷 新高考版

2023—2024 学年度上学期高三年级期末考试·数学

一、选择题

1. C 【解析】由题得 $M=\{x\in\mathbf{Z}|-3<x<4\}=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，$N=\{0,1,2,3,4,5\}$，所以 $M\cap N=\{0,1,2,3\}$.

2. A 【解析】设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z(-2i)=(a+bi)(-2i)=2b-2ai$，又 $\overline{z}+3i=a-bi+3i=a+(3-b)i$. 因为 $z(-2i)=\overline{z}+3i$，所以 $2b-2ai=a+(3-b)i$，所以 $\begin{cases}2b=a,\\-2a=3-b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=-1,\end{cases}$ 所以 $z=-2-i$.

3. C 【解析】设圆锥 P_1O_1 的底面半径为 r，母线长为 l，则圆锥 P_2O_2 的底面半径、母线长分别为 $\frac{1}{2}r,\frac{3}{2}l$，设它们的侧面积分别为 S_1,S_2，所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi rl}{\pi\times\frac{1}{2}r\times\frac{3}{2}l}=\frac{4}{3}$.

4. D 【解析】因为 $2^0<2^{0.99}<2^1$，所以 $1<a<2$，$b=\log_4 3+2\log_3 2>2\sqrt{\log_4 3\times 2\log_3 2}=2$，$c=\frac{\sqrt{15}}{4}<1$，所以 $c<a<b$.

5. A 【解析】设 $\{a_n+1\}$ 的公比为 q，则首项为 $a_1+1=2$，所以 $S_3=(a_1+1)+(a_2+1)+(a_3+1)=2+2q+2q^2=26$，解得 $q=-4$ 或 3，所以 $a_4+1=2\times(-4)^3$ 或 $a_4+1=2\times3^3$，解得 $a_4=-129$ 或 $a_4=53$.

6. C 【解析】由题图知 $\cos(\alpha+\beta)=OD$，$\cos\alpha\cos\beta=OA$，$\sin\alpha\sin\beta=EB$，结合图形知，$OD=OA-EB$，即 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

7. B 【解析】设点 $A\left(\frac{m^2}{4},m\right)$，$m>0$，则 $S_{\triangle AMF}=\frac{1}{2}\times\frac{m^2}{4}\times m=8$，解得 $m=4$，所以 $A(4,4)$，所以 $k_{AF}=\frac{4}{3}$，所以直线 $AB:y=\frac{4}{3}(x-1)$，联立 $y^2=4x$，消 x 得 $y^2-3y-4=0$，所以 $y_Ay_B=-4$，所以 $y_B=-\frac{4}{y_A}=-1$，所以 $x_B=\frac{y_B^2}{4}=\frac{1}{4}$. 由抛物线的定义可得 $|FA|=x_A+1=5$，$|FB|=x_B+1=\frac{5}{4}$，所以 $\frac{|FA|}{|FB|}=4$.

8. D 【解析】由题意得 $\overline{x}=\frac{1}{6}(2\ 017+2\ 018+2\ 019+2\ 020+2\ 021+2\ 022)=\frac{4\ 039}{2}$，$\overline{y}=4\overline{x}+9=8\ 087$，根据意义知 $\sum_{k=1}^{6}(y_k-bk-a)^2$ 表示样本点 $(k,y_k)(k=1,2,\cdots,6)$ 与回归直线 $\hat{y}=bk+a$ 的整体接近程度. 且由样本点 $(k,y_k)(k=1,2,\cdots,6)$ 构成的表为

k	1	2	3	4	5	6
y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

对应的回归直线方程为 $\hat{y}=bk+a$，由表知 $\overline{k}=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$，所以 $\overline{y}=b\overline{k}+a=\frac{7}{2}b+a=8\ 087$. 由题意可知，在散点图中，样本点 $(k,y_k)(k=1,2,\cdots,6)$ 是将样本点 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,6)$ 整体向左平移了 2 016 个单位，故回归直线 $\hat{y}=bk+a$ 与 $\hat{y}=4x+9$ 必平行，则有 $b=4$，所以 $a=8\ 073$，所以 $a+b=8\ 077$.

二、选择题

9. BD 【解析】圆 $x^2-2x+y^2=0$ 的圆心为 $(1,0)$，半径为 1，圆 C 与圆 $x^2-2x+y^2=0$ 相切于点 $A(2,0)$，则圆 C 的圆心在 x 轴，设圆心为 $(a,0)$，则 $|a-2|=\frac{|3a-12|}{5}$，解得 $a=-1$ 或 $a=\frac{11}{4}$. 当 $a=-1$ 时，半径为 $|-1-2|=3$；当 $a=\frac{11}{4}$ 时，半径为 $\left|\frac{11}{4}-2\right|=\frac{3}{4}$.

10. AD 【解析】由题图可知 $\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$，又 $\omega=\frac{2\pi}{T}$，所以解得 $T=\pi$，$\omega=2$，故 B，C 选项错误；又由图可知函数图象最低点的坐标为 $\left(\frac{2\pi}{3},-2\right)$，所以 $A=|-2|=2$，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=-2$，所以 $\frac{4\pi}{3}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 又因为 $|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故 A 选项正确；所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，若 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$，则 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，有 $x=-\frac{\pi}{12}$，所以点 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 是函数 $f(x)$ 的图象的对称中心，故 D 选项正确.

11. BC 【解析】由表格可知，当 $I=1$ 时，$L_I=a+b\lg 1=120$，得 $a=120$，当 $I=10^{-12}$ 时，$L_I=120+b\lg 10^{-12}=120-12b=0$，得 $b=10$，所以 $L_I=120+10\lg I=$

$10(12+\lg I)=10\lg 10^{12}I$，故 A 错误；$\lg I=\frac{L_I-120}{10}$，则 $I=10^{\frac{L_I-120}{10}}=(\sqrt[10]{10})^{L_I-120}$，故 B 正确；当 $I=10^{-6}$ 时，$L_{正常}=120+10\lg 10^{-6}=120-60=60$，故 C 正确；当 $L_I=80$ 时，即 $80=120+10\lg I_T$，得 $\lg I_T=-4$，则 $I_T=10^{-4}$，故 D 错误.

12. BC 【解析】因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$. 因为 $f(1+x)$ 为偶函数，所以 $f(-x+1)=f(x+1)$，故 B 正确；由 $f(-x+1)=f(x+1)$ 可得 $f(-x)=f(x+2)$，所以 $f(x+2)=-f(x)$. 因为 $f(-2-x)+f(x)=f(x)-f(x+2)$，其结果不一定为零，故 A 不正确；由 $f(x+2)=-f(x)$ 得 $f(x)=-f(x-2)$，所以 $f(x+2)=f(x-2)$，故 C 正确；由 $f(x+2)=-f(x)$ 得 $f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(2\,023)=f(3)=f(-1)=-f(1)$，因为 $f(1)$ 从题目中无法得出，故 D 不正确.

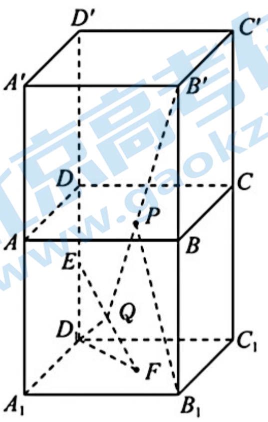
三、填空题

13. -1 或 $-\frac{3}{17}$ 【解析】由题知存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\lambda(-1,4)+(2,3)=(2-\lambda,4\lambda+3)$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(2-\lambda)^2+(4\lambda+3)^2}=\sqrt{10}$，解得 $\lambda=-1$ 或 $-\frac{3}{17}$.

14. $[76,83)$ 【解析】设考试成绩为 X，由题意可知，$\mu=76$，$\sigma=4$，$P(X\geqslant 76)=0.5$，$P(X\geqslant 83)=0.15$，所以 $P(76\leqslant X<83)=P(X\geqslant 76)-P(X\geqslant 83)=0.5-0.15=0.35$，所以 B 等级的分数应为 $[76,83)$.

15. $\sqrt{6}$ 【解析】由题得当点 P 位于椭圆的右顶点时，$|AP|$ 取得最小值，为 $m-2$；当点 P 位于椭圆的左顶点时，$|AP|$ 取得最大值，为 $m+2$，所以 $|AP|$ 的取值范围为 $[m-2,m+2]$；同理 $|AQ|$ 的取值范围也为 $[m-2,m+2]$. 由椭圆 C 上存在两点 P,Q，使 $|AP|\cdot|AQ|=2$，若取 $(m-2)(m+2)=2$，解得 $m=\sqrt{6}$，又 $m>2$，符合题意.

16. $3\sqrt{6}-1$ 【解析】以 A,B,C,D 为顶点构造棱长为 3 的正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，如图，



由对称得 $PB'=PB_1$，$PB_1+PQ=PB'+PQ$，因为 E 是 DD_1 上的动点，F 是下底面上的动点，则 $\triangle D_1EF$ 是直角三角形. 又因为 Q 是 EF 的中点，且 $EF=2$，所以 $QD_1=1$，所以当 $PB'+PQ$ 取最小值时，D_1,Q,P,B' 四点共线，则 $D_1B'=3\sqrt{6}$，此时 $PB_1+PQ=3\sqrt{6}-1$.

四、解答题

17. **解**：(1) 由题得 $2\times\frac{1}{2}bc\sin A=bc\cos A$，

所以 $\sin A=\cos A$，即 $\tan A=1$， (3 分)

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$. (4 分)

(2) 因为 $4\sin C=3\sqrt{2}\sin B$，

由已知及正弦定理得 $4c=3\sqrt{2}b$，所以 $c=\frac{3\sqrt{2}}{4}b$ ①， (6 分)

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $b^2+c^2-\sqrt{2}bc=5$ ②， (8 分)

联立①②得 $b=2\sqrt{2}$，$c=3$. (10 分)

18. **解**：(1) 存在 $\lambda=\frac{8}{7}$，使得 $A_1P\perp B_1C$. 理由如下： (1 分)

分别取 AB，A_1B_1 的中点 O，O_1，连接 OC，OO_1，

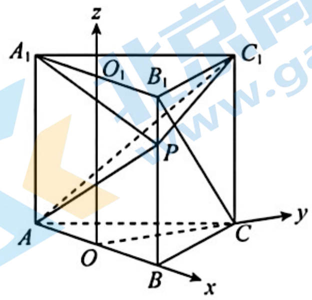
则 $OO_1/\!/AA_1$，$OO_1\perp AB$.

因为 $AC=BC$，所以 $AB\perp OC$，

又 $AA_1\perp$ 底面 ABC，$OC\subset$ 底面 ABC，

所以 $AA_1\perp OC$，所以 $OO_1\perp OC$， (3 分)

以 O 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OO_1}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $A_1(-1,0,4)$，$P\left(1,0,\frac{4}{\lambda}\right)$，$B_1(1,0,4)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，

所以 $\overrightarrow{A_1P}=\left(2,0,\frac{4}{\lambda}-4\right)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-1,\sqrt{3},-4)$，

若 $A_1P\perp B_1C$，则 $\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{B_1C}=2\times(-1)+0\times\sqrt{3}+\left(\frac{4}{\lambda}-4\right)\times(-4)=0$，

解得 $\lambda=\frac{8}{7}$，故存在 $\lambda=\frac{8}{7}$，使得 $A_1P\perp B_1C$. (5 分)

(2) 根据 (1) 中建系如图，当 $\lambda=2$ 时，则 $P(1,0,2)$，$A(-1,0,0)$，$A_1(-1,0,4)$，$C_1(0,\sqrt{3},4)$，

所以 $\overrightarrow{A_1P}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AP}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{AC_1}=(1,\sqrt{3},4)$. (6 分)

设平面 PA_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1P}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x_1-2z_1=0,\\ x_1+\sqrt{3}y_1=0,\end{cases}$

取 $y_1=-\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{m}=(3,-\sqrt{3},3)$.　(8 分)

设平面 PAC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x_2+2z_2=0,\\ x_2+\sqrt{3}y_2+4z_2=0,\end{cases}$

取 $y_2=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},-1)$.　(10 分)

设平面 PA_1C_1 与平面 PAC_1 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}$

$=\dfrac{|3\times1+(-\sqrt{3})\times\sqrt{3}+3\times(-1)|}{\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2+3^2}\times\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{105}}{35}$，

即平面 PA_1C_1 与平面 PAC_1 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{105}}{35}$.

(12 分)

19. **解**：(1)由题得 $a_n=a_1+(n-1)d$，$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$，　(1 分)

所以 $\sqrt{2S_n}=\sqrt{2na_1+n(n-1)d}$，

又 $\{\sqrt{2S_n}\}$ 是公差为 d 的等差数列，

所以 $\sqrt{2S_n}=\sqrt{2a_1}+(n-1)d=dn+\sqrt{2a_1}-d$，

所以 $\sqrt{2na_1+n(n-1)d}=dn+\sqrt{2a_1}-d$，

所以 $dn^2+(2a_1-d)n=d^2n^2+2(\sqrt{2a_1}-d)dn+(\sqrt{2a_1}-d)^2$，

所以 $\begin{cases}d=d^2,\\ 2a_1-d=2(\sqrt{2a_1}-d)d,\\ (\sqrt{2a_1}-d)^2=0,\end{cases}$

结合 $d\neq0$，解得 $\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{2},\\ d=1,\end{cases}$　(5 分)

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=n-\dfrac{1}{2}$.　(6 分)

(2)由(1)可得 $S_n=\dfrac{n\left(\frac{1}{2}+n-\frac{1}{2}\right)}{2}=\dfrac{n^2}{2}$，　(7 分)

所以 $\dfrac{a_n+d}{S_n\cdot S_{n+1}}=\dfrac{n+\frac{1}{2}}{\frac{n^2}{2}\times\frac{(n+1)^2}{2}}=\dfrac{2(2n+1)}{n^2\times(n+1)^2}=2\left[\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$，　(10 分)

所以 $T_n=2\left[1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=2\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=2-\dfrac{2}{(n+1)^2}$.　(12 分)

20. **解**：(1)由题意得 $X=0,30,60,90$，且 $\dfrac{X}{30}\sim B\left(3,\dfrac{1}{2}\right)$.

(1 分)

所以 $P(X=0)=P\left(\dfrac{X}{30}=0\right)=C_3^0\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，

$P(X=30)=P\left(\dfrac{X}{30}=1\right)=C_3^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{3}{8}$，

$P(X=60)=P\left(\dfrac{X}{30}=2\right)=C_3^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{3}{8}$，

$P(X=90)=P\left(\dfrac{X}{30}=3\right)=C_3^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，　(4 分)

故 X 的分布列为

X	0	30	60	90
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

所以 $E(X)=30E\left(\dfrac{X}{30}\right)=30\times3\times\dfrac{1}{2}=45$.　(6 分)

(2)设选择方案二的最终得分为 Y，

则 $Y=0,30,40,70,90,120$.

由独立性可得 $P(Y=0)=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$，

$P(Y=30)=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$，

$P(Y=40)=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times C_2^1\times\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{9}$，

$P(Y=70)=\dfrac{1}{2}\times C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{9}$，

$P(Y=90)=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{18}$，

$P(Y=120)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{18}$，　(10 分)

所以 Y 的分布列为

Y	0	30	40	70	90	120
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

因为 $E(Y)=0\times\dfrac{2}{9}+30\times\dfrac{2}{9}+40\times\dfrac{2}{9}+70\times\dfrac{2}{9}+90\times\dfrac{1}{18}+120\times\dfrac{1}{18}=\dfrac{385}{9}<45$，　(11 分)

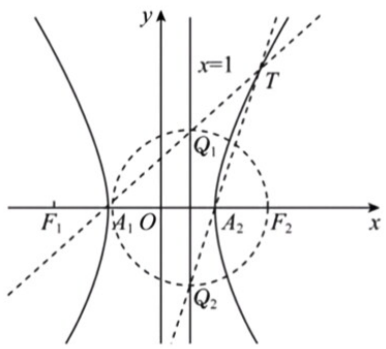
所以应选择方案一.　(12 分)

21. **解**：(1)由题意得 $a=2$，易知 $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，

可得 $b^2=3$，　(3 分)

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$.　(4 分)

(2)如图所示.



由题意知 $A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$，设双曲线上的动点 T 的坐标为 $T(x_0,y_0)$ 且 $y_0\neq 0$，则 $\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{3}=1$.

易知直线 TA_1 的斜率存在，且 $k_{TA_1}=\frac{y_0}{x_0+2}$，其方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，

同理可得直线 TA_2 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，　　（6 分）

所以 $Q_1\left(1,\frac{3y_0}{x_0+2}\right)$，$Q_2\left(1,\frac{-y_0}{x_0-2}\right)$.　　（7 分）

设以线段 Q_1Q_2 为直径的圆 Q 上的任意一点为 $M(x,y)$，

则 $\overrightarrow{Q_1M}=\left(x-1,y-\frac{3y_0}{x_0+2}\right)$，$\overrightarrow{Q_2M}\left(x-1,y+\frac{y_0}{x_0-2}\right)$，

由 $\overrightarrow{Q_1M}\cdot\overrightarrow{Q_2M}=0$ 得圆 Q 的方程为 $(x-1)(x-1)+\left(y-\frac{3y_0}{x_0+2}\right)\left(y+\frac{y_0}{x_0-2}\right)=0$，

即 $(x-1)^2+y^2+\left(\frac{y_0}{x_0-2}-\frac{3y_0}{x_0+2}\right)y-\frac{3y_0^2}{x_0^2-4}=0$.

由 $\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{3}=1$ 可得 $\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=\frac{3}{4}$，

所以圆 Q 的方程为 $(x-1)^2+y^2+\left(\frac{y_0}{x_0-2}-\frac{3y_0}{x_0+2}\right)y-\frac{9}{4}=0$.

因此若 $y=0$，此时圆的方程与 x_0，y_0 无关，代入上述圆方程得 $(x-1)^2-\frac{9}{4}=0$，

解得 $x=\frac{5}{2}$ 或 $x=-\frac{1}{2}$.

所以以线段 Q_1Q_2 为直径的圆必经过两个定点 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$\left(\frac{5}{2},0\right)$.　　（12 分）

22. (1)**解**：当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x\left(\ln x-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x-1\right)(x>0)$，

所以 $f'(x)=\ln x-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x-1+x\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)=\ln x-x^2-x$.　　（1 分）

设 $g(x)=\ln x-x^2-x(x>0)$，

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-2x-1=\frac{(1+x)(1-2x)}{x}(x>0)$.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)$，

所以 $g(x)\leqslant g\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2-\frac{3}{4}<0$，　　（4 分）

即 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减.　　（5 分）

(2)**证明**：因为 $f(x)=x\left(\ln x-\frac{1}{3}x^2-ax-1\right)(x>0)$.

所以 $f'(x)=\ln x-x^2-2ax(x>0)$，

因为 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1，x_2，

所以 $f'(x)=\ln x-x^2-2ax=0$ 有两个不同的实根 x_1，x_2.

设 $h(x)=\frac{f'(x)}{x}=\frac{\ln x}{x}-x-2a(x>0)$，

则 $h'(x)=\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}(x>0)$，　　（6 分）

设 $m(x)=1-\ln x-x^2$，$x>0$，

可得 $m'(x)=-\frac{1}{x}-2x<0$，

所以 $m(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数，且 $m(1)=0$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；　　（7 分）

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

所以 $0<x_1<1<x_2$.　　（8 分）

由 $h(x_2)-h\left(\frac{1}{x_2}\right)=\frac{\ln x_2}{x_2}+x_2\ln x_2+\frac{1}{x_2}-x_2$，

设 $F(x)=\frac{\ln x}{x}+x\ln x+\frac{1}{x}-x(x>1)$，

则 $F'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x>0(x>1)$，　　（9 分）

所以 $F(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上是增函数，

所以 $F(x)>F(1)=0$，

所以 $h(x_2)-h\left(\frac{1}{x_2}\right)>0$，即 $h(x_2)>h\left(\frac{1}{x_2}\right)$，

因为 $h(x_1)=h(x_2)$，所以 $h(x_1)>h\left(\frac{1}{x_2}\right)$，

因为 $0<x_1<1$，$0<\frac{1}{x_2}<1$，$h(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是增函数，所以 $x_1>\frac{1}{x_2}$，

所以 $x_1x_2>1$，可得 $\ln x_1+\ln x_2=\ln(x_1x_2)>0$，

所以 $x_1x_2+\ln x_1+\ln x_2>1$.　　（12 分）