2023 北京顺义一中高二 10 月月考

数　　学

本试卷共 4 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将答题卡交回.

一. 单选题（本大题共 10 小题，共 40.0 分）

1. 已知向量 $\vec{a}=(1,2,1)$，$\vec{b}=(-1,0,4)$，则 $\vec{a}+2\vec{b}=$（　）

A. $(-1,2,9)$　　B. $(-1,4,5)$　　C. $(1,2,-7)$　　D. $(1,4,9)$

2. 空间四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$，则 $\overrightarrow{CD}$ 等于（　）

A. $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　　B. $\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$　　C. $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$　　D. $\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}$

3. 已知空间向量 $\vec{a}=(\lambda,1,-2),\vec{b}=(\lambda,1,1)$，则“$\lambda=1$”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知向量 $\vec{a}=(-1,2,1),\vec{b}=(3,x,y)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$，那么 $|\vec{b}|=$（　）

A. $3\sqrt{6}$　　B. 6　　C. 9　　D. 18

5. 已知 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 是空间的一个基底，在下列向量中，与向量 $\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ 一定可以构成空间的另一个基底的是（　）

A. $\vec{a}$　　B. $\vec{b}$　　C. $\vec{c}$　　D. $2\vec{a}-3\vec{b}$

6. 在空间直角坐标系中，点 $A(2,-1,3)$ 关于平面 xOz 的对称点为 B，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$

A. -10　　B. 10　　C. -12　　D. 12

7. 已知两点 $A(-3,4)$，$B(3,2)$，过点 $P(1,0)$ 的直线 l 与线段 AB 有公共点，则直线 l 的斜率 k 的取值范围是(　　)

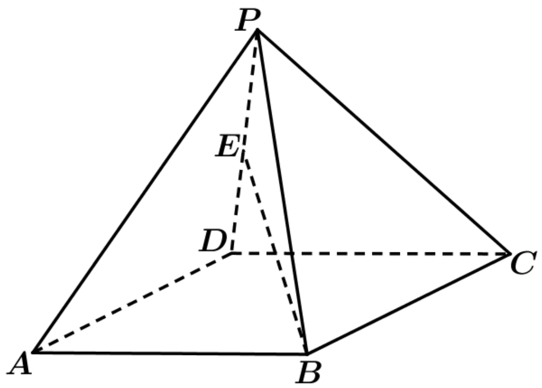
A. $(-1,1)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $[-1,1]$　　D. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

8. 正方体不在同一表面上的两顶点 $A(-1,2,-1)$，$B(3,-2,3)$，则正方体的体积是（　）

A. 4　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 64　　D. $192\sqrt{3}$

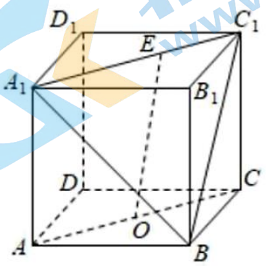
9. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，已知 $\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{PC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{PE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PD}$，则 $\overrightarrow{BE}=$（　）



A. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　B. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

C. $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　D. $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为线段 AC 的中点，点 E 在线段 A_1C_1 上，则直线 OE 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值的范围是（　）



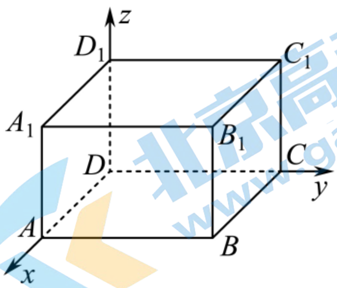
A. $\left[\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

C. $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$

二. 填空题（本大题共 5 小题，共 25.0 分）

11. 与向量 $\vec{a}=(1,2,-2)$ 方向相同的单位向量是______.

12. 如图，以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点，过 D 的三条棱所在的直线为坐标轴，建立空间直角坐标系，若 $\overrightarrow{DB_1}$ 的坐标为 $(4,3,2)$，则 $\overrightarrow{AC_1}$ 的坐标为________



13. 若过点 $P(1-a,1+a)$ 与点 $Q(3,2a)$ 的直线的倾斜角是钝角，则实数 a 的取值范围是________.

14. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则点 B 到直线 AC_1 的距离为________.

15. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 和 N 分别是正方形 $ABCD$ 和 BB_1C_1C 的中心，点 P 为正方体表面上及内部的点，若点 P 满足 $\overrightarrow{DP}=m\overrightarrow{DA}+n\overrightarrow{DM}+k\overrightarrow{DN}$，其中 m、n、$k\in\mathbf{R}$，且 $m+n+k=1$，则满足条件的所有点 P 构成的图形的面积是______.

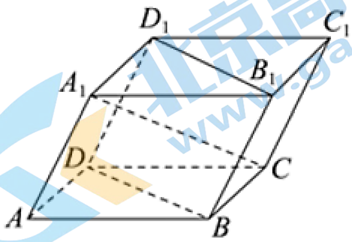
三、解答题（本大题共 6 小题，共 85.0 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. 已知直线 l_1 过点 $A(1，1)$，$B(3，a)$，直线 l_2 过点 $M(2，2)$，$N(3+a，4)$.

（1）若 $l_1//l_2$，求 a 的值；

（2）若 $l_1\perp l_2$，求 a 的值.

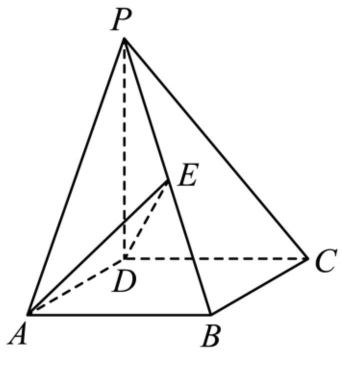
17. 如图，在平行六面体. $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中, $AB=AD=AA_1=1$, $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60^\circ$，设向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$.



（1）用 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{DB},\overrightarrow{A_1C}$;

（2）求 $\left|\overrightarrow{A_1C}\right|$.

18. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$PD\perp$平面 $ABCD$，$PD=AB=1$，E 是 PB 的中点.

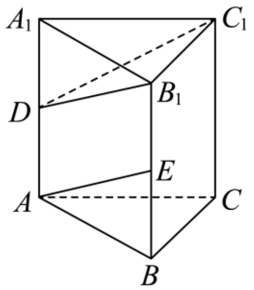


（1）求直线 BD 与直线 PC 所成角的余弦值；

（2）求证：$PC\perp$平面 ADE

（3）求点 B 到平面 ADE 的距离.

19. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BCC_1B_1 为矩形，$AC\perp$平面 BCC_1B_1，D，E 分别是棱 AA_1,BB_1 的中点.



（1）求证： $AE//$ 平面 B_1C_1D；

（2）若 $AC=BC=AA_1=2$，求直线 AB 与平面 B_1C_1D 所成角的正弦值.

20. 如图 1，在 Rt△ABC 中，∠C＝90°，BC＝3，AC＝6，D，E 分别是 AC，AB 上的点，且 DE∥BC，DE＝2．将△ADE 沿 DE 折起到△A_1DE 的位置，使 A_1C⊥CD，如图 2.

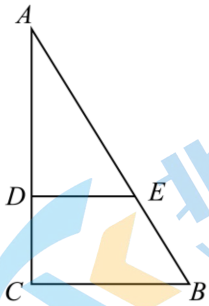


图1

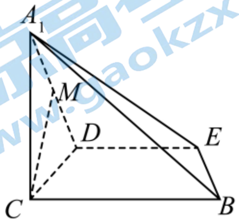


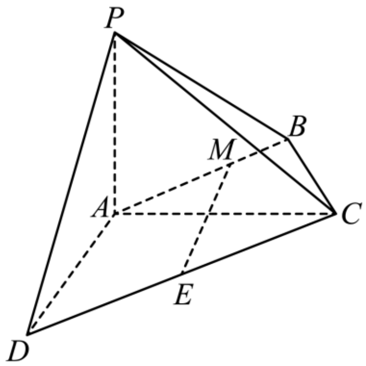
图2

(1)求证：A_1C⊥平面 BCDE;

(2)若 M 是 A_1D 的中点，求 CM 与平面 A_1BE 所成角的大小;

(3)线段 BC 上是否存在点 P，使平面 A_1DP 与平面 A_1BE 垂直？说明理由.

21. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\perp AD$，$AB\perp BC$，$\angle BCA=60^\circ$，$AP=AD=AC=2$，E 为 CD 的中点，M 在 AB 上，且 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$.



（1）求证：$EM//$ 平面 PAD；

（2）求平面 PAD 与平面 PBC 夹角的余弦值;

（3）点 F 是线段 PD 上异于两端点的任意一点，若满足异面直线 EF 与 AC 所成角为 45°，求 AF 的长.

参考答案

一. 单选题（本大题共 10 小题，共 40.0 分）

1. 【答案】A

【分析】根据空间向量线性运算的坐标表示求解.

【详解】∵ $\vec{a}=(1,2,1)$，$\vec{b}=(-1,0,4)$

∴ $\vec{a}+2\vec{b}=(-1,2,9)$

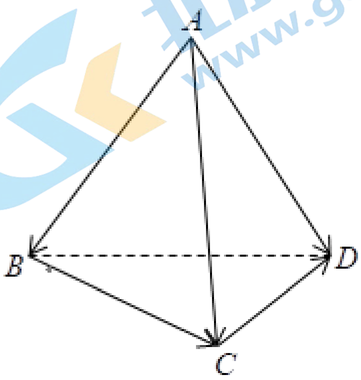
故选：A.

2. 【答案】B

【分析】根据向量的三角形法则，即可求解.

【详解】如图所示，根据向量的运算，可得 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{BC}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

故选：B.



3. 【答案】A

【分析】利用充分条件和必要条件的定义判断.

【详解】当 $\lambda=1$ 时，$\vec{a}=(1,1,-2),\vec{b}=(1,1,1)$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即 $\vec{a}\perp\vec{b}$，故充分；

当 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即 $\lambda^2+1-2=0$ 解得 $\lambda=\pm1$，故不必要；

故选：A

【点睛】本题主要考查逻辑条件的判断以及空间向量的数量积运算，属于基础题.

4. 【答案】A

【分析】根据题意，设 $\vec{b}=k\vec{a}$，即 $(3，x，y)=k(-1，2，1)$，分析可得 x、y 的值，进而由向量模的计算公式计算可得答案.

【详解】根据题意，向量 $\vec{a}=(-1，2，1)$，$\vec{b}=(3，x，y)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$，

则设 $\vec{b}=k\vec{a}$，即 $(3，x，y)=k(-1，2，1)$，

则有 $k=-3$，则 $x=-6$，$y=-3$，

则 $\vec{b}=(3，-6，-3)$，故 $|\vec{b}|=\sqrt{9+36+9}=3\sqrt{6}$；

故选：A.

5.【答案】C

【分析】根据空间向量基底的定义依次判断各选项即可.

【详解】解：对于 A 选项，$\vec{a}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，故不能构成空间的另一个基底；

对于 B 选项，$\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，故不能构成空间的另一个基底；

对于 C 选项，不存在 $x,y\in\mathrm{R}$ 使得 $\vec{c}=x\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+y\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ 成立，故能构成空间的另一个基底；

对于 D 选项，假设存在 $x,y\in\mathrm{R}$ 使得 $2\vec{a}-3\vec{b}=x\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+y\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则 $\begin{cases}x+y=2\\x-y=-3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=\frac{5}{2}\end{cases}$，故

$2\vec{a}-3\vec{b}=-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\frac{5}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，故不能构成空间的另一个基底；

故选：C

6.【答案】D

【分析】由题意，根据点 $A(2,-1,3)$ 关于平面 xOz 的对称点 $B(2,1,3)$，求得 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 的坐标，利用向量的数量积的坐标运算，即求解.

【详解】由题意，空间直角坐标系中，点 $A(2,-1,3)$ 关于平面 xOz 的对称点 $B(2,1,3)$，

所以 $\overrightarrow{OA}=(2,-1,3),\overrightarrow{OB}=(2,1,3)$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\times2+(-1)\times1+3\times3=12$，故选 D.

【点睛】本题主要考查了空间直角坐标系的应用，以及空间向量的数量积的坐标运算，其中解答中熟记空间向量数量积的坐标运算公式，准确运算是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

7.【答案】D

【详解】分析：根据两点间的斜率公式，利用数形结合即可求出直线斜率的取值范围.

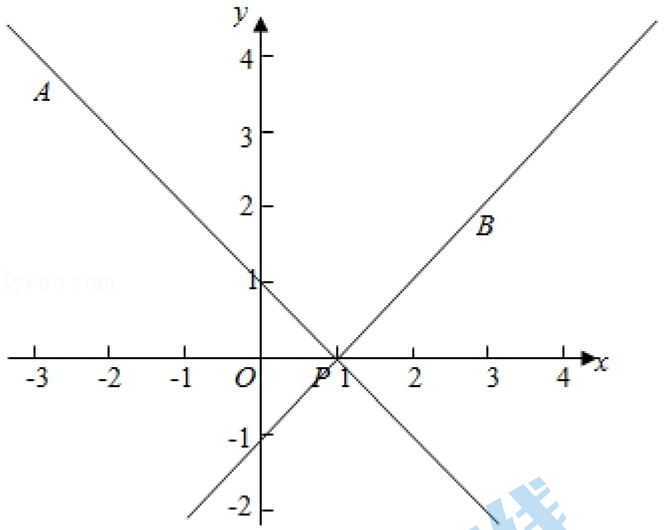
详解：∵点 A（－3，4），B（3，2），过点 P（1，0）的直线 L 与线段 AB 有公共点，

∴直线 l 的斜率 $k\geq k_{PB}$ 或 $k\leq k_{PA}$，

∵PA 的斜率为 $\frac{4-0}{-3-1}$ =－1，PB 的斜率为 $\frac{2-0}{3-1}$=1，

∴直线 l 的斜率 k≥1 或 k≤－1，

故选 D.



点睛：本题主要考查直线的斜率的求法，利用数形结合是解决本题的关键，比较基础．直线的倾斜角和斜率的变化是紧密相联的，tana=k,一般在分析角的变化引起斜率变化的过程时，是要画出正切的函数图像，再分析.

8.【答案】C

【分析】先根据题意可知 AB 是正方体的体对角线，利用空间两点的距离公式求出 AB，再根据正方体的棱长求出体积.

【详解】解：∵正方体中不在同一表面上两顶点 $A\left(-1,2,-1\right)$，$B\left(3,-2,3\right)$，

∴AB 是正方体的体对角线，$AB=\sqrt{16+16+16}=4\sqrt{3}$，

∴正方体的棱长为 4，正方体的体积为 64.

故选：C.

9.【答案】A

【分析】利用空间向量的线性运算即可求解.

【详解】因为在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{PC}=\vec{c}$，

$\overrightarrow{PE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PD}$，

所以 $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BD}\right)=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$

$=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{PB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$.

故选：A.

10.【答案】B

【分析】设正方体边长为 2，如图，以 D 为原点建立空间直角坐标系，后由空间向量知识可得 OE 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值的表达式，即可得答案.

【详解】设正方体边长为 2，如图，以 D 为原点建立空间直角坐标系.

则 $D(0,0,0), A_1(2,0,2), C_1(0,2,2), B(2,2,0), O(1,1,0)$.

因点 E 在线段 A_1C_1 上，设 $\overrightarrow{A_1E}=\lambda\overrightarrow{A_1C_1}$， $\lambda\in[0,1]$.

则 $\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2), \overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0), \overrightarrow{A_1B}=(0,2,-2), \overrightarrow{DO}=(1,1,0)$，

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{A_1E}=\overrightarrow{DA_1}+\lambda\overrightarrow{A_1C_1}=(2-2\lambda,2\lambda,2)$， $\overrightarrow{OE}=(1-2\lambda,2\lambda-1,2)$.

设平面 A_1BC_1 法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-2x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=2y-2z=0\end{cases}$， 取 $\vec{n}=(1,1,1)$.

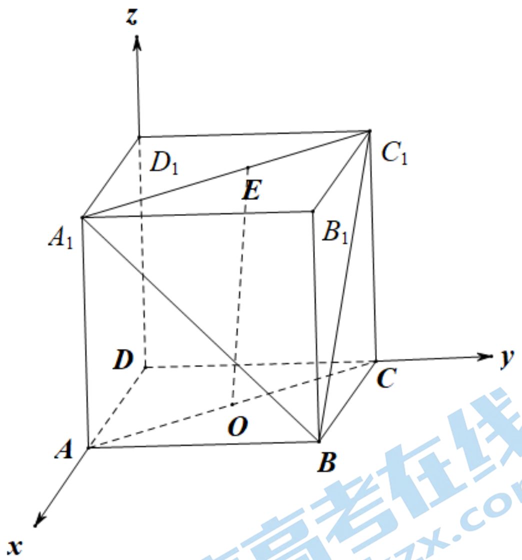
设 OE 与平面 A_1BC_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{OE},\vec{n}\rangle\right|=\left|\dfrac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(1-2\lambda)^2+(2\lambda-1)^2+4}}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\left|\dfrac{1}{\sqrt{4\lambda^2-4\lambda+3}}\right|$.

注意到 $f(\lambda)=4\lambda^2-4\lambda+3=4\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)^2+2$，则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\le f(\lambda)\le\max\{f(0),f(1)\}$

$\Rightarrow f(\lambda)\in[2,3]\Rightarrow\sin\theta\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

故选：B



二. 填空题（本大题共 5 小题，共 25.0 分）

11. 【答案】$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$

【分析】由与 $\vec{a}$ 方向相同的单位向量是 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 可计算求得结果.

【详解】$\because|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$，$\therefore\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$，

即与向量$\vec{a}=(1,2,-2)$方向相同的单位向量是$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

故答案为：$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

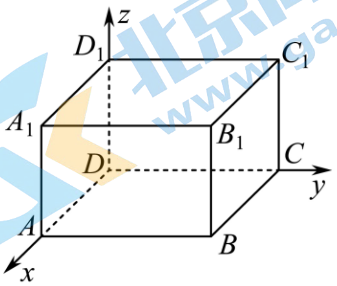
12.【答案】$(-4,3,2)$

【详解】如图所示，以长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的顶点D为坐标原点，

过D的三条棱所在直线为坐标轴，建立空间直角坐标系，

因为$\overrightarrow{DB_1}$的坐标为$(4,3,2)$，所以$A(4,0,0),C_1(0,3,2)$，

所以$\overrightarrow{AC_1}=(-4,3,2)$.



13.【答案】$(-2,1)$

【详解】试题分析：由直线的倾斜角 α 为钝角，能得出直线的斜率小于 0，解不等式求出实数 a 的取值范围．解：∵过点 P（1-a，1+a）和 Q（3，2a）的直线的倾斜角 α 为钝角，∴直线的斜率小于 0，

$\therefore\frac{2a-a-1}{3-1+a}<0\Leftrightarrow(a-1)(a+2)<0\Leftrightarrow-2<a<1$，故答案为$-2<a<1$

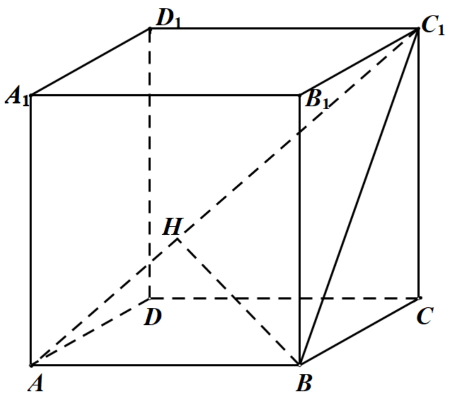
考点：直线的斜率公式

点评：本题考查直线的斜率公式及直线的倾斜角与斜率的关系．

14.【答案】$\frac{\sqrt{6}}{3}$

【分析】连接AC_1，过B作$BH\perp AC_1$，则BH即为所求，由三角形等面积计算求解.

【详解】解：如图，连接AC_1，过B作$BH\perp AC_1$，则BH即为点B到直线AC_1的距离，



在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB\perp$平面BC_1，$\therefore AB\perp BC_1$，在直角$\triangle ABC_1$中，

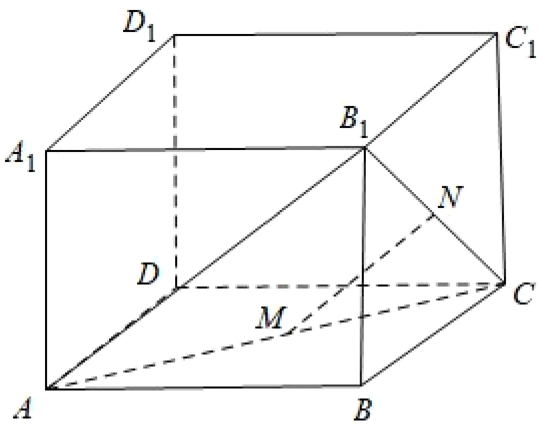
$AB\times BC_1=AC_1\times BH$，且$AB=1, BC_1=\sqrt{2}, AC_1=\sqrt{3}$，所以$BH=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，点$B$到直线$AC_1$的距离为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

15.【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】因为点P满足$\overrightarrow{DP}=m\overrightarrow{DA}+n\overrightarrow{DM}+k\overrightarrow{DN}$，其中$m$、$n$、$k\in\mathbf{R}$，且$m+n+k=1$，所以点$A$，$M$，$N$三点共面，只需要找到平面$AMN$与正方体表面的交线即可.

【详解】



因为点P满足$\overrightarrow{DP}=m\overrightarrow{DA}+n\overrightarrow{DM}+k\overrightarrow{DN}$，其中$m$、$n$、$k\in\mathbf{R}$，且$m+n+k=1$，

所以点A，M，N三点共面，

又因为M和N分别是矩形$ABCD$和BB_1C_1C的中心，所以$CN=B_1N$，$AM=MC$，

连接MN，AB_1，则$MN//AB_1$，所以$\triangle AB_1C$即为经过A，M，N三点的平面与正方体的截面，

故P点可以是正方体表面上线段AB_1，B_1C，AC上的点.

所以所有点P构成的图形的面积为$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85.0 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16.【答案】（1）$\pm\sqrt{5}$；（2）$a=0$.

【分析】（1）由直线平行知斜率相等，建立等量关系得解.

（2）由直线垂直知斜率积为-1，建立等量关系得解.

【详解】解：设直线 l_1 的斜率为 k_1，直线 l_2 的斜率为 k_2.

（1）因为 $k_1=\dfrac{a-1}{3-1}=\dfrac{a-1}{2}$，所以 k_2 存在且 $k_2=\dfrac{4-2}{3+a-2}=\dfrac{2}{a+1}$.

因为 $l_1//l_2$，所以 $k_1=k_2$，即 $\dfrac{a-1}{2}=\dfrac{2}{a+1}$，解得 $a=\pm\sqrt{5}$.

当 $a=\pm\sqrt{5}$ 时，$k_{AM}=k_{BM}$，所以 A，B，M 不共线，则 $a=\pm\sqrt{5}$ 符合题意.

（2）$k_1=\dfrac{a-1}{2}$，

①当 $a=1$ 时，$k_1=0,k_2=1,k_1k_2=0$，不符合题意；

②当 $a\neq1$ 时，$k_1\neq0$，因为 $l_1\perp l_2$，所以 k_2 存在且 $k_2=\dfrac{2}{a+1}(a\neq-1)$，

则 $k_1k_2=-1$，即 $\dfrac{a-1}{2}\cdot\dfrac{2}{a+1}=-1$，解得 $a=0$.

17.【答案】（1）$\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{A_1C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

（2）$\left|\overrightarrow{A_1C}\right|=\sqrt{2}$

【分析】（1）利用空间向量的基本定理与空间向量的线性运算可得出 $\overrightarrow{A_1C}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的表达式；（2）由（1）知 $\overrightarrow{A_1C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$，利用空间向量数量积的运算可求得.

【小问 1 详解】

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}$，

$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$；

【小问 2 详解】

由（1）知 $\overrightarrow{A_1C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$，

由已知可得 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\times\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

所以 $\left|\overrightarrow{A_1C}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a}}=\sqrt{2}$.

18.【答案】（1）$\frac{1}{2}$

（2）证明见解析　（3）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

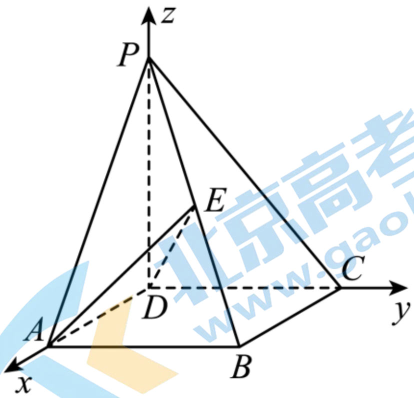
【分析】（1）建立如图所示空间直角坐标系，利用空间向量法计算异面直线所成角的余弦值；

（2）利用数量积坐标运算得线线垂直，利用线线垂直证明线面垂直；

（3）利用点到平面距离向量公式直接计算即可.

【小问 1 详解】

以点 D 为原点，分别以 DA，DC，DP 所在直线为 x，y，z 轴，建立如图空间直角坐标系.



由题意 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$P(0,0,1)$，$E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

设直线 BD 与直线 PC 所成的角为 θ，

因为 $\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$，$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$，所以 $\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PC}\right|}{\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PC}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

所以直线 BD 与直线 PC 所成角的余弦值为 $\frac{1}{2}$；

【小问 2 详解】

因为 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{DE}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

所以 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{PC}=1\times0+0\times1+0\times(-1)=0$，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{PC}=0\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{1}{2}+(-1)\times\dfrac{1}{2}=0$，

所以 $PC\perp DA, PC\perp DE$，又 $DA\cap DE=D, DA, DE\subset$ 平面 ADE，

所以 $PC\perp$ 平面 ADE；

【小问 3 详解】

由（2）知，$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$ 为平面 ADE 的一个法向量，

设点 B 到平面 ADE 的距离为 d，则 d 为向量 $\overrightarrow{DB}$ 在向量 $\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$ 上的投影的绝对值，

由 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，得 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{PC}\right|}{\left|\overrightarrow{PC}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以点 B 到平面 ADE 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

19.【答案】（1）答案见详解

（2）$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

【分析】（1）由棱柱的性质证得四边形 AEB_1D 是平行四边形，从而利用线面平行的判定定理可证；

（2）建立空间直角坐标系，利用向量法求直线 AB 与平面 B_1C_1D 所成角的正弦值.

【小问 1 详解】

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1//BB_1$，且 $AA_1=BB_1$，

因为 D，E 分别是棱 AA_1,BB_1 的中点，

所以 $AD//B_1E$，且 $AD=B_1E$，

所以四边形 AEB_1D 是平行四边形，所以 $AE//DB_1$，

又 $AE\not\subset$ 平面 B_1C_1D，$DB_1\subset$ 平面 B_1C_1D，

所以 $AE//$ 平面 B_1C_1D.

【小问 2 详解】

分别以 CA,CB,CC_1 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示

的空间直角坐标系 $C-xyz$，

由题意得 $A(2,0,0),B(0,2,0),B_1(0,2,2)$，$C_1(0,0,2),D(2,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{C_1D}=(2,0,-1)$，

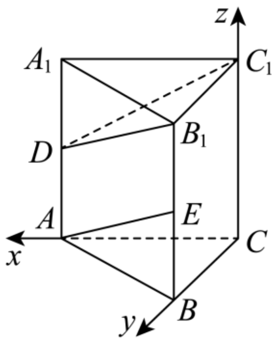
设平面 B_1C_1D 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1D}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2y=0\\ 2x-z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=0$，$z=2$，于是 $\vec{n}=(1,0,2)$，

所以 $\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

所以直线 AB 与平面 B_1C_1D 所成角的正弦值 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.



20.【答案】(1) 略 (2) $\frac{\pi}{4}$ (3)见解析

【考点定位】此题第二问是对基本功的考查，对于知识掌握不牢靠的学生可能不能顺利解答.

第三问的创新式问法，难度非常大

【详解】试题分析：(1) 证明 $A_1C\perp$平面 BCDE，因为 $A_1C\perp CD$，只需证明 $A_1C\perp DE$，即证明 $DE\perp$平面 A_1CD；

(2) 建立空间直角坐标系，用坐标表示点与向量，求出平面 A_1BE 法向量 $\vec{n}=(-1,2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CM}=(-1,0,\sqrt{3})$，利用向量的夹角公式，即可求得 CM 与平面 A_1BE 所成角的大小；

(3) 设线段 BC 上存在点 P，设 P 点坐标为 $(0,a,0)$，则 $a\in[0,3]$，求出平面 A_1DP 法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(-3a,6,\sqrt{3}a)$

假设平面 A_1DP 与平面 A_1BE 垂直，则 $\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{n}=0$，可求得 $0\le a\le 3$，从而可得结论.

(1) 证明：∵$CD\perp DE$，$A_1D\perp DE$，$CD\cap A_1D=D$，

∴$DE\perp$平面 A_1CD，

又∵$A_1C\subset$平面 A_1CD，∴$A_1C\perp DE$

又 $A_1C\perp CD$，$CD\cap DE=D$

∴$A_1C\perp$平面 BCDE

(2) 解：如图建系，则 C $(0,0,0)$，D $(-2,0,0)$，A_1 $(0,0,2\sqrt{3})$，B $(0,3,0)$，E $(-2,2,0)$

∴$\overrightarrow{A_1B}=(0,3,-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{A_1E}=(-2,2,-2\sqrt{3})$

设平面 A_1BE 法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1B}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{A_1E}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}3y-2\sqrt{3}z=0\\ -2x+2y-2\sqrt{3}z=0\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}z=\frac{\sqrt{3}}{2}y\\ x=-\frac{y}{2}\end{cases}$

∴$\vec{n}=(-1,2,\sqrt{3})$

又∵M $(-1,0,\sqrt{3})$，∴$\overrightarrow{CM}=(-1,0,\sqrt{3})$

∴$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CM}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CM}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{1+3}{\sqrt{1+4+3}\cdot\sqrt{1+3}}=\frac{4}{2\cdot2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴CM 与平面 A_1BE 所成角的大小 45°

（3）解：设线段 BC 上存在点 P，设 P 点坐标为（0，a，0），则 a∈[0，3]

$\therefore \overrightarrow{A_1P}=(0,a,-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DP}=(2,a,0)$

设平面 A_1DP 法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$

则 $\begin{cases} ay_1-2\sqrt{3}z_1=0 \\ 2x_1+ay_1=0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{6}ay_1 \\ x_1=-\dfrac{1}{2}ay_1 \end{cases}$

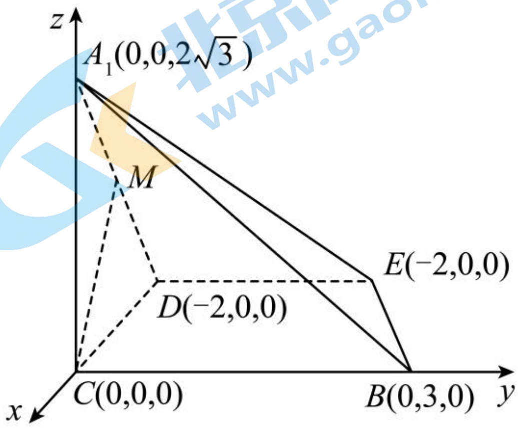
$\therefore \overrightarrow{n_1}=(-3a,6,\sqrt{3}a)$

假设平面 A_1DP 与平面 A_1BE 垂直，则 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n}=0$，

∴3a+12+3a=0，6a=－12，a=－2

∵0≤a≤3

∴不存在线段 BC 上存在点 P，使平面 A_1DP 与平面 A_1BE 垂直



考点：向量语言表述面面的垂直、平行关系；直线与平面垂直的判定；用空间向量求直线与平面的夹角.

21.【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

（3）$\left|\overrightarrow{AF}\right|=\sqrt{2}$

【分析】（1）以点 A 为坐标原点，AD、AC、AP 所在直线分别为 x、y、z 轴建立的空间直角坐标系，证明出 $EM//AD$，利用线面平行的判定定理可证得结论成立；

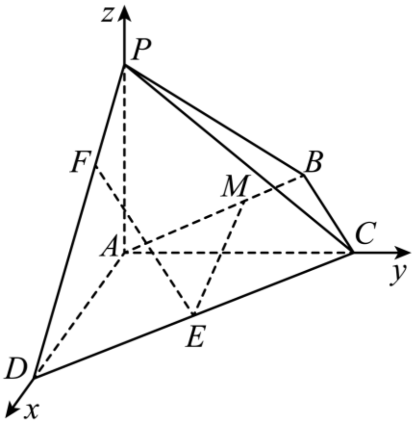
（2）利用空间向量法可求得平面 PAD 与平面 PBC 夹角的余弦值；

（3）设 $\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PD}$，其中 $0<\lambda<1$，求出向量 $\overrightarrow{EF}$ 的坐标，利用空间向量法求出 λ 的值，可得出点 F 的坐标，由此可求得 AF 的长.

【小问 1 详解】

证明：因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\perp AD$，$AB\perp BC$，

以点 A 为坐标原点，AD、AC、AP 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$、$B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$、$C(0,2,0)$、$D(2,0,0)$、$P(0,0,2)$、$E(1,1,0)$、$M\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},1,0\right)$，

$\overrightarrow{ME}=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},0,0\right)$，$\overrightarrow{AD}=(2,0,0)$，$\therefore \overrightarrow{ME}//\overrightarrow{AD}$，$\therefore ME//AD$，

又$\because EM\not\subset$平面PAD，$AD\subset$平面PAD，$\therefore EM//$平面PAD.

【小问 2 详解】

解：设平面PBC的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-2,2)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CP}=-2y+2z=0\end{cases}$，取$x=1$，可得$\vec{m}=(1,-\sqrt{3},-\sqrt{3})$，

易知平面PAD的一个法向量为$\vec{n}=(0,1,0)$，

所以，$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times1}=-\frac{\sqrt{21}}{7}$，

因此，平面PAD与平面PBC夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$.

【小问 3 详解】

解：设$\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PD}=\lambda(2,0,-2)=(2\lambda,0,-2\lambda)$，其中$0<\lambda<1$，

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{PF}=(-1,-1,2)+(2\lambda,0,-2\lambda)=(2\lambda-1,-1,2-2\lambda)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，

由题意可得$\left|\cos<\overrightarrow{EF},\overrightarrow{AC}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{EF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{2}{2\sqrt{(2\lambda-1)^2+1+(2-2\lambda)^2}}=\frac{1}{\sqrt{8\lambda^2-12\lambda+6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

整理可得$2\lambda^2-3\lambda+1=0$，$\because 0<\lambda<1$，解得$\lambda=\frac{1}{2}$，

所以，点F为线段PD的中点，则点$F(1,0,1)$，所以，$\left|\overrightarrow{AF}\right|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$.

因此，若异面直线 EF 与 AC 所成角为 45°，则 $\left|\overrightarrow{AF}\right|=\sqrt{2}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

微信搜一搜

京考一点通