参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】B

【分析】由直线的斜率与倾斜角的关系可得.

【详解】设直线倾斜角为α，

A 选项， 直线$y=-2x+1$，斜率$k=\tan\alpha=-2<0$，即倾斜角为钝角；

B 选项， 直线$y=x+1$，斜率$k=\tan\alpha=1>0$，倾斜角为45°，是锐角；

C 选项， 直线$y=1$，斜率$k=\tan\alpha=0$，即倾斜角为0°，不是锐角；

C 选项， 直线$x=2$，斜率不存在，即倾斜角为90°，是直角不是锐角.

故选：B.

2.【答案】A

【分析】应用向量线性运算及数量积的坐标表示求$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$的值.

【详解】由题设$\vec{b}+\vec{c}=(2,2,5)$，则$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=(2,-3,1)\cdot(2,2,5)=4-6+5=3$.

故选：A

3.【答案】B

【分析】由直线的方向向量与斜率的关系求得直线斜率，根据点斜式建立直线方程，化简为直线的一般式方程即可得解.

【详解】解：$\because l$的方向向量为 $1,-2$ ，

$\therefore$直线l的斜率$k=\dfrac{-2}{1}=-2$，

又$\because$直线l过点$(-3,-2)$，

$\therefore$直线l的方程为：$y+2=-2(x+3)$，即$2x+y+8=0$.

故选：B.

4.【答案】A

【分析】

计算直线平行等价于$a=1$或$a=-2$，根据范围大小关系得到答案.

【详解】直线$l_1: ax+2y=0$与直线l_2：$x+(a+1)y+4=0$平行，则$a(a+1)=2$， $a=1$或$a=-2$，

验证均不重合，满足.

故“$a=1$”是“直线$l_1: ax+2y=0$与直线l_2：$x+(a+1)y+4=0$平行”的充分不必要条件.

故选：A.

【点睛】本题考查了充分不必要条件，意在考查学生的计算能力和推断能力.

5. 【答案】D

【分析】根据 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 列方程，根据空间向量坐标的线性运算求解出 z 的值.

【详解】由于 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，所以存在 λ,μ，使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$，即

$$(1,0,1)=(-2\lambda,2\lambda,\lambda)+(3\mu,4\mu,z\mu)=(-2\lambda+3\mu,2\lambda+4\mu,\lambda+z\mu),$$

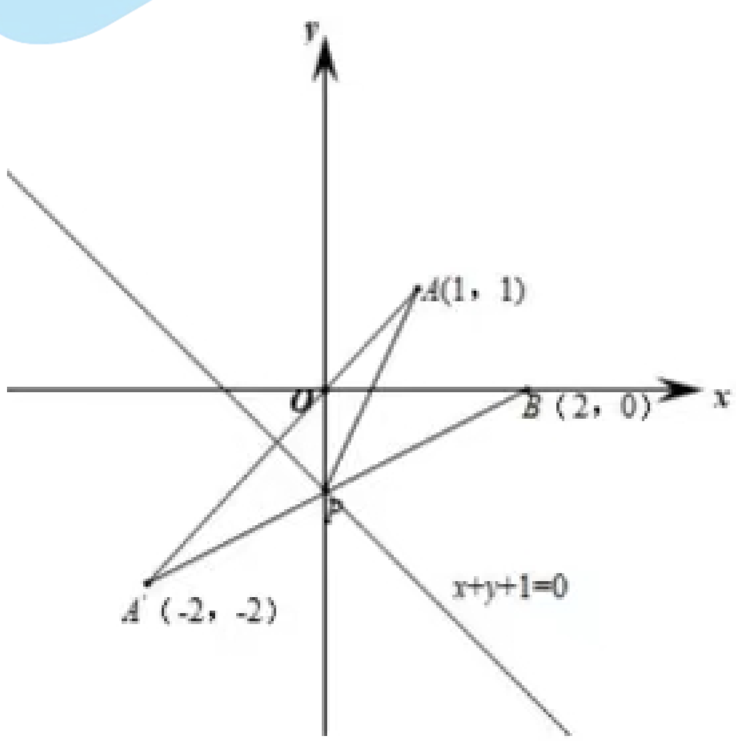
所以 $\begin{cases}1=-2\lambda+3\mu\\0=2\lambda+4\mu\\1=\lambda+z\mu\end{cases}$，解得：$\mu=\dfrac{1}{7},z=9,\lambda=-\dfrac{2}{7}$，所以 $z=9$.

故选：D.

6. 【答案】D

【分析】由 $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ 表示直线 $x+y+1=0$ 上一动点 $P(x,y)$ 到定点 $A(1,1),B(2,0)$ 的距离之和，利用数形结合法求解.

【详解】解：$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ 表示直线 $x+y+1=0$ 上一动点 $P(x,y)$ 到定点 $A(1,1),B(2,0)$ 的距离之和，如图所示：



设点 $A(1,1)$ 关于直线 $x+y+1=0$ 的对称点为 $A'(x_0,y_0)$，

则 $\begin{cases}\dfrac{y_0-1}{x_0-1}=1\\\dfrac{x_0+1}{2}+\dfrac{y_0+1}{2}+1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=-2\\y_0=-2\end{cases}$，

所以对称点为 $A'(-2,2)$，则 $|A'B|=\sqrt{(-2-2)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{5}$

由图知：$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$，

故选：D

7. 【答案】C

【分析】根据题意，可得 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$，再由空间向量的模长计算公式，代入计算，即可得到结果.

【详解】由二面角的平面角的定义知 $\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC}\rangle=120^\circ$，

$\therefore \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{AC}|\cos\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC}\rangle=2\times2\times\cos120^\circ=-2$，

由 $AC\perp l, BD\perp l$，得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}=0, \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，又 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$，

$\therefore |\overrightarrow{DC}|^2=(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{DB}^2+\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=2^2+2^2+2^2-2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=12-2\times(-2)=16$，

所以 $|\overrightarrow{DC}|=4$，即 $CD=4$.

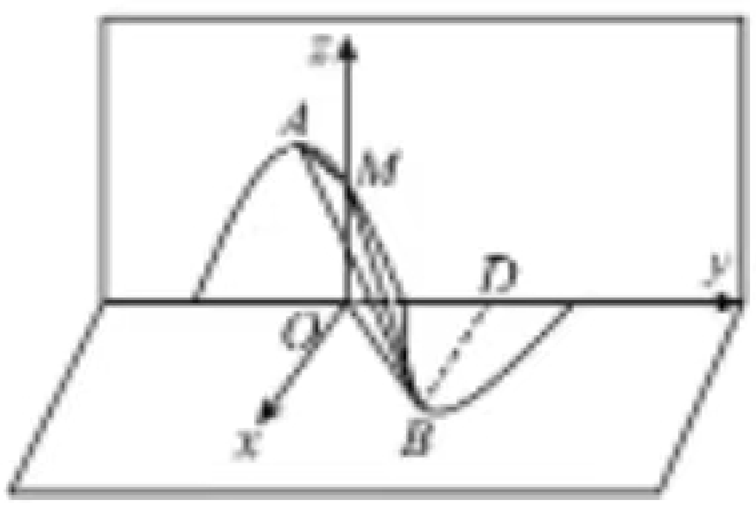
故选：C.

8. 【答案】C

【分析】根据给定条件，求出图 1 中点 A,B,D,M 的坐标，建立空间直角坐标系，求出图 2 中点 A,B,D,M 的坐标，再逐项判断作答.

【详解】在图 1 中，由 $f(x)=\sin\left(\pi x+\frac{5\pi}{6}\right)$，得 $A\left(-\frac{1}{3},1\right)$，$B\left(\frac{2}{3},-1\right)$，$D\left(\frac{2}{3},0\right)$，$M\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

在图 2 中，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，



则 $A\left(0,-\frac{1}{3},1\right)$，$B\left(1,\frac{2}{3},0\right)$，$M\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，$D\left(0,\frac{2}{3},0\right)$，

则 $\overrightarrow{AB}=(1,1,-1)$，得 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$，A 正确.

设平面 ABM 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AM}=\left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+y-z=0\\ \frac{1}{3}y-\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，取 $y=3$，则 $z=2$，$x=-1$，

所以平面 ABM 的一个法向量 $\vec{n}=(-1,3,2)$，

所以点 D 到平面 ABM 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{DB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{14}$，B 正确.

取 $\vec{a}=\overrightarrow{DB}=(1,0,0)$，$\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

则 $\vec{a}^2=1$，$\vec{a}\cdot\vec{u}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以点 D 到直线 AB 的距离为 $\sqrt{\vec{a}^2-(\vec{a}\cdot\vec{u})^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，C 错误.

平面 OBD 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，

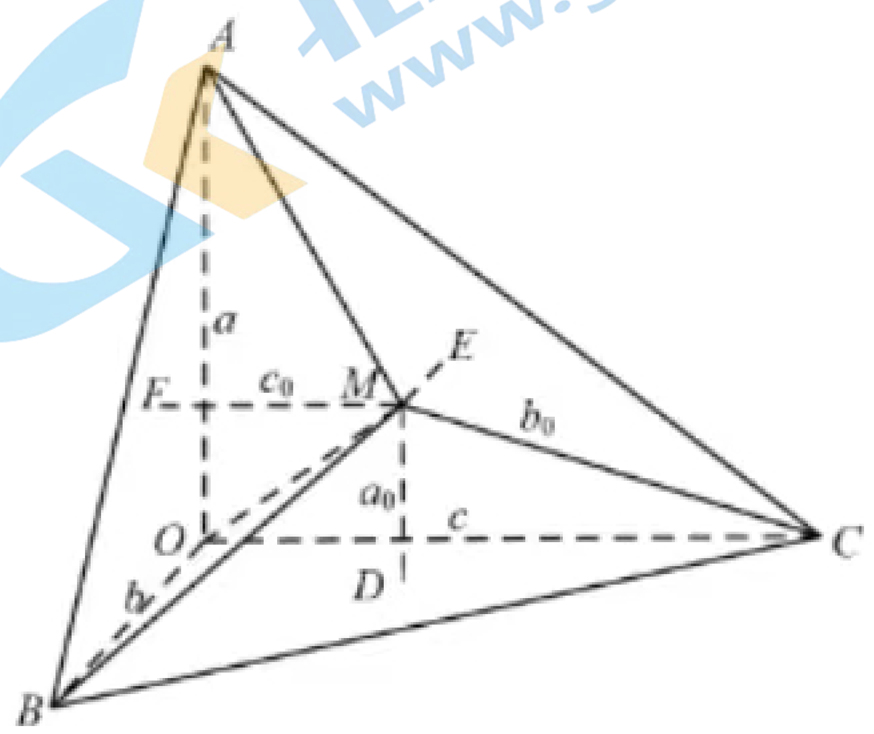
则平面 OBD 与平面 ABM 夹角的余弦值为 $\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{2}{1\times\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$，D 正确.

故选：C.

9.【答案】D

【分析】根据 $V_{O-ABC}=V_{M-OBC}+V_{M-OAC}+V_{M-OAB}$，利用等体积法即可求得答案.

【详解】如图，设点 M 到平面 OBC，平面 OAC，平面 OAB 的投影点分别为 D,E,F，连接 MD,ME,MF,MA,MB,MC,MO，则 $V_{O-ABC}=V_{M-OBC}+V_{M-OAC}+V_{M-OAB}$.



而 $V_{O-ABC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times abc=\dfrac{1}{6}abc$，

$V_{M-OBC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times bca_0+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times abc_0+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times acb_0=\dfrac{1}{6}(bca_0+abc_0+acb_0)$，

所以 $\dfrac{1}{6}abc=\dfrac{1}{6}(bca_0+abc_0+acb_0)$，

则 $\dfrac{a_0}{a}+\dfrac{b_0}{b}+\dfrac{c_0}{c}=1$，则 $2\left(\dfrac{a_0}{a}+\dfrac{b_0}{b}+\dfrac{c_0}{c}\right)=2$，

故选：D.

10.【答案】B

【分析】点 $(0,2)$ 到直线系 $M:x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1(0\le\theta\le2\pi)$ 中每条直线的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}$，直线系 $M:x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1(0\le\theta\le2\pi)$ 表示圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 的切线的集合.从切线的角度逐一判断各个命题即可得到答案.

【详解】因为点$(0,2)$到直线系$M: x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1(0\le\theta\le2\pi)$中每条直线的距离

$d=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}$，直线系$M: x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1(0\le\theta\le2\pi)$表示圆$x^2+(y-2)^2=1$的切线的集合.

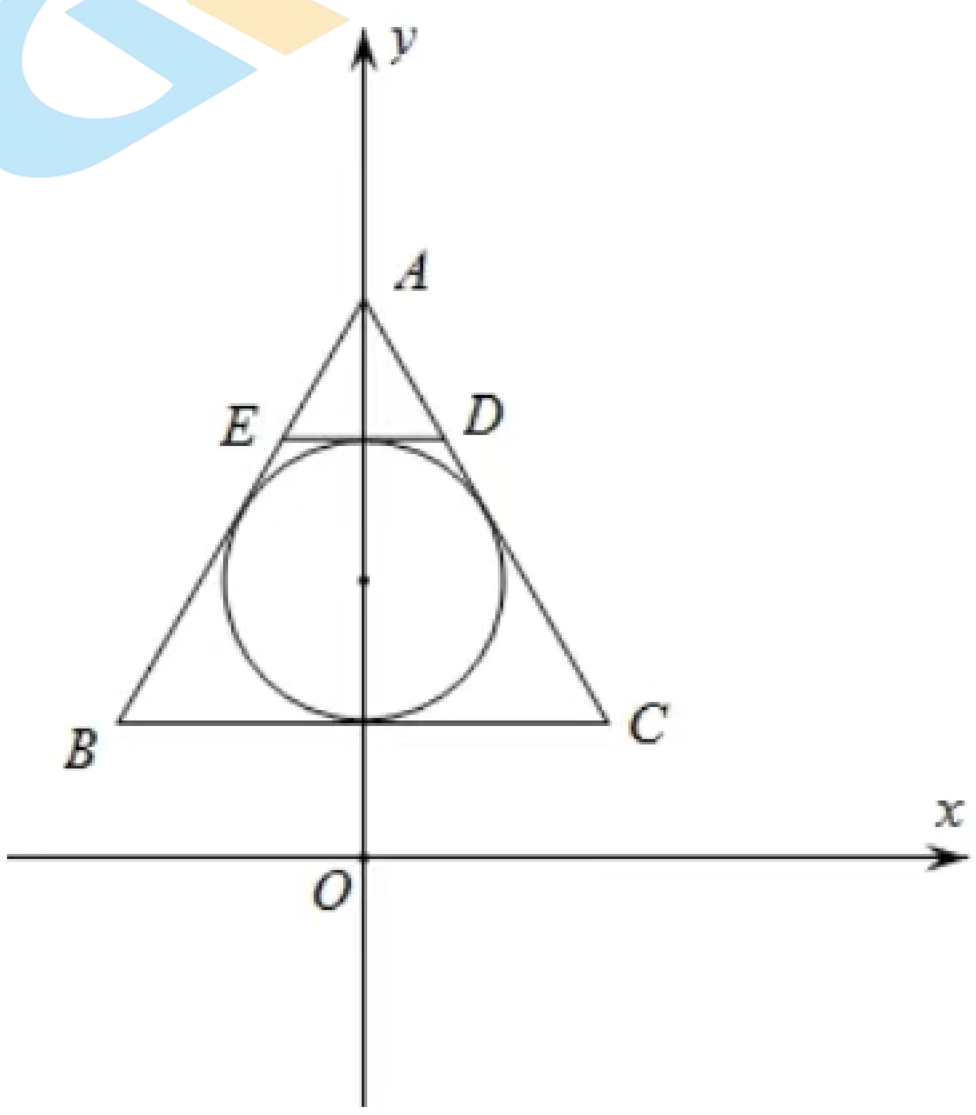
①：由于直线系表示圆$x^2+(y-2)^2=1$的所有切线，其中存在两条切线平行，M中所有直线均经过一个定点不可能，故①不正确；

②：直线系表示圆$x^2+(y-2)^2=1$的所有切线，故圆内部的点不在M中的任一条直线上，所以存在无数多个点不在M中的任一条直线上，故②正确；

③：由于圆的所有外切正多边形的边都是圆的切线，所以对于任意整数$n(n\ge3)$，存在正n边形，其所有边均在M中的直线上，故③正确；

④：如图，M中的直线所能围成的正三角形有两类，其一是如$\triangle ABC$是圆的外切三角形，此类面积都相等，另一类是在圆同一侧，如$\triangle ADE$型，此一类面积相等，但两类之间面积不等，所以面积大小不一定相等，故④不正确.

故选：B.



二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分

11. 【答案】$\dfrac{21}{2}$ ##10.5

【分析】由向量平行可设$m=tn$，可得$\begin{cases}8=2bt\\3=6t\\a=5t\end{cases}$，解方程即可得解.

【详解】由 $\vec{m}//\vec{n}$ 设 $\vec{m}=t\vec{n}$，则 $\begin{cases}8=2bt\\3=6t\\a=5t\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=8\\a=\dfrac{5}{2}\end{cases}$，

所以 $a+b=\dfrac{21}{2}$，

故答案为：$\dfrac{21}{2}$.

12.【答案】2

【分析】根据平行直线间距离公式可直接求得结果.

【详解】由平行直线间距离公式可得：l_1,l_2 之间的距离 $d=\dfrac{8+2}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$.

故答案为：2.

13.【答案】$\left[0,\dfrac{3}{4}\right]$

【分析】已知等式变形后得到圆方程，找出圆心和半径，令 $t=\dfrac{y-2}{x-4}$，得到 $tx-y-4t+2=0$，根据直线和圆有公共点列式求解即可.

【详解】令 $t=\dfrac{y-2}{x-4}$，即 $tx-y-4t+2=0$，表示一条直线，

又方程 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 可化为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，表示圆心为 $(1,1)$，半径为1的圆，

由题意可知圆与直线有公共点，

所以圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|t-1-4t+2|}{\sqrt{t^2+1}}\le 1$，解得 $0\le t\le \dfrac{3}{4}$，

即 $\dfrac{y-2}{x-4}$ 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{3}{4}\right]$，

故答案为：$\left[0,\dfrac{3}{4}\right]$

14.【答案】 ①. $\dfrac{11\sqrt{5}}{5}+4$ ②. $3\sqrt{2}$

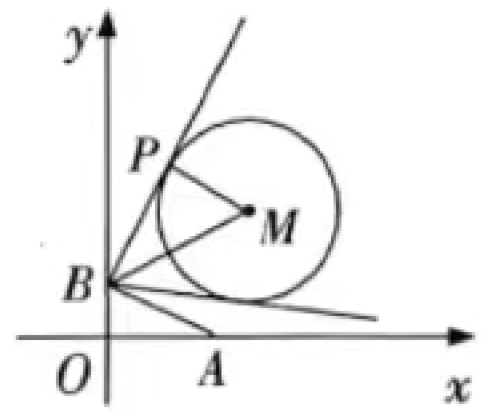
【分析】先求出直线 AB 的方程，由圆心到直线的距离加上半径可得最大值；找到当 $\angle PAB$ 最大时 P 点所在的位置，再结合勾股定理可得 $|BP|$ 的值.

【详解】由题意可得 AB 的直线方程为 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$，即 $x+2y-4=0$，

圆的圆心坐标为 $(5,5)$，半径为 4，

圆心(5,5)到直线 AB 的距离为 $\dfrac{|5+2\times5-4|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{11\sqrt{5}}{5}$，

所以点 P 到直线 AB 的距离的最大值为 $\dfrac{11\sqrt{5}}{5}+4$，

如图：
，

当 $\angle PAB$ 最大或最小时，直线 PB 与圆相切，上图的 P 点位置满足 $\angle PAB$ 最大的情况，

$|BM|=\sqrt{(0-5)^2+(2-5)^2}=\sqrt{34}$，$|PM|=4$，所以 $|BP|=\sqrt{34-16}=3\sqrt{2}$，

故答案为：$\dfrac{11\sqrt{5}}{5}+4$；$3\sqrt{2}$.

15.【答案】②③

【分析】①问题化为对于任意点 H，是否存在点 P，使面 $AHP\perp$ 面 A_1B_1C，由已知证面 $A_1B_1C\perp$ 面 BB_1C_1C，结合面面垂直判定判断存在性即可；②将 $\triangle ABC$ 绕 BC 翻折到平面 BB_1C 内，证 $\triangle AB_1C$ 为等边三角形，进而确定 $f(x,y)$ 的最小值；③ P 为 CB_1 的中点，H 为 $\triangle AB_1C$ 的重心，平面 BCC_1B_1 中，延长 HP 交 B_1C_1 于点 M，取 B_1M 的中点 Q，N 为 A_1C_1 的中点，证过点 A,H,P 的三棱柱的截面为梯形 $AHMN$，根据已知求其面积；④由 $HB\ge\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ 时，$AH\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，进而得到 $AH+HR\le f(x,y)\le 2AH$，几何法确定不等式两端的范围，即可判断.

【详解】①因为三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱锥，所以 $BB_1\perp$ 面 $A_1B_1C_1$，又 $A_1B_1\subset$ 面 $A_1B_1C_1$，

所以 $BB_1\perp A_1B_1$，又 $\angle ABC=90^\circ$，所以 $\angle A_1B_1C_1=90^\circ$，所以 $A_1B_1\perp B_1C_1$，

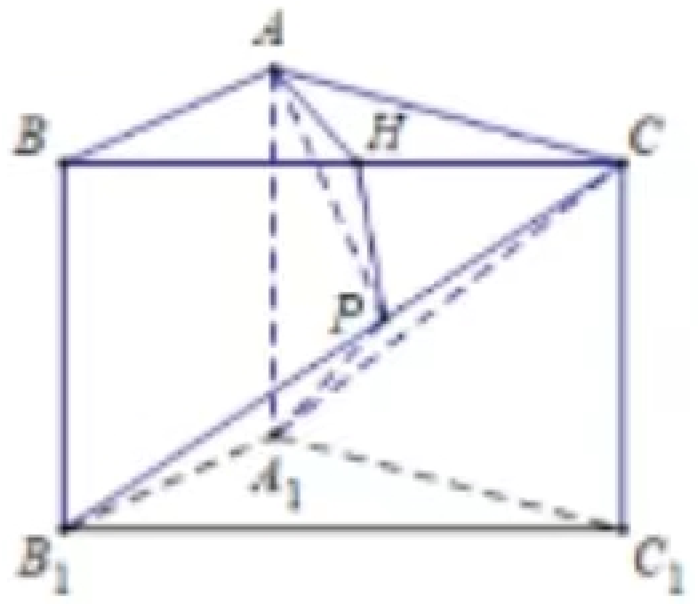
由 $BB_1\cap B_1C_1=B_1$，$BB_1,B_1C_1\subset$ 面 BB_1C_1C，故 $A_1B_1\perp$ 面 BB_1C_1C，$A_1B_1\subset$ 面 A_1B_1C，

所以面 $A_1B_1C\perp$ 面 BB_1C_1C，而 $H\in BC,P\in CB_1$ 且都在面 BB_1C_1C 内，

由于面 A_1B_1P 即为面 A_1B_1C，要使面 $AHP\perp$ 面 A_1B_1P，只需面 $AHP\perp$ 面 A_1B_1C，

综上，$HP\perp$ 面 A_1B_1C 时，$HP\subset$ 面 AHP，此时面 $AHP\perp$ 面 A_1B_1C，即面 $AHP\perp$ 面 A_1B_1P，

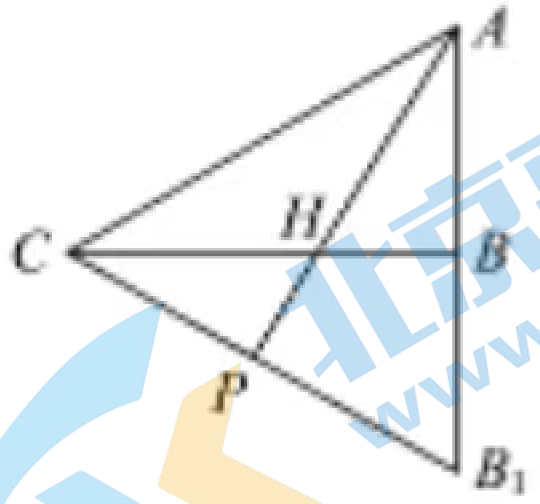
对于任意点 H，只需对应 HP 平行于 $\triangle BCB_1$ 中 CB_1 边上的高时，均满足要求，错；



②将$\triangle ABC$绕BC翻折到平面BB_1C内，则$AH+HP$的最小值为点A到直线CB_1的距离，

又$AB=BB_1=\sqrt{3}$，$BC=3$，$\angle ABC=\angle B_1BC=90^\circ$，所以$AC=CB_1=AB_1=2\sqrt{3}$，

所以A到直线CB_1的距离为3，所以$f(x,y)$的最小值为3，对；



③当$f(x,y)$取最小时，P为CB_1的中点，因为$\triangle AB_1C$为等边三角形，B为AB_1的中点，

所以H为$\triangle AB_1C$的重心，故$BH=\frac{1}{3}BC$，

在平面BCC_1B_1中，延长HP交B_1C_1于点M，

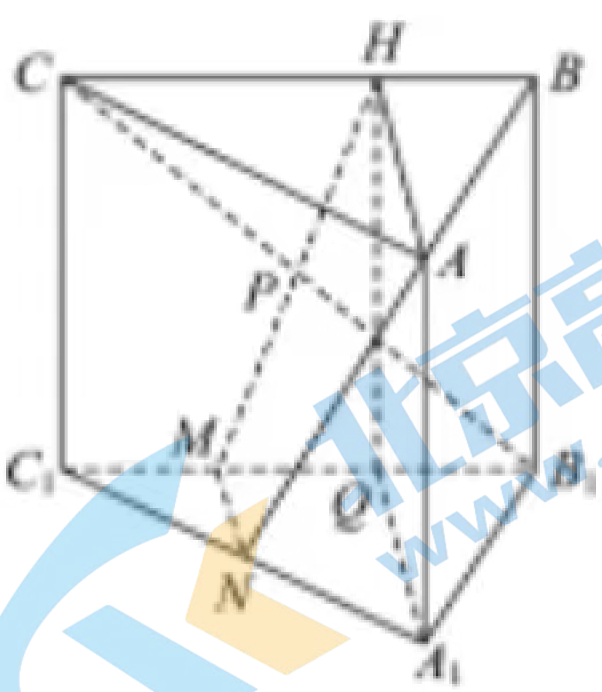
因为$PC=PB_1$，$\angle PB_1M=\angle PCH$，$\angle B_1PM=\angle HPC$，所以$\triangle PB_1M\cong\triangle PCH$，故$B_1M=CH=\frac{2}{3}$，

取B_1M的中点Q，N为A_1C_1的中点，则$MN//A_1Q$，

因为$BH//B_1Q$，$BH=B_1Q$，所以四边形BB_1QH为平行四边形，则$HQ//BB_1,HQ=BB_1$，

又$AA_1//BB_1,AA_1=BB_1$，所以$A_1Q//AH$，所以$MN//AH$，

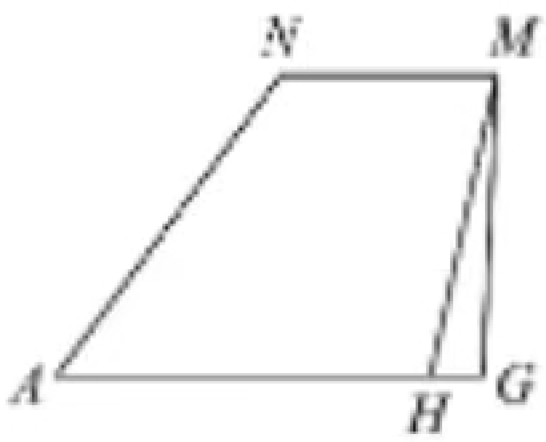
故过点A,H,P的三棱柱的截面为梯形$AHMN$，



$AH=\frac{2}{3}\sqrt{AC^2-PC^2}=2$，$MN=\frac{1}{2}A_1Q=1$，$MH=\sqrt{MQ^2+HQ^2}=2$，

$AN=\sqrt{A_1A^2+A_1N^2}=\sqrt{6}$，

如下图，过M作$MG\perp AH$，设$HG=x,MG=y$，



因为$MH^2=HG^2+MG^2,AN^2=(AG-MN)^2+MG^2$，则$\begin{cases}x^2+y^2=MH^2=4\\(x+1)^2+y^2=6\end{cases}$，

所以$x=\frac{1}{2},y=\frac{\sqrt{15}}{2}$，则梯形$AHMN$的面积为$\frac{1}{2}(MN+AH)\cdot MG=\frac{3\sqrt{15}}{4}$，错；

④当$HB\geq\frac{\sqrt{15}}{2}$时，$AH\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$，结合题设知$AH+HP\leq AH+HB_1=2AH$，

在下图中过点H作$HR\perp BC$，垂足为R，则$AH+HP\geq AH+HR$，

综上，$AH+HR\leq f(x,y)\leq 2AH$，

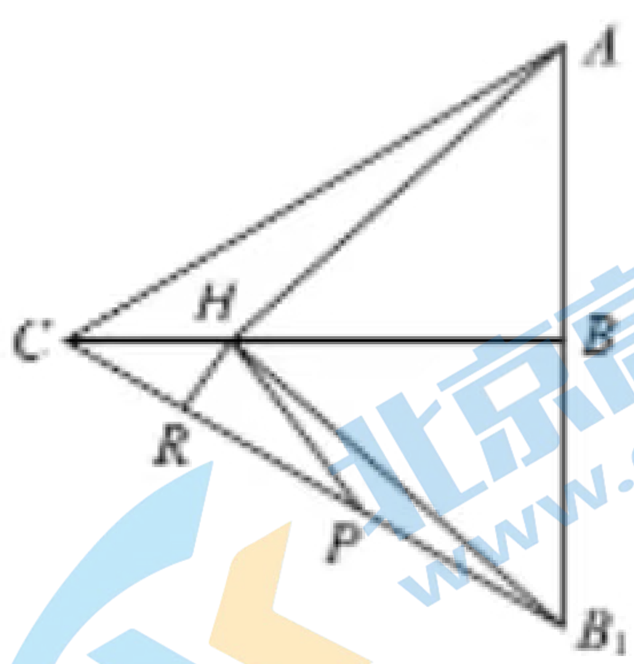
又$AH+HR<AH+HC<AC+BC-BH<2\sqrt{3}+3-\frac{\sqrt{15}}{2}<3\sqrt{3}$，$2AH\geq 3\sqrt{3}$，

（对于$2\sqrt{3}+3-\frac{\sqrt{15}}{2}<3\sqrt{3}$：只需$3-\frac{\sqrt{15}}{2}<\sqrt{3}$，只需$6<\sqrt{12}+\sqrt{15}$，

即$36<(\sqrt{12}+\sqrt{15})^2=27+12\sqrt{5}$，则$3<4\sqrt{5}$显然成立.）

故对于任意的点H，当$HB\geq\frac{\sqrt{15}}{2}$时，都存在对应的点$P$，满足$AH+HP=3\sqrt{3}$，

故满足$f(x,y)=3\sqrt{3}$的点P有无数个，对；



故答案为：②③

【点睛】关键点点睛：③利用平面基本性质找到截面并证明其为梯形，求出相关线段长为关键；④注意取

$HB \geq \frac{\sqrt{15}}{2}$ 时，$AH \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$，过点 H 作 $HR \perp BC$，垂足为 R，并得到 $AH+HR \leq f(x,y) \leq 2AH$ 为关键.

三、解答题共 5 小题，共 55 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）详见解析

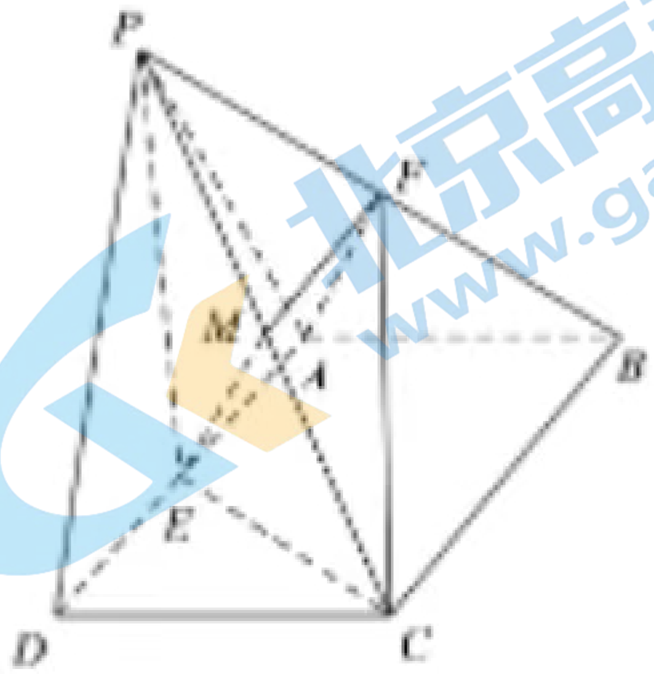
（2）$\frac{\sqrt{26}}{13}$

【分析】（1）作出辅助线，证明线线平行，进而证明出线面平行；

（2）建立空间直角坐标系，利用空间向量求解线面角；

【小问 1 详解】

取 PC 的中点 M，连接 MF，ME，



因为 F 是 PB 的中点，所以 MF 是三角形 PBC 的中点，所以 $MF /\!/ BC$，且 $MF=\frac{1}{2}BC$，

因为底面 $ABCD$ 为矩形，E 是 AD 的中点，所以 $AE /\!/ BC$，$AE=\frac{1}{2}BC$，所以 $MF /\!/ AE$，且 $MF=AE$，

所以四边形 $AFME$ 是平行四边形，故 $AF /\!/ ME$，

因为 $AF \not\subset$ 平面 PCE，$ME \subset$ 平面 PCE，所以 $AF /\!/$ 平面 PCE.

【小问 2 详解】

因为侧面 PAD 是正三角形，E 是 AD 的中点，所以 $PE \perp AD$，又因为侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$，交线为 AD，所以 $PE \perp$ 底面 $ABCD$，

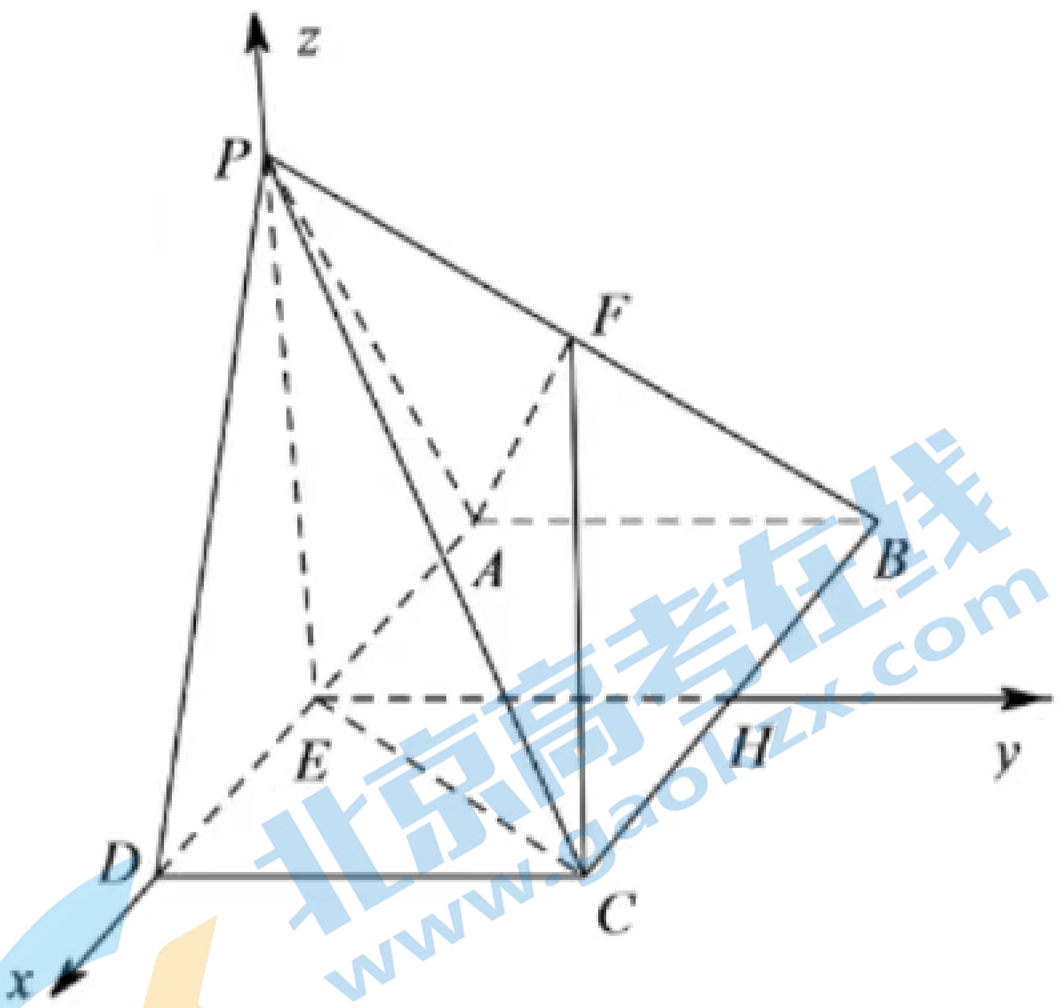
以 E 为坐标原点，ED 所在直线为 x 轴，取 BC 中点 H，EH 所在直线为 y 轴，EP 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系，$C(1,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$B(-1,1,0)$，$F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$E(0,0,0)$，

设平面 PEC 的法向量 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\vec{m}=-x_1-y_1=0\\ \overrightarrow{EP}\cdot\vec{m}=\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，解得：$z_1=0$，

令 $x_1=1$ 得：$y_1=-1$，所以 $\vec{m}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{CF}=(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

设直线 CF 与平面 PCE 所成角为 α，故 $\sin\alpha=\left|\cos\langle\overline{CF},\overline{m}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overline{CF}\cdot\overline{m}\right|}{\left|\overline{CF}\right|\left|\overline{m}\right|}=\dfrac{\sqrt{26}}{13}$；

所以直线 CF 与平面 PCE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{26}}{13}$.



17.【答案】(1) AB 中点 $(1,2)$，$C:(x-1)^2+(y-2)^2=2$

(2) $l:x+y-1=0$

【分析】(1) 根据中点坐标公式即可求得 A,B 的中点，即圆心坐标，利用两点间距离公式可求得直径 AB，即可写出圆 C 的方程；

(2) 根据直线和圆的位置关系可得切线 l 的斜率，再利用点斜式方程即可求得切线 l 的方程.

【小问 1 详解】

由点 $A(0,1)$ 和点 $B(2,3)$ 是圆 C 直径的两个端点，

可得 AB 的中点即为圆心 C，根据中点坐标公式可得 $C(1,2)$，

即线段 AB 的中点坐标为 $C(1,2)$，根据两点间距离公式得直径 $AB=\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$，

所以圆 C 的半径为 $r=\sqrt{2}$，

则圆的方程为 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=2$

【小问 2 详解】

根据题意可知直线 AB 与切线 l 垂直，直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\dfrac{3-1}{2-0}=1$，

设切线 l 的斜率为 k，满足 $k\cdot k_{AB}=-1$，得 $k=-1$；

又切线 l 过点 A，利用直线的点斜式方程得 $l:y-1=-1\times(x-0)$；

即切线 l 的方程为 $l:x+y-1=0$.

18.【答案】（1）见解析　（2）$\dfrac{2\sqrt{51}}{17}$

（3）不存在，理由见解析

【分析】（1）根据面面垂直的性质即可得出结论；

（2）如图，以 D 为原点，建立空间直角坐标系，分别求出两个平面的法向量，利用向量法即可得出答案；

（3）假设存在，设此时 $BF=\lambda BC$，分别求出 $\overrightarrow{MF},\overrightarrow{PC}$，根据 $MF//PC$，可得存在唯一的实数 μ，使得 $\overrightarrow{MF}=\mu\overrightarrow{PC}$，列出方程组，解得即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明：因为平面 $ABCD\perp$ 平面 PCD，平面 $ABCD\cap$ 平面 $PCD=CD$，

$AD\perp DC$，所以 $AD\perp$ 平面 PCD；

【小问 2 详解】

解：作 z 轴 $\perp$ 平面 $ABCD$，则 z 轴在平面 PCD 中，

如图，以 D 为原点，建立空间直角坐标系，

则 $P\left(0,-1,\sqrt{3}\right),D(0,0,0),A(2,0,0),B(2,1,0),C(0,2,0)$，

则 $\overrightarrow{DA}=(2,0,0),\overrightarrow{DP}=\left(0,-1,\sqrt{3}\right),\overrightarrow{PC}=\left(0,3,-\sqrt{3}\right),\overrightarrow{BC}=(-2,1,0)$，

设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 PAD 的法向量，$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 PBC 的法向量，

则有 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DA}=2x_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DP}=-y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，可取 $\vec{m}=\left(0,\sqrt{3},1\right)$，

同理，可取 $\vec{n}=\left(1,2,2\sqrt{3}\right)$，

则 $\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{17}}=\dfrac{2\sqrt{51}}{17}$，

所以平面 PAD 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{51}}{17}$；

【小问 3 详解】

解：假设存在，设此时 $BF=\lambda BC$，

$M\left(1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BC}=(-2\lambda,\lambda,0)$，$\overrightarrow{MA}=\left(1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

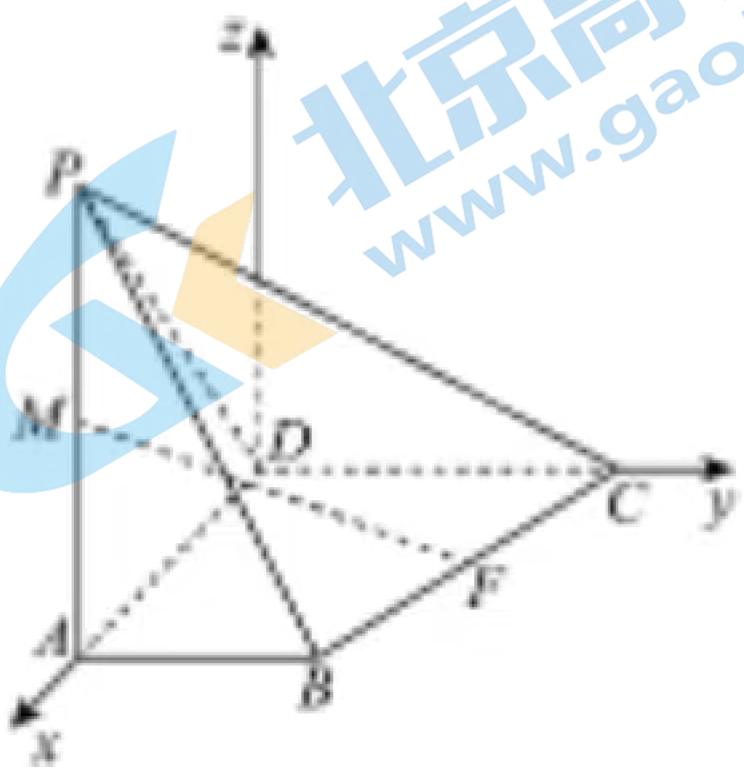
则 $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\left(1-2\lambda,\frac{3}{2}+\lambda,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

因为 $MF//PC$，则 $\overrightarrow{MF}//\overrightarrow{PC}$，

所以存在唯一的实数 μ，使得 $\overrightarrow{MF}=\mu\overrightarrow{PC}$，即 $\left(1-2\lambda,\frac{3}{2}+\lambda,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(0,3\mu,-\sqrt{3}\mu\right)$，

所以 $\begin{cases}1-2\lambda=0\\ \frac{3}{2}+\lambda=3\mu\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}\mu\end{cases}$，方程组无解，与题设矛盾，

所以不存在一点 F，使 $MF//PC$.



19. 【答案】19. $x^2-x+y^2=0$ 或 $x^2+y^2-5x-4y+4=0$

20. 存在；$x^2+y^2=5$

【分析】（1）根据圆的一般方程确定圆心和半径，由题意列出方程，即可求得答案；

（2）先求出点 M 的坐标，假设符合题意的圆存在，当直线斜率存在时，设出直线的方程并和圆的方程联立，可得根与系数的关系，结合 $\angle ANM=\angle BNM$ 得出 $k_{NA}+k_{NB}=0$，即 $\frac{y_1}{x_1-5}+\frac{y_2}{x_2-5}=0$，利用根与系数的关系化简求值，结合验证直线 AB 的斜率不存在时是否适合题意，即可得出结论.

【小问 1 详解】

由已知圆 C：$x^2-(1+a)x+y^2-ay+a=0$ 知圆心为 $(\frac{1+a}{2},\frac{a}{2})$，

半径为 $R=\frac{\sqrt{(1+a)^2+a^2-4a}}{2}=\frac{\sqrt{2a^2-2a+1}}{2}$，

由于圆 C 与 y 轴相切，故 $|\frac{1+a}{2}|=\frac{\sqrt{2a^2-2a+1}}{2}$，即 $a^2-4a=0$，

解得 $a=0$ 或 $a=4$，

故圆 C 的方程为：$x^2-x+y^2=0$ 或 $x^2+y^2-5x-4y+4=0$；

【小问 2 详解】

当 $a=5$ 时，圆 C 方程为 $x^2-6x+y^2-5y+5=0$，

令 $y=0$，则 $x^2-6x+5=0$，解得 $x=1$ 或 $x=5$，

故 $M(1,0),N(5,0)$，

假设存在圆 O：$x^2+y^2=r^2$，使得过点 M 的任一条直线与该圆的交点为 A，B，都有 $\angle ANM=\angle BNM$，

则必有 M 点在圆 $x^2+y^2=r^2$ 内，即 $r>1$；

当直线 AB 与 x 轴不垂直时，设其方程为 $y=k(x-1)$，联立 $x^2+y^2=r^2$，

得 $\left(1+k^2\right)x^2-2k^2x+k^2-r^2=0$，由于直线 AB 经过点 M，M 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 内，

则必有 $\Delta>0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{2k^2}{1+k^2},x_1x_2=\dfrac{k^2-r^2}{1+k^2}$，

由 $\angle ANM=\angle BNM$ 可知 $k_{NA}+k_{NB}=0$，由题意知 $\angle ANM=\angle BNM$ 不可能为直角，

故 $x_1\neq 5,x_2\neq 5$，故 $\dfrac{y_1}{x_1-5}+\dfrac{y_2}{x_2-5}=0$，

即 $\dfrac{k[(x_1-1)(x_2-5)+(x_2-1)(x_1-5)]}{(x_1-5)(x_2-5)}=0$，

即 $(x_1-1)(x_2-5)+(x_2-1)(x_1-5)=2x_1x_2-6(x_1+x_2)+10=0$

即 $2\times\dfrac{k^2-r^2}{1+k^2}-6\times\dfrac{2k^2}{1+k^2}+10=\dfrac{10-2r^2}{1+k^2}=0$，则 $r^2=5$，

当直线 AB 与 x 轴垂直时，A,B 关于 x 轴对称，显然 $\angle ANM=\angle BNM$，符合题意，

综上可知，存在圆 $x^2+y^2=5$，使得过点 M 的任一条直线与该圆的交点为 A，B，都有 $\angle ANM=\angle BNM$．

【点睛】关键点睛：本题考查圆的方程的应用以及直线和圆的位置关系中的探索问题，解答的关键是假设探索性问题的结论存在，由此利用直线和圆的方程联立，结合根与系数的关系，由 $\angle ANM=\angle BNM$ 得 $k_{NA}+k_{NB}=0$，进而列方程化简求解，即可得出结论.

20.【答案】（1）A_4 具有性质 P，$T_4=\{(2,4)\}$，A_5 不具有性质 P

（2）见解析　（3）$n-3$

【分析】（1）根据性质 P 的定义判断 A_4,A_5 是否满足题意，同时根据 T_n 的定义写出 T_n；

（2）利用反证法证明 $(1,3),(2,4)$ 至少有一个在 T_4 中，$T_4\neq\varnothing$ 即可得证；

（3）设 T_n 中元素个数最小为 d_n，根据新定义可知 $d_n\geq d_{n-1}+1$，以此类推可得 $d_n\geq d_4+n-4$，由（2）

知 $d_4 \ge 1$，则 $d_n \ge n-3$，再进行证明即可.

【小问 1 详解】

解：由题知 A_4：1，0.1，-0.2，0.5，即 $a_1=1, a_2=0.1, a_3=-0.2, a_4=0.5$，

因为 $|a_1-a_0|=|a_1-a_4|=0.5\le 1, |a_2-a_1|=0.9\le 1, |a_3-a_2|=0.3\le 1, |a_4-a_3|=0.7\le 1$，

所以 A_4 具有性质 P，

又因为 $T_n=\{(i,j)\,\big|\,|a_i-a_j|\le 1, 2\le j-i\le n-2\,(i,j=1,2,\cdots,n)\}$，

所以当 $n=4$ 时，$2\le j-i\le 4-2$，即 $j-i=2$，

所以可得 $|a_1-a_3|=1.2>1, |a_2-a_4|=0.4\le 1$，所以 $T_4=\{(2,4)\}$；

又由题知 A_5：1，2，0.7，1.2，2，即 $a_1=1, a_2=2, a_3=0.7, a_4=1.2, a_5=2$，

因为 $|a_3-a_2|=1.3>1$，所以 A_5 不具有性质 P；

所以 A_4 具有性质 P，$T_4=\{(2,4)\}$，A_5 不具有性质 P.

【小问 2 详解】

证明：要证 $T_4\ne\varnothing$，即证：$(1,3),(2,4)$ 两个元素至少有一个在 T_4 中，

假设 $(1,3),(2,4)$ 两个元素均不在 T_4 中，则 $|a_1-a_3|>1, |a_2-a_4|>1$，

不妨设 $a_1\le a_2$，若 $a_2>a_3$，则 $-1\le a_1-a_2\le 0, 0<a_2-a_3\le 1$，

又由 $a_1-a_3=a_1-a_2+a_2-a_3$，则 $-1<a_1-a_3\le 1$，

与 $|a_1-a_3|>1$ 矛盾，所以 $a_2\le a_3$，同理可得：$a_3\le a_4$，

所以 $a_1\le a_2\le a_3\le a_4$，所以 $|a_1-a_0|=|a_1-a_4|=a_4-a_1=a_4-a_2+a_2-a_1\ge a_4-a_2>1$，

这与 A_4 具有性质 P 矛盾，所以假设不成立，即 $T_4\ne\varnothing$ 得证.

【小问 3 详解】

设 $a_k=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},(2\le k\le n-1)$，

规定 $k=1$ 时，$a_{k-1}=a_n$，$k=n$ 时，$a_{k+1}=a_1$，

则 $a_{k-1},a_{k+1}\in[a_k,a_k+1]$，所以 $|a_{k+1}-a_{k-1}|\le 1$，

考虑数列 $B_3: a_{k-1},a_k,a_{k+1}$，$C_{n-1}: a_1,a_2,\cdots,a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_n$，

由题设可知，他们均具有性质 P，设 T_n 中元素个数最小为 d_n，

则可得 $d_n\ge d_{n-1}+1$，所以 $d_n\ge d_{n-1}+1\ge d_{n-2}+2\ge\cdots\ge d_4+n-4$，

由（2）知 $d_4\ge 1$，则 $d_n\ge n-3$，

当 $n=2m+1$ 时，令 $a_i=i(i=1,2,\cdots,m)$，$a_{m+i}=m+\dfrac{3}{2}-i(i=1,2,\cdots,m+1)$，

当 $n=2m$ 时，令 $a_i=i(i=1,2,\cdots,m)$，$a_{m+i}=m+\frac{1}{2}-i(i=1,2,\cdots,m)$，

此时均有 $d_n=n-3$，所以 T_n 中元素个数的最小值为 $n-3$.

【点睛】思路点睛：此题考查数列与集合结合的新定义问题，属于难题.

关于新定义题型的思路有：

（1）找出新定义有几个要素，找出要素分别代表什么意思；

（2）根据已知条件和所求，通过分析把所求转化为数学语言；

（3）将已知条件代入新定义要素中；

（4）最后结合所学数学知识进行规范的解答.