2023 北京八一学校高一（下）期中

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 在平面直角坐标系中，点 $P(\sin 100°, \cos 200°)$ 位于第（　）象限．

A. 一　　B. 二　　C. 三　　D. 四

2. 在 $\triangle ABC$ 中，“$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$”是“$A=\frac{\pi}{4}$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 下列函数中最小正周期为 π，且为偶函数的是（　）

A. $y=\cos(2x+\frac{\pi}{2})$　　B. $y=|\sin x|$

C. $y=\tan x$　　D. $y=\cos 3x$

4. 一个扇形的圆心角为 150°，面积为 $\frac{5\pi}{3}$，则该扇形半径为（　）

A. 4　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

5. 已知 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，则 $\frac{-2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ 的值为（　）

A. -3　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

6. 将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $g(x)$ 图象，则函数的解析式是（　）

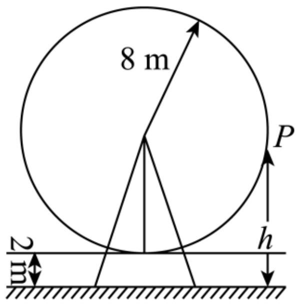
A. $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

C. $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

7. 已知向量 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=2\sqrt{3}$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　）

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

8. 如图所示，一个大风车的半径为 $8m$，每 $12\min$ 旋转一周，最低点离地面 $2m$，若风车翼片从最低点按逆时针方向开始旋转，则该翼片的端点 P 离地面的距离 $h(m)$ 与时间 $t(\min)$ 之间的函数关系是



A. $h=8\cos\frac{\pi}{6}t+10$

B. $h=-8\cos\frac{\pi}{3}t+10$

C. $h=-8\sin\frac{\pi}{6}t+10$

D. $h=-8\cos\frac{\pi}{6}t+10$

9. 在 $\triangle ABC$ 中，$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$，$AB=4, AC=2$，$E, F$ 为线段 BC 的三等分点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ =(　　)

A. $\frac{10}{9}$

B. 4

C. $\frac{40}{9}$

D. $\frac{56}{9}$

10. 已知动点 $P_1\left(x_1,\cos x_1\right)$，$P_2\left(x_2,\cos x_2\right)$，$O$ 为坐标原点，则当 $-1\le x_1\le x_2\le 1$时，下列说法正确的是（　　）

A. $\left|\overrightarrow{OP_1}\right|$ 有最小值 1

B. $\left|\overrightarrow{OP_1}\right|$ 有最小值，且最小值小于 1

C. $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}\ge 0$ 恒成立

D. 存在 x_1，x_2 使得 $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}\ge 2$

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．

11. $\sin 20°\cos 10°-\cos 160°\sin 10°=$______.

12. 已知角 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(-\frac{3}{5},y\right)$，则 $\sin\alpha\cdot\tan\alpha$ ________.

13. 若实数 α，β 满足方程组 $\begin{cases}1+\cos\alpha=\cos\beta\\ \sin\alpha=\sin\beta\end{cases}$，则 β 的一个值是________.

14. 已知 α，$\beta\in(0,\frac{3\pi}{4})$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，$\sin(\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{12}{13}$，则 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=$________

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin\frac{\pi}{2}x$，任取 $t\in\mathbf{R}$，定义集合：

$A_t=\left\{y\middle|y=f\left(x\right)，点 P\left(t,f\left(t\right)\right)，Q\left(x,f\left(x\right)\right) 满足 \left|PQ\right|\le\sqrt{2}\right\}$

设 M_t，m_t 分别表示集合 A_t 中元素的最大值和最小值，记 $h\left(t\right)=M_t-m_t$，则

（1）函数 $h\left(t\right)$ 的最大值是______；

（2）函数 $h(t)$ 的单调递增区间为______.

三、解答题共 4 小题，共 40 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 已知函数 $f(x)=\cos^2 x+\sin x-1$.

（1）当 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，求函数 $y=f(x)$ 的值；

（2）求不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集.

17. 在平面直角坐标系中,已知三点 $A(-1,0),B(t,2),C(2,t),t\in\mathbf{R},O$ 为坐标原点,

（1）若 $\triangle ABC$ 是 $\angle B$ 为直角的直角三角形，求 t 的值；

（2）若四边形 $ABCD$ 是平行四边形，求 $\left|\overrightarrow{OD}\right|$ 的最小值.

18. 已知函数 $f(x)=2\sqrt{2}\cos x\cdot\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$， $x\in\mathbf{R}$.

（1）请化简为正弦型函数，并求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最值，及取得最值时 x 的值.

（3）若 $\forall x_1,x_2\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，都有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\leq m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

19. 对于定义域 R 上的函数 $f(x)$，如果存在非零常数 T，对任意 $x\in\mathbf{R}$ ，都有 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为“T 函数”.

（1）设函数 $f(x)=x$ ，判断 $f(x)$ 是否为“T 函数”，说明理由；

（2）若函数 $g(x)=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图象与函数 $y=x$ 的图象有公共点，证明：$g(x)$ 为“T 函数”；

（3）若函数 $h(x)=\cos mx$ 为“T 函数”，求实数 m 的取值范围.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】D

【解析】

【分析】由钝角的正弦值大于 0，再由诱导公式得 $\cos 200^\circ < 0$，即可得到答案.

【详解】$\because \sin 100^\circ > 0$，$\cos 200^\circ = \cos\left(180^\circ + 20^\circ\right) = -\cos 20^\circ < 0$，

$\therefore$ 点 $P\left(\sin 100^\circ, \cos 200^\circ\right)$ 位于第四象限.

故选：D.

【点睛】本题考查三角函数值的符号、诱导公式的应用，考查转化与化归思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，属于基础题.

2.【答案】B

【解析】

【分析】根据正弦函数的性质和充分和必要条件的概念即可判断.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $A = \dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$，

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中，“$\sin A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$”是“$A = \dfrac{\pi}{4}$”的必要不充分条件，

故选：B.

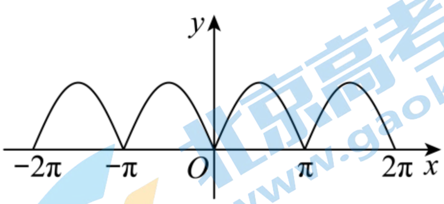
3.【答案】B

【解析】

【分析】化简并判断 $y = \cos(2x + \dfrac{\pi}{2})$ 的奇偶性，判断 A；利用图像可判断 B；根据函数奇偶性判断 C；根据函数的最小正周期可判断 D.

【详解】对于 A，$y = \cos(2x + \dfrac{\pi}{2}) = -\sin 2x$ 为奇函数，不符合题意；

对于 B，作出 $y = |\sin x|$ 的图象如图：



可知函数 $y = |\sin x|$ 最小正周期为 π，且为偶函数，符合题意；

对于 C，$y = \tan x$ 为奇函数，不符合题意；

对于 D，$y=\cos 3x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$，不符合题意，

故选：B

4.【答案】D

【解析】

【分析】利用扇形的面积公式：$S=\frac{1}{2}\cdot\alpha R^2$，即可求解.

【详解】圆心角为 $\alpha=150^{\circ}=\frac{5\pi}{6}$，设扇形的半径为 R，

$S=\frac{1}{2}\cdot\alpha R^2\Rightarrow\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{5\pi}{6}R^2$，

解得 $R=2$.

故选：D

【点睛】本题考查了扇形的面积公式，需熟记公式，属于基础题.

5.【答案】A

【解析】

【分析】

利用同角三角函数的基本关系求解即可.

【详解】由 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，

得 $\frac{-2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{-2}{1+\tan\alpha}=\frac{-2}{\frac{2}{3}}=-3$.

故选：A.

【点睛】本题主要考查了同角三角函数的基本关系.属于容易题.

6.【答案】C

【解析】

【分析】由题意利用三角函数的图象变换原则，即可得出结论.

【详解】由题意，将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，

可得 $g(x)=\sin 2(x-\frac{\pi}{6})=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$.

故选 C.

【点睛】本题主要考查三角函数的图像变换，熟记图像变换原则即可，属于常考题型.

7.【答案】C

【解析】

【分析】将$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=2\sqrt{3}$平方，求得$\vec{a}\cdot\vec{b}$，再根据向量的夹角公式即可求得答案.

【详解】由题意向量$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=1$，$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=2\sqrt{3}$，

则$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=12$，即$\vec{a}^2+4\vec{b}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=12$，

所以$4+4-4\vec{a}\cdot\vec{b}=12,\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，

故$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}$，而$0^\circ\le\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\le180^\circ$，

故$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=120^\circ$，

故选：C

8.【答案】D

【解析】

【分析】由题意得出h的最大值和最小值，以及最小正周期T，可求出A、B、ω的值，再将点$(0,2)$代入函数解析式求出φ的值，由此可得出h与t之间的函数关系式.

【详解】由题意可得$h_{\max}=18$，$h_{\min}=2$，$T=12$，$\therefore A=\dfrac{h_{\max}-h_{\min}}{2}=8$，$B=\dfrac{h_{\max}+h_{\min}}{2}=10$，

$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{6}$，$h=8\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}+\varphi\right)+10$，当$t=0$时，$8\sin\varphi+10=2$，得$\sin\varphi=-1$，

$\sin\varphi=-1$，可取$\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$，所以$h=8\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t-\dfrac{\pi}{2}\right)+10=-8\cos\dfrac{\pi}{6}t+10$，故选D.

【点睛】本题考查函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b\,(A>0,\omega>0)$的解析式，基本步骤如下：

（1）求A、b：$A=\dfrac{f(x)_{\max}-f(x)_{\min}}{2}$，$b=\dfrac{f(x)_{\max}+f(x)_{\min}}{2}$；

（2）求ω：根据题中信息得出最小正周期T，可得出$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$；

（3）求初相φ：将对称中心点、最高点或最低点代入函数解析式可求出φ的值.

9.【答案】C

【解析】

【分析】根据题意得出$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，建立平面直角坐标系，表示出$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{AF}$，求出数量积$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的值.

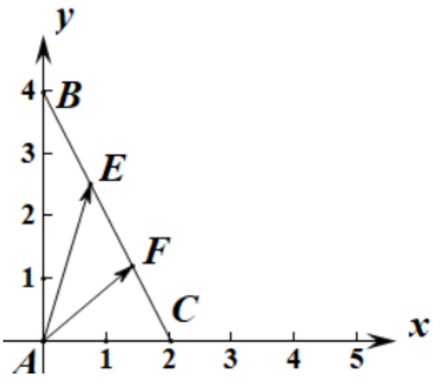
【详解】$\triangle ABC$中，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，

$\therefore\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$，

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

$\therefore\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，

建立如图所示的平面直角坐标系，



由 E，F 为 BC 边的三等分点，

则 A（0，0），B（0，4），C（2，0），E（$\frac{2}{3}$，$\frac{8}{3}$），F（$\frac{4}{3}$，$\frac{4}{3}$），

$\therefore \overrightarrow{AE}=$（$\frac{2}{3}$，$\frac{8}{3}$），$\overrightarrow{AF}=$（$\frac{4}{3}$，$\frac{4}{3}$），

$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}+\frac{8}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{40}{9}$.

故选：C

10.【答案】A

【解析】

【分析】根据题意，由平面向量的数量积运算，结合三角函数的性质，代入计算即可得到结果.

【详解】由题意知，当 $-1\le x_1\le x_2\le 1$ 时，$\left|\overrightarrow{OP_1}\right|^2=f\left(x_1\right)=x_1^2+\cos^2 x_1=1+x_1^2-\sin^2 x_1$

$=1+\left(x_1+\sin x_1\right)\left(x_1-\sin x_1\right)$，

因为函数 $f\left(x_1\right)$ 为偶函数，所以只考虑 $0\le x_1\le 1$ 的情形即可，

又因为 $x_1\ge\sin x_1\ge 0$，所以 $f\left(x_1\right)=1+\left(x_1+\sin x_1\right)\left(x_1-\sin x_1\right)\ge 1$，

即 $\left|\overrightarrow{OP_1}\right|$ 有最小值 1，所以 A 正确，B 错误；

又因为 $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=x_1x_2+\cos x_1\cos x_2$，

当 $x_1=-\frac{\pi}{2},x_2=\frac{\pi}{2}$ 时，$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=-\frac{\pi^2}{4}+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi^2}{4}<0$，所以 C 错误；

又因为 $x_1x_2\le 1$，$\cos x_1\cos x_2\le 1$，但 x_2 与 $\cos x_2$ 不可能同时为 1，

而 $-1\le x_1\le x_2\le 1$，所以 $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=x_1x_2+\cos x_1\cos x_2<2$，所以 D 错误；

故选:A

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

11.【答案】$\frac{1}{2}$ ##0.5

【解析】

【分析】用诱导公式变形后由两角和的正弦公式计算.

【详解】

$\sin 20^\circ\cos 10^\circ-\cos 160^\circ\sin 10^\circ=\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 20^\circ\sin 10^\circ=\sin(20^\circ+10^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，

故答案为：$\frac{1}{2}$.

12.【答案】$-\frac{16}{15}$

【解析】

【分析】根据题意，由条件可得 $y^2=\frac{16}{25}$，再由三角函数的定义即可得到结果.

【详解】由题意可得，$\left(-\frac{3}{5}\right)^2+y^2=1$，则 $y^2=\frac{16}{25}$，

由三角函数的定义可得 $\sin\alpha\cdot\tan\alpha=y\cdot\frac{y}{\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{y^2}{\left(-\frac{3}{5}\right)}=-\frac{16}{15}$.

故答案为：$-\frac{16}{15}$

13.【答案】$\frac{\pi}{3}$（答案不唯一）

【解析】

【分析】结合题意利用同角三角函数的平方关系可求得 $\cos\beta=\frac{1}{2}$，即可求得答案.

【详解】由 $\begin{cases}1+\cos\alpha=\cos\beta\\ \sin\alpha=\sin\beta\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\cos\alpha=\cos\beta-1\\ \sin\alpha=\sin\beta\end{cases}$，

故 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\beta+(\cos\beta-1)^2=1$，即得 $\cos\beta=\frac{1}{2}$，

故 β 的一个值可以取 $\frac{\pi}{3}$，

故答案为：$\frac{\pi}{3}$（答案不唯一）

14.【答案】$\frac{33}{65}$

【解析】

【分析】由诱导公式将 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ 化为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，再由 $\alpha+\frac{\pi}{4}=(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$，根据两角差的

正弦公式，即可求出结果.

【详解】因为α，$\beta\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$，所以$\alpha+\beta\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$，$\beta-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，

又$\sin\left(\alpha+\beta\right)=-\frac{3}{5}$，$\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{12}{13}$，所以$\alpha+\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，$\beta-\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$\cos\left(\alpha+\beta\right)=-\frac{4}{5}$，$\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{13}$，所以

$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left[\left(\alpha+\beta\right)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(\alpha+\beta\right)\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}-\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{12}{13}=\frac{33}{65}$.

故答案为$\frac{33}{65}$

【点睛】本题主要考查简单的三角恒等变换，熟记两角差的正弦公式以及诱导公式，即可求解，属于常考题型.

15.【答案】 ①. 2 ②. $\left(2k-1,2k\right)$，$k\in Z$

【解析】

【分析】

作出函数$f\left(x\right)$的图象，分当点P在A点时，当点P在曲线上从A接近B时，当点P在B点时，当点P在曲线上从B接近C时，当点P在C点时，当点P在曲线上从C接近D时，当点P在D点时，当点P在曲线上从D接近E时，分析M_t,m_t的值和变化，从而得出$h\left(t\right)=M_t-m_t$的值和变化，可得答案.

【详解】函数$f\left(x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$，函数的最小正周期为$T$=4，点$P(t,\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)),Q(x,\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right))$，如图所示：

当点P在A点时，点Q在曲线OAB上，$M_t=1,m_t=0$，$h\left(t\right)=M_t-m_t=1$；

当点P在曲线上从A接近B时，$M_t=1,m_t$减小，所以$h\left(t\right)=M_t-m_t$逐渐增大；

当点P在B点时，$M_t=1,m_t=-1,h\left(t\right)=M_t-m_t=2$，

当点P在曲线上从B接近C时，$m_t=-1,M_t$减小，所以$h\left(t\right)=M_t-m_t$逐渐减小；

当点P在C点时，$M_t=0,m_t=-1$，$h\left(t\right)=M_t-m_t=1$；

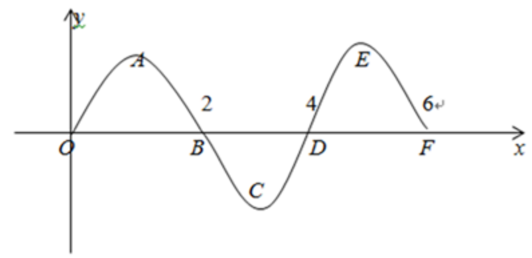
当点P在曲线上从C接近D时，$m_t=-1,M_t$增大，所以$h\left(t\right)=M_t-m_t$逐渐增大；

当点P在D点时，$M_t=1,m_t=-1$，$h\left(t\right)=M_t-m_t=2$；

当点P在曲线上从D接近E时，$M_t=1,m_t$增大，$h\left(t\right)=M_t-m_t$逐渐减小，

依次类推，得函数$h\left(t\right)$的最大值是2，$h\left(t\right)$的单调递增区间为$\left(2k-1,2k\right)$，$k\in Z$，

故答案为：2；$\left(2k-1,2k\right)$，$k\in Z$.



【点睛】本题考查正弦函数的周期性，最值，单调性，关键在于理解题目所给的条件，属于较难题.

三、解答题共 4 小题，共 40 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）$\frac{1}{4}$

（2）$[2k\pi, 2k\pi+\pi], k\in \mathrm{Z}$

【解析】

【分析】（1）利用同角三角函数关系式化简可得 $f(x)=-(\sin x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$，代入求值可得答案；

（2）利用（1）中结论，由不等式 $f(x)\geq 0$ 可得 $0\leq \sin x\leq 1$，结合正弦函数性质即可求得答案.

【小问 1 详解】

由题意可得 $f(x)=\cos^2 x+\sin x-1=-\sin^2 x+\sin x$

$=-(\sin x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$,

故当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)=-(\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$；

【小问 2 详解】

由 $f(x)\geq 0$ 可得 $-(\sin x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\geq 0, \therefore -\frac{1}{2}\leq \sin x-\frac{1}{2}\leq \frac{1}{2}$,

即 $0\leq \sin x\leq 1$，故 $2k\pi\leq x\leq 2k\pi+\pi, k\in \mathrm{Z}$,

故不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集为 $[2k\pi, 2k\pi+\pi], k\in \mathrm{Z}$.

17.【答案】（1）$t=1$

（2）$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】（1）利用向量垂直 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 解得即可；

（2）由题意得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，求得 D 的坐标 $D(1-t, t-2)$，利用模长公式即可得出结论.

【小问 1 详解】

由题意得 $\overrightarrow{AB}=(t+1,2), \overrightarrow{AC}=(3,1), \overrightarrow{BC}=(2-t,t-2)$,

若 $\angle B=90°$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，即 $(t+1)(2-t)+2(t-2)=0$,

解得$t=2$或$t=1$，

当$t=2$，则$\overrightarrow{BC}=\vec{0}$，不合题意；

当$t=1$，则$\overrightarrow{BC}=(1,-1)$，符合题意；

综上所述：$t=1$.

【小问 2 详解】

设点D的坐标为(x,y)，可得$\overrightarrow{AD}=(x+1,y)$，

若四边形$ABCD$是平行四边形，则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(2-t,t-2)$，

所以$\begin{cases}x+1=2-t\\y=t-2\end{cases}$，则$\begin{cases}x=1-t\\y=t-2\end{cases}$，即$D(1-t,t-2)$，

可得$\overrightarrow{OD}=(1-t,t-2)$，

则$\left|\overrightarrow{OD}\right|=\sqrt{(1-t)^2+(t-2)^2}=\sqrt{2t^2-6t+5}=\sqrt{2\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$，

所以当$t=\frac{3}{2}$时，$\left|\overrightarrow{OD}\right|$取得最小值$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18.【答案】（1） $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$；$[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}],k\in Z$

（2）最大值为 1，此时$x=\frac{\pi}{4}$；最小值为$-\sqrt{2}$，此时$x=-\frac{\pi}{8}$；

（3）$[1+\sqrt{2},+\infty)$

【解析】

【分析】（1）根据三角函数的二倍角公式结合辅助角公式化简可得$f(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，结合正弦函数的单调性即可求得答案；

（2）根据$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时，确定$2x-\frac{\pi}{4}$的范围，结合正弦函数的性质即可求得答案；

（3）由$\forall x_1,x_2\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|\le m$恒成立，可得$|f(x)_{\max}-f(x)_{\min}|\le m$，结合（2）的结论，即可求得答案.

【小问 1 详解】

因为$f(x)=2\sqrt{2}\cos x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1=2\sqrt{2}\cos x[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x)]+1$

$=2\sin x\cos x-2\cos^2 x+1=\sin 2x-\cos 2x$

$=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，则 $k\pi-\frac{\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{3\pi}{8},k\in Z$，

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}],k\in Z$.

【小问 2 详解】

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，

由于 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right]$ 单调递减，在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$ 单调递增，

当 $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$，即 $x=-\frac{\pi}{8}$ 时，$\sin(2x-\frac{\pi}{4})=-1$，$f(x)$ 取得最小值 $-\sqrt{2}$；

当 $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$ 时，$f(x)=-1$；

当 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 1；

【小问 3 详解】

若 $\forall x_1,x_2\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le m$ 恒成立，

即 $|f(x)_{\max}-f(x)_{\min}|\le m$，

由（2）可知 $f(x)_{\max}=1,f(x)_{\min}=-\sqrt{2}$，

故 $m\ge 1+\sqrt{2}$，即实数 m 的取值范围为 $[1+\sqrt{2},+\infty)$.

19.【答案】（1） $f(x)=x$ 不是“T 函数”，理由见解析；

（2）证明见解析　（3）$\{m|m=k\pi,k\in Z\}$

【解析】

【分析】（1）根据“T 函数”的定义判断 $f(x)=x$ 是否满足该定义，即可得结论；

（2）只需证明 $g(x)$ 满足“T 函数”定义，即可得结论；

（3）根据函数 $h(x)=\cos mx$ 为“T 函数”，可得 $\cos(mx+mT)=T\cos mx$ 恒成立，即可推得 $\cos mT=T,\sin mT=0$，即可求得答案.

【小问 1 详解】

若函数 $f(x)=x$ 是“T 函数”，则对于 $x\in\mathbf{R}$，恒有 $f(x+T)=Tf(x)$，

即 $x+T=Tx$ 恒成立，故 $(T-1)x=T$ 恒成立，

由于 $x\in\mathbf{R}$，上式不可能恒成立，

故 $f(x)=x$ 不是"T 函数";

【小问 2 详解】

证明：函数 $g(x)=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的图象与函数 $y=x$ 的图象有公共点，显然 $x\neq0$，

即存在非零常数 T，使得 $a^{T}=T$，

所以 $f(x+T)=a^{x+T}=a^{T}a^{x}=Ta^{x}=Tf(x)$ 恒成立，

故 $g(x)=a^{x}$ 为"T 函数".

【小问 3 详解】

若函数 $h(x)=\cos mx$ 是"T 函数"，则 $f(x+T)=Tf(x)$，

即 $\cos(m(x+T))=T\cos mx$ 恒成立，

故 $\cos(mx+mT)=T\cos mx$ 恒成立，

即 $\cos mx\cos mT-\sin mx\sin mT=T\cos mx$ 恒成立，

即有 $\cos mT=T,\sin mT=0$，

故 $T=\pm1,m=k\pi,k\in Z$，

即实数 m 的取值范围是 $\{m\mid m=k\pi,k\in Z\}$.

【点睛】关键点睛：本题是给出函数的新定义，由此去判断求解问题，解答本题的关键就是要理解函数的新定义，明确其含义，依此去判断解决问题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。