北京专家信息卷——押题卷(一)·数学理科参考答案

1. D 【解析】$z=\frac{2-i}{i}=\frac{2i-i^2}{i^2}=\frac{2i+1}{-1}=-1-2i$,所以$|z|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$.故选 D.

2. D 【解析】$U=A\cup B=\{x\in \mathbf{Z}\mid x^2-3x-10<0\}=\{x\in \mathbf{Z}\mid -2<x<5\}=\{-1,0,1,2,3,4\}$,$A\cap$ $\complement_U B=\{x\in \mathbf{N}\mid \log_2 x\leqslant 2\}=\{x\in \mathbf{N}\mid 0<x\leqslant 4\}=\{1,2,3,4\}$,$\therefore B=\{-1,0\}$.故选 D.

3. B 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1,公差为d,则由题意可知$S_9=9a_5=18$,即$a_5=2$,所以$a_1+4d=2$,所以$a_2+a_5+a_{10}=3a_1+12d=3(a_1+4d)=6$.故选 B.

4. B 【解析】当$c^2=0$是,若"$a>b$",则$ac^2=bc^2$;当$ac^2>bc^2$,则$c^2>0$,故$a>b$,所以"$a>b$"是"$ac^2>bc^2$"的必要不充分条件,故选 B.

5. C 【解析】将函数$f(x)=\sin 2x$的图像向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位,得到的图像对应的函数为$g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,因为$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0$,故 A 不对;因为$g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin 0=0\neq\pm 1$,故 B 不对;当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$,所以函数$g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值为$g\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,故 C 正确;函数$g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上既不单调递增也不单调递减.故 D 不正确.故选 C.

6. A 【解析】由题意可知$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,因为$\overrightarrow{PB}=3\overrightarrow{PF}$,所以$x_2=3\times\frac{p}{2}=\frac{3p}{2}$,所以$y_2^2=2p\times\frac{3p}{2}$,$y_2=\pm\sqrt{3}p$,根据抛物线的对称性,不妨取$B\left(\frac{3p}{2},\sqrt{3}p\right)$,所以直线 AB 的方程为$y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$,代入抛物线方程,消去$y$得$3x^2-5px+\frac{3p^2}{4}=0$,解得$x_1=\frac{p}{6}$,$x_2=\frac{3p}{2}$,所以$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{\frac{p}{6}+\frac{p}{2}}{\frac{3p}{2}+\frac{p}{2}}=\frac{1}{3}$.故选 A.

7. C 【解析】设某人患有这种疾病是事件A,某人血液检测结果为阳性是事件B,则所求概率为$p(A|B)=\frac{p(AB)}{p(B)}=\frac{0.01\times 0.99}{0.01\times 0.99+(1-0.01)\times 0.04}=20\%$.故选 C.

8. A 【解析】双曲线$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{m}=1(m>0)$的两条渐近线方程为$y=\pm\frac{2}{\sqrt{m}}x$,因为两条渐近线的夹角的不超过$60^\circ$,所以渐近线$y=\frac{2}{\sqrt{m}}x$倾斜角$\alpha$的范围$(0^\circ,30^\circ]\cup[60^\circ,90^\circ)$,即渐近线$y=\frac{2}{\sqrt{m}}x$的斜率满足:$0<\frac{2}{\sqrt{m}}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$或$\frac{2}{\sqrt{m}}\geqslant\sqrt{3}$,解得$m\geqslant 12$或$0<m\leqslant\frac{4}{3}$,所以双曲线的离心率$e$满足$e^2=\frac{4+m}{4}=1+\frac{m}{4}\in\left(1,\frac{4}{3}\right]\cup[4,+\infty)$,又因为$e>1$$\therefore 1<e\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$或$e\geqslant 2$.故选 A.

9. B 【解析】设外接球半径为R,则$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{500\pi}{3}\Rightarrow R=5$;由三视图还原如下图,知四棱锥$E-ABCD$的顶点$E$在底面的射影为$AD$的中点$H$,易得底面正方形的外接圆圆心即为正方形的中心$O_1$,且外接圆半径$r=AO_1=3\sqrt{2}$;再由球的几何性质知,外接球球心$O$必在过$O_1$且与底面垂直的垂线$OO_1$上,且必有$OO_1/\!/EH$;在直角$\triangle AOO_1$中有,$OO_1^2+AO_1^2=AO^2$可得$OO_1=\sqrt{7}$;因为$OO_1/\!/EH$,所以四边形$EHO_1O$为梯形,又$HO_1=3$,$EO=R=5$,所以$EH=4+\sqrt{7}$,即$h=4+\sqrt{7}$,故选 B.

北京专家信息卷——押题卷(一)·数学理科参考答案

1. D 【解析】$z=\frac{2-i}{i}=\frac{2i-i^2}{i^2}=\frac{2i+1}{-1}=-1-2i$，所以$|z|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，故选D.

2. D 【解析】$U=A\cup B=\{x\in \mathbf{Z}|x^2-3x-10<0\}=\{x\in \mathbf{Z}|-2<x<5\}=\{-1,0,1,2,3,4\}$，$A\cap$ $\complement_U B=\{x\in \mathbf{N}|\log_2 x\leqslant 2\}=\{x\in \mathbf{N}|0<x\leqslant 4\}=\{1,2,3,4\}$，$\therefore B=\{-1,0\}$，故选D.

3. B 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，则由题意可知$S_9=9a_5=18$，即$a_5=2$，所以a_1 $+4d=2$，所以$a_2+a_5+a_{10}=3a_1+12d=3(a_1+4d)=6$，故选B.

4. B 【解析】当$c^2=0$是，若"$a>b$"，则$ac^2=bc^2$；当$ac^2>bc^2$，则$c^2>0$，故$a>b$，所以"$a>b$"是"ac^2 $>bc^2$"的必要不充分条件，故选B.

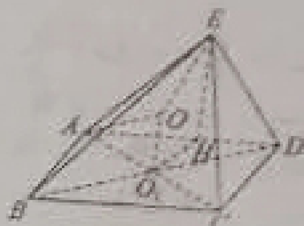
5. C 【解析】将函数$f(x)=\sin 2x$的图像向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到的图像对应的函数为$g(x)=$ $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，因为$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0$，故A不对；因为$g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin 0=0\neq\pm 1$，故B不对；当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$，所以函数$g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值为$g\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故C正确；函数$g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上既不单调递增也不单调递减，故D不正确，故选C.

6. A 【解析】由题意可知$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为$\overrightarrow{PB}=3\overrightarrow{PF}$，所以$x_2=3\times\frac{p}{2}=$ $\frac{3p}{2}$，所以$y_2^2=2p\times\frac{3p}{2}$，$y_2=\pm\sqrt{3}p$，根据抛物线的对称性，不妨取$B\left(\frac{3p}{2},\sqrt{3}p\right)$，所以直线$AB$的方程为$y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$，代入抛物线方程，消去$y$得$3x^2-5px+\frac{3p^2}{4}=0$，解得$x_1=\frac{p}{6}$，$x_2=\frac{3p}{2}$，所以$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{\frac{p}{6}+\frac{p}{2}}{\frac{3p}{2}+\frac{p}{2}}=\frac{1}{3}$. 故选A.

7. C 【解析】设某人患有这种疾病是事件A，某人血液检测结果为阳性是事件B，则所求概率为 $p(A|B)=\frac{p(AB)}{p(B)}=\frac{0.01\times 0.99}{0.01\times 0.99+(1-0.01)\times 0.04}=20\%$. 故选C.

8. A 【解析】双曲线$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{m}=1(m>0)$的两条渐近线方程为$y=\pm\frac{2}{\sqrt{m}}x$，因为两条渐近线的夹角的不超过$60^\circ$，所以渐近线$y=\frac{2}{\sqrt{m}}x$倾斜角$\alpha$的范围$(0^\circ,30^\circ]\cup[60^\circ,90^\circ)$，即渐近线$y=\frac{2}{\sqrt{m}}x$的斜率满足：$0<\frac{2}{\sqrt{m}}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$或$\frac{2}{\sqrt{m}}\geqslant\sqrt{3}$，解得$m\geqslant 12$或$0<m\leqslant\frac{4}{3}$，所以双曲线的离心率$e$满足$e^2=\frac{4+m}{4}=1+\frac{m}{4}\in\left(1,\frac{4}{3}\right]\cup[4,+\infty)$，又因为$e>1$ $\therefore 1<e\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$或$e\geqslant 2$. 故选A.

9. B 【解析】设外接球半径为R，则$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{500\pi}{3}\Rightarrow R=5$；由三视图还原如下图，知四棱锥$E-ABCD$的顶点$E$在底面的射影为$AD$的中点$H$，易得底面正方形的外接圆圆心即为正方形的中心$O_1$，且外接圆半径$r=AO_1=3\sqrt{2}$；再由球的几何性质知，外接球球心$O$必在过$O_1$且与底面垂直的垂线$OO_1$上，且必有$OO_1/\!/EH$；在直角$\triangle AOO_1$中有，$OO_1^2+AO_1^2=AO^2$可得$OO_1=\sqrt{7}$；因为$OO_1$ $/\!/EH$，所以四边形EHO_1O为梯形，又$HO_1=3$，$EO=R=5$，所以$EH=4+\sqrt{7}$，即$h=4+\sqrt{7}$，故选B.



10. D 【解析】当 $3+\log_3 x<\log_{\frac{1}{3}} x$ 时，$3+\log_3 x<-\frac{1}{2}\log_3 x$，解得 $0<x<\frac{1}{9}$，所以 $f(x)=\begin{cases}3+\log_3 x, 0<x<\frac{1}{9}\\ \log_{\frac{1}{3}} x, x\geqslant\frac{1}{9}\end{cases}$，因为 $0<m<n$，所以由 $f(m)=f(n)$ 可知，$3+\log_3 m=\log_{\frac{1}{3}} n$，即 $3+\log_3 m=-\frac{1}{2}\log_3 n$，$2\log_3 m+\log_3 n=-6$，$\log_3 m^2 n=-6$，所以 $m^2n=\frac{1}{729}$，故选 D.

11. B 【解析】由题意可知 $\frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}-a_n}=\frac{a_2+a_1}{a_2-a_1}=-3$，整理得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$，则 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，所以 $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$，$S_n=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{2}{2^n}$，由 $\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}+1}<\frac{mS_n}{a_n+1}$，得 $\frac{2-\frac{2}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}+1}<\frac{m(2-\frac{2}{2^n})}{\frac{1}{2^{n-1}}+1}$，整理得 $m>1+\frac{3}{2^{n+1}-\frac{1}{2^{n-1}}}$，令 $f(n)=2^{n+1}-\frac{1}{2^{n-1}}$，$n\in\mathbf{N}^*$，显然 $f(n)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(n)\geqslant f(1)=3$，$1<1+\frac{3}{2^{n+1}-\frac{1}{2^{n-1}}}\leqslant 2$，所以 $\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}+1}<\frac{mS_n}{a_n+1}$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，则 $m>2$. 故选 B.

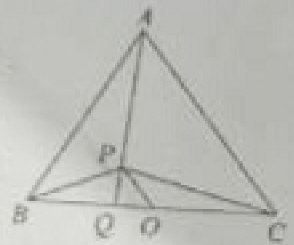
12. D 【解析】$\because f(x)=-x\ln x+ax^2-bx$，$\therefore f'(x)=-\ln x-1+2ax-b(x>0)$，$\because x=1$ 是 $f(x)$ 极小值点，$\therefore f'(1)=-1+2a-b=0$，即 $b=2a-1$，$\therefore f'(x)=-\ln x+2ax-2a=-\ln x+2a(x-1)$，$\because x=1$ 是 $f(x)$ 极小值点，$\therefore$ 在 $x<1$ 附近，$f'(x)=-\ln x+2a(x-1)<0$ 成立，在 $x>1$ 附近，$f'(x)=-\ln x+2a(x-1)>0$ 成立，即在 $x<1$ 附近，$\ln x>2a(x-1)$ 成立，在 $x>1$ 附近，$\ln x<2a(x-1)$ 成立，$\therefore$ 在 $x>1$ 附近，直线 $y=2a(x-1)$ 总在曲线 $y=\ln x$ 上方，$\because y=\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线斜率为 1，所以 $2a>1$，$a>\frac{1}{2}$，又 $\because$ 当 $a>\frac{1}{2}$ 时，在 $x<1$ 附近，直线 $y=2a(x-1)$ 总在曲线 $y=\ln x$ 下方，即实数 a 的取值范围是 $a>\frac{1}{2}$，故选 D.

13. $2\sqrt{2}+2$ 【解析】$\because f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x}=x+\frac{2}{x}+2\geqslant 2\sqrt{x\times\frac{2}{x}}+2=2\sqrt{2}+2$，当且仅当 $x=\frac{2}{x}$，即 $x=\sqrt{2}$ 时，取等号. $\therefore f_{\min}(x)=2\sqrt{2}+2$，故 $\frac{x^2+2x+2}{x}\geqslant a$ 恒成立，只需要 $a\leqslant 2\sqrt{2}+2$，所以 a 的最大值为 $2\sqrt{2}+2$.

14. $\frac{105}{8}$ 【解析】由题意知 $C_n^3=C_n^7$，所以 $n=10$，所以原式为 $(x-\frac{1}{2\sqrt{x}})^{10}$，通项为 $T_{r+1}=C_{10}^r x^{10-r}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r=C_{10}^r x^{10-\frac{3r}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)^r$，令 $10-\frac{3r}{2}=4$，得 $r=4$，故 x^4 的系数为 $C_{10}^4\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{105}{8}$.

15. $\frac{4}{3}$ 【解析】如图所示，设 O 为 BC 中点，连接 PO，则 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PO}$，又 $\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$，所以 $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{PO}$，所以 $PO\parallel AC$，由题意知 $OC=\frac{1}{2}BC=1$，$QO=\frac{1}{3}OC=\frac{1}{3}$，$QC=\frac{4}{3}$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{QC}$

$=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{QC}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{QC}\rangle=2\times\frac{4}{3}\times\cos 60^\circ=\frac{4}{3}$.



16. ①②③ 【解析】∵圆 $C:x^2+y^2-2x-3=0$,可化为$(x-1)^2+y^2=4$,所以该圆的圆心坐标为$(1,0)$,半径为 2,①正确;该圆截 y 轴所得的弦长为 $2\times\sqrt{4-1}=2\sqrt{3}$,②正确;圆心$(1,0)$到直线 $3x-4y+12=0$ 的距离为 $\frac{|3+12|}{5}=3$,所以圆 C 上的点到直线 $3x-4y+12=0$ 距离的最小值为 $3-2=1$,③正确;将圆 $x^2+y^2-8x-8y+23=0$ 化为$(x-4)^2+(y-4)^2=9$,该圆的圆心坐标为$(4,4)$,半径为 3,两圆的圆心距为 $\sqrt{(4-1)^2+4^2}=5$,两圆半径之和为 $3+2=5$,所以两圆相外切,故④不正确.故正确的有①②③.

17.【解析】(1)由$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$,$\angle BAD=\frac{\pi}{12}$得$\angle CAD=\frac{\pi}{4}$,

所以在$\triangle ACD$中,由余弦定理得:$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\angle CAD$. ……1 分

即$(2\sqrt{13})^2=10^2+AD^2-2\times10\times AD\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……2 分

……3 分

解得:$AD=4\sqrt{2}$或 $AD=6\sqrt{2}$. ……5 分

(2)由 $AB=BC$,$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$,知$\triangle ABC$为正三角形.

设$\angle BCD=\theta$,则$\angle CBD=\pi-\angle BDC-\theta=\frac{\pi}{3}-\theta$. ……6 分

在$\triangle BCD$中,$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{10}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$,

即$\frac{CD}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{BD}{\sin\theta}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$,

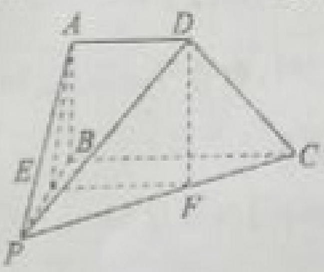
所以 $BD=\frac{20\sqrt{3}}{3}\sin\theta$,$CD=\frac{20\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$. ……8 分

所以四边形 $ABDC$ 的周长为 $20+\frac{20\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\frac{20\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

$=20+\frac{20\sqrt{3}}{3}\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)=20+\frac{20\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$. ……11 分

故当$\angle BCD=\frac{\pi}{6}$时,四边形 $ABDC$ 的周长取最大值,且最大值为 $20+\frac{20\sqrt{3}}{3}$. ……12 分

18.【解析】(1)取 PC 中点 F,连接 EF,DF ……1 分



∵E,F 分别是 PB,PC 的中点,

∴$EF/\!/BC$,且 $EF=\frac{1}{2}BC$ ……2 分

∵$AD/\!/BC$,$AD=\frac{1}{2}BC$

∴$AD/\!/EF$ 且 $AD=EF$. ……3 分

∴四边形 $AEFD$ 为平行四边形,∴$AE/\!/DF$ ……5 分

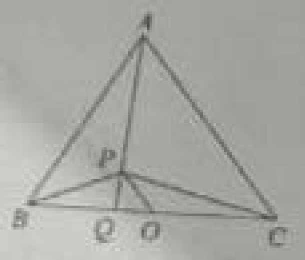
∵$DF\subset$平面 PDC,$AE\not\subset$平面 PDC, ……6 分

∴$AE/\!/$平面 PDC.

(2)∵$AB\perp$平面 PBC,∴$AB\perp PB$,$AB\perp BC$,又 $PB\perp BC$,故以 B 为坐标原点,建立如图空间直角坐标系; ……7

则易知 $PB\perp$平面 $BCDA$,取平面 BCD 的一个法向量 $n=(1,0,0)$,

$=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{QC}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{QC}\rangle=2\times\frac{4}{3}\times\cos 60^\circ=\frac{4}{3}$.



16. ①②③ 【解析】∵圆 C: $x^2+y^2-2x-3=0$,可化为 $(x-1)^2+y^2=4$,所以该圆的圆心坐标为 $(1,0)$,半径为 2,①正确;该圆截 y 轴所得的弦长为 $2\times\sqrt{4-1}=2\sqrt{3}$,②正确;圆心 $(1,0)$ 到直线 $3x-4y+12=0$ 的距离为 $\frac{|3+12|}{5}=3$,所以圆 C 上的点到直线 $3x-4y+12=0$ 距离的最小值为 $3-2=1$,③正确;将圆 $x^2+y^2-8x-8y+23=0$ 化为 $(x-4)^2+(y-4)^2=9$,该圆的圆心坐标为 $(4,4)$,半径为 3,两圆的圆心距为 $\sqrt{(4-1)^2+4^2}=5$,两圆半径之和为 $3+2=5$,所以两圆相外切,故④不正确.故正确的有①②③.

17.【解析】(1)由 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$,$\angle BAD=\frac{\pi}{12}$ 得 $\angle CAD=\frac{\pi}{4}$, ……………… 1分

所以在 $\triangle ACD$ 中,由余弦定理得:$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\angle CAD$, ……………… 2分

即 $(2\sqrt{13})^2=10^2+AD^2-2\times10\times AD\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……………… 3分

解得:$AD=4\sqrt{2}$ 或 $AD=6\sqrt{2}$. ……………… 5分

(2)由 $AB=BC$,$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$,知 $\triangle ABC$ 为正三角形.

设 $\angle BCD=\theta$,则 $\angle CBD=\pi-\angle BDC-\theta=\frac{\pi}{3}-\theta$, ……………… 6分

在 $\triangle BCD$ 中,$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{10}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$,

即 $\frac{CD}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{BD}{\sin\theta}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$,

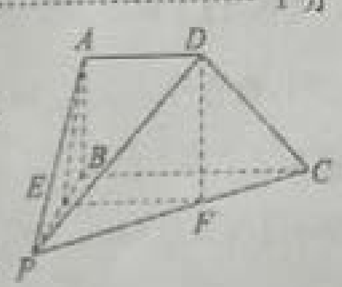
所以 $BD=\frac{20\sqrt{3}}{3}\sin\theta$,$CD=\frac{20\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$, ……………… 8分

所以四边形 $ABDC$ 的周长为 $20+\frac{20\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\frac{20\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

$=20+\frac{20\sqrt{3}}{3}\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)=20+\frac{20\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$, ……………… 11分

故当 $\angle BCD=\frac{\pi}{6}$ 时,四边形 $ABDC$ 的周长取最大值,且最大值为 $20+\frac{20\sqrt{3}}{3}$. ……………… 12分

18.【解析】(1)取 PC 中点 F,连接 EF,DF ……………… 1分



∵E,F 分别是 PB,PC 的中点,

∴$EF/\!/BC$,且 $EF=\frac{1}{2}BC$ ……………… 2分

∵$AD/\!/BC$,$AD=\frac{1}{2}BC$ ……………… 3分

∴$AD/\!/EF$ 且 $AD=EF$.

∴四边形 $AEFD$ 为平行四边形,∴$AE/\!/DF$ ……………… 5分

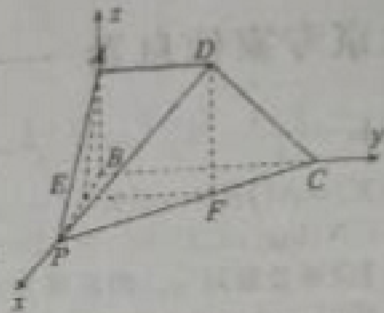
∵$DF\subset$ 平面 PDC,$AE\not\subset$ 平面 PDC, ……………… 6分

∴$AE/\!/$ 平面 PDC.

(2)∵$AB\perp$ 平面 PBC,∴$AB\perp PB$,$AB\perp BC$,又 $PB\perp BC$,故以 B 为坐标原点,建立如图空间直角坐标系; ……………… 7

则易知 $PB\perp$ 平面 $BCDA$,取平面 BCD 的一个法向量 $n=(1,0,0)$,

易知 $P(1,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,1,1)$，则$\overrightarrow{PC}=(-1,2,0)$，
$\overrightarrow{PD}=(-1,1,1)$. ………………………………………… 8分



设平面 PDC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则由$\overrightarrow{PC}\perp\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{PD}\perp\boldsymbol{m}$，

得$\begin{cases}-x_1+2y_1=0\\-x_1+y_1+z_1=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{m}=(2,1,1)$. ………………………… 9分

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{2+0+0}{1\times\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ………………………… 11分

$\because$二面角 $P-DC-B$ 为锐二面角，

$\therefore$二面角 $P-DC-B$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………………………………… 12分

19.【解析】(1)记"刘丽同学进入抢答环节"为事件 A，则 A 包含 5 道题全答对和 5 道题答错 1 道，从题库再选 1 道回答正确两种情况. ……………………………………………………………… 2分

$\therefore p(A)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^5+C_5^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{256}{729}$. ……………………………………………………… 4分

(2)由题意可知：X 的取值可为 0,10,20,30,40,50，

记"一次答题中李红同学得分"为事件 B，则事件 B 包括李红同学抢到并答对和刘丽同学抢到并答错两种情况，故 $p(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$ ……………………………………………… 5分

$\therefore P(X=0)=C_5^0\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^5=\dfrac{32}{243}$，

$P(X=10)=C_5^1\times\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{80}{243}$，

$P(X=20)=C_5^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{80}{243}$，

$P(X=30)=C_5^3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{40}{243}$，

$P(X=40)=C_5^4\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{243}$，

$P(X=50)=C_5^5\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=\dfrac{1}{243}$， ……………………………………………… 10分

$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	10	20	30	40	50
P	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{32}{243}+10\times\dfrac{80}{243}+20\times\dfrac{80}{243}+30\times\dfrac{40}{243}+40\times\dfrac{10}{243}+50\times\dfrac{1}{243}=\dfrac{50}{3}$. …… 12分

20.【解析】(1)设椭圆 C 的左焦点坐标为$(-c,0)$，其中 $c=\sqrt{a^2-2}$.

则直线 l_1 的斜率为$\dfrac{-\sqrt{6}}{c}$，$\because$直线 l_1 与直线 l_2 垂直，$\therefore$直线 l_2 的斜率为$\dfrac{c}{\sqrt{6}}$，
…………………………………………………………………………………………………… 2分

因此直线 l_2 的方程为 $y=\dfrac{c}{\sqrt{6}}x-\sqrt{6}$，

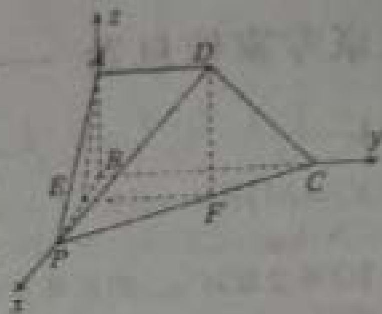
与椭圆 C 的方程联立，消去 y，整理得$\left(2+\dfrac{a^2c^2}{6}\right)x^2-2a^2cx+4a^2=0$.

$\because$直线 l_2 与椭圆 C 有且只有一个公共点，
…………………………………………………………………………………………………… 3分

$\therefore\Delta=4a^4c^2-16a^2\left(2+\dfrac{a^2c^2}{6}\right)=0$，即 $ac=2\sqrt{6}$，

易知 $P(1,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,1,1)$，则 $\overrightarrow{PC}=(-1,2,0)$，

$\overrightarrow{PD}=(-1,1,1)$． ………………………………………… 8分



设平面 PDC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则由 $\overrightarrow{PC}\perp\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{PD}\perp\boldsymbol{m}$，

得 $\begin{cases}-x_1+2y_1=0\\-x_1+y_1+z_1=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{m}=(2,1,1)$． ………………………… 9分

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{2+0+0}{1\times\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$． ………………………… 11分

$\because$ 二面角 $P-DC-B$ 为锐二面角，

$\therefore$ 二面角 $P-DC-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$． ……………………………………………………… 12分

19.【解析】(1)记"刘丽同学进入抢答环节"为事件 A，则 A 包含5道题全答对和5道题答错1道，从题库再选1道回答正确两种情况． ……………………………………………… 2分

$\therefore p(A)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^5+C_5^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{256}{729}$． ……………………………………………… 4分

(2)由题意可知：X 的取值可为 0，10，20，30，40，50，

记"一次答题中李红同学得分"为事件 B，则事件 B 包括李红同学抢到并答对和刘丽同学抢到并答错两种情况，故 $p(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$ ……………………………… 5分

$\therefore P(X=0)=C_5^0\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^5=\dfrac{32}{243}$，

$P(X=10)=C_5^1\times\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{80}{243}$，

$P(X=20)=C_5^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{80}{243}$，

$P(X=30)=C_5^3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{40}{243}$，

$P(X=40)=C_5^4\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{243}$，

$P(X=50)=C_5^5\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=\dfrac{1}{243}$， ……………………………………… 10分

$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	10	20	30	40	50
P	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{32}{243}+10\times\dfrac{80}{243}+20\times\dfrac{80}{243}+30\times\dfrac{40}{243}+40\times\dfrac{10}{243}+50\times\dfrac{1}{243}=\dfrac{50}{3}$． ……………………………………………………………………………………………… 12分

20.【解析】(1)设椭圆 C 的左焦点坐标为 $(-c,0)$，其中 $c=\sqrt{a^2-2}$．

则直线 l_1 的斜率为 $\dfrac{-\sqrt{6}}{c}$，$\because$ 直线 l_1 与直线 l_2 垂直，$\therefore$ 直线 l_2 的斜率为 $\dfrac{c}{\sqrt{6}}$，

因此直线 l_2 的方程为 $y=\dfrac{c}{\sqrt{6}}x-\sqrt{6}$， ……………………………………………… 2分

与椭圆 C 的方程联立，消去 y，整理得 $\left(2+\dfrac{a^2c^2}{6}\right)x^2-2a^2cx+4a^2=0$，

$\because$ 直线 l_2 与椭圆 C 有且只有一个公共点，

$\therefore\Delta=4a^4c^2-16a^2\left(2+\dfrac{a^2c^2}{6}\right)=0$，即 $ac=2\sqrt{6}$， ……………………………………… 3分

与 $c=\sqrt{a^2-2}$ 联立，解得 $a=\sqrt{6}$。

∴椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………… 4分

(2)由题易知点 $P(\sqrt{3},1)$ 为椭圆 C 上的点，直线 AB 的斜率存在且不为0，

设直线 AB 的方程为 $y=kx+m(k\neq0)$，直线 AB 不能过点 P，即 $\sqrt{3}k+m\neq1$，

设 $A(x_1,kx_1+m)$，$B(x_2,kx_2+m)$，将 $y=kx+m$ 与 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 联立消去 y，

整理得 $(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-6=0$. ………………………………………… 5分

则 $x_1+x_2=-\frac{6km}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{3m^2-6}{3k^2+1}$，

∵$k_1+k_2=\frac{kx_1+m-1}{x_1-\sqrt{3}}+\frac{kx_2+m-1}{x_2-\sqrt{3}}=0$

∴$2kx_1x_2-\sqrt{3}k(x_1+x_2)+(m-1)(x_1+x_2)-2\sqrt{3}(m-1)=0$

∴$2k\cdot\frac{3m^2-6}{3k^2+1}-\sqrt{3}k\cdot\left(-\frac{6km}{3k^2+1}\right)+(m-1)\left(-\frac{6km}{3k^2+1}\right)-2\sqrt{3}(m-1)=0$. ………… 6分

化简得 $(\sqrt{3}k+m-1)(\sqrt{3}k-1)=0$，………………………………………… 7分

∴$k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\sqrt{3}k+m-1=0$(舍去). ………………………………………… 8分

当 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$2x^2+2\sqrt{3}mx+3m^2-6=0$，则 $\Delta=48-12m^2>0$，得 $m^2<4$.

$|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{4-m^2}$. ………………………… 9分

原点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}|m|$.

$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot|m|\cdot\sqrt{4-m^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{m^2}\cdot\sqrt{4-m^2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{m^2+4-m^2}{2}=\sqrt{3}$,

当且仅当 $\sqrt{m^2}=\sqrt{4-m^2}$，即 $m^2=2$，$m=\pm\sqrt{2}$ 时取等号，经验证，满足题意. ………… 11分

∴$\triangle OAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$. ………………………………………… 12分

21.【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

∵当 $k=1$ 时，$f(x)=xe^x-x-\ln x$

∴$f'(x)=e^x+xe^x-1-\frac{1}{x}=(x+1)\cdot\frac{xe^x-1}{x}$，………………………………………… 2分

令 $g(x)=xe^x-1$，则 $g'(x)=e^x(x+1)>0$，

∴$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

∵$g(0)=-1<0$，$g(1)=e-1>0$，

∴ 存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，………………………………………… 4分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

∴$f(x)$ 的最小值 $[f(x)]_{\min}=f(x_0)=x_0e^{x_0}-x_0-\ln x_0=x_0\cdot\frac{1}{x_0}-x_0-\ln e^{-x_0}=1$.

所以 $f(x)$ 的最小值为1.

(2)$f(x)\geqslant1$ 恒成立，即 $xe^x-kx-\ln x\geqslant1$ 恒成立，

∴$k\leqslant e^x-\frac{\ln x+1}{x}$ 恒成立，令 $h(x)=e^x-\frac{\ln x+1}{x}$，其中 $x>0$，

与 $c=\sqrt{a^2-2}$ 联立，解得 $a=\sqrt{6}$。

∴椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………………… 4分

(2)由题易知点 $P(\sqrt{3},1)$ 为椭圆 C 上的点，直线 AB 的斜率存在且不为0，

设直线 AB 的方程为 $y=kx+m(k\neq0)$，直线 AB 不能过点 P，即 $\sqrt{3}k+m\neq1$，

设 $A(x_1,kx_1+m)$，$B(x_2,kx_2+m)$，将 $y=kx+m$ 与 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 联立消去 y，

整理得 $(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-6=0$。 ………………………………………………… 5分

则 $x_1+x_2=-\frac{6km}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{3m^2-6}{3k^2+1}$，

∵$k_1+k_2=\frac{kx_1+m-1}{x_1-\sqrt{3}}+\frac{kx_2+m-1}{x_2-\sqrt{3}}=0$

∴$2kx_1x_2-\sqrt{3}k(x_1+x_2)+(m-1)(x_1+x_2)-2\sqrt{3}(m-1)=0$

∴$2k\cdot\frac{3m^2-6}{3k^2+1}-\sqrt{3}k\cdot\left(-\frac{6km}{3k^2+1}\right)+(m-1)\left(-\frac{6km}{3k^2+1}\right)-2\sqrt{3}(m-1)=0$。 ……………… 6分

化简得 $(\sqrt{3}k+m-1)(\sqrt{3}k-1)=0$。 ………………………………………………… 7分

∴$k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\sqrt{3}k+m-1=0$(舍去)。 ………………………………………………… 8分

当 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$2x^2+2\sqrt{3}mx+3m^2-6=0$，则 $\Delta=48-12m^2>0$，得 $m^2<4$。

$|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{4-m^2}$。 ………………………… 9分

原点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}|m|$。

$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot|m|\cdot\sqrt{4-m^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{m^2}\cdot\sqrt{4-m^2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{m^2+4-m^2}{2}=\sqrt{3}$。

当且仅当 $\sqrt{m^2}=\sqrt{4-m^2}$，即 $m^2=2$，$m=\pm\sqrt{2}$ 时取等号，经验证，满足题意。

∴$\triangle OAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$. ………………………………………… 11分

………………………………………………… 12分

21.【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$。

∵当 $k=1$ 时，$f(x)=xe^x-x-\ln x$

∴$f'(x)=e^x+xe^x-1-\frac{1}{x}=(x+1)\cdot\frac{xe^x-1}{x}$， ………………………………………… 2分

令 $g(x)=xe^x-1$，则 $g'(x)=e^x(x+1)>0$，

∴$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

∵$g(0)=-1<0$，$g(1)=e-1>0$，

∴ 存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$， ………………………………………… 4分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。

∴$f(x)$ 的最小值 $[f(x)]_{\min}=f(x_0)=x_0e^{x_0}-x_0-\ln x_0=x_0\cdot\frac{1}{x_0}-x_0-\ln e^{-x_0}=1$。

所以 $f(x)$ 的最小值为 1.

(2)$f(x)\geqslant1$ 恒成立，即 $xe^x-kx-\ln x\geqslant1$ 恒成立，

∴$k\leqslant e^x-\frac{\ln x+1}{x}$ 恒成立，令 $h(x)=e^x-\frac{\ln x+1}{x}$，其中 $x>0$，

则 $h'(x)=e^x-\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x-1}{x^2}=\dfrac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$,

令 $\varphi(x)=x^2e^x+\ln x$,显然 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………… 8分

又 $\varphi(1)=e>0$, $\varphi(\frac{1}{e})=\dfrac{e^{\frac{1}{e}}}{e^2}-1=e^{\frac{1}{e}-2}-1<e^0-1=0$,

∴存在 $x_1\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$,使得 $\varphi(x_1)=0$,

当 $x\in(0,x_1)$ 时, $h'(x)<0$, $h(x)$ 单调递减,

当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时, $h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增,

∴ $[h(x)]_{min}=h(x_1)$,

∵ $\varphi(x_1)=x_1^2e^{x_1}+\ln x_1=0$, ∴ $x_1^2e^{x_1}=-\ln x_1>0$,

∴ $2\ln x_1+x_1=\ln(-\ln x_1)$, $\ln x_1+x_1=\ln(-\ln x_1)+(-\ln x_1)$,

令 $Q(x)=\ln x+x$,显然 $Q(x)=\ln x+x$ 单调递增, ………………………………… 10分

∵ $Q(x_1)=Q(-\ln x_1)$, ∴ $x_1=-\ln x_1$,

$h(x_1)=e^{x_1}-\dfrac{\ln x_1+1}{x_1}=e^{-\ln x_1}-\dfrac{-x_1+1}{x_1}=\dfrac{1}{x_1}+1-\dfrac{1}{x_1}=1$,

∴ $k\leqslant 1$,

∴实数 k 的取值范围为 $(-\infty,1]$. ………………………………… 12分

22.【解析】(1)∵曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=-2\sqrt{2}\cos\theta$,

∴ $\rho^2=-2\sqrt{2}\rho\cos\theta$,将 $\rho^2=x^2+y^2$, $x=\rho\cos\theta$ 代入,

整理得曲线 C 的普通方程为 $(x+\sqrt{2})^2+y^2=2$, ………………………………… 2分

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时,直线 l 的直角坐标方程为: $x=\sqrt{2}$ ………………………………… 3分

当 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$ 时,由 $\begin{cases}x=\sqrt{2}+t\cos\alpha\\ y=\sqrt{2}+t\sin\alpha\end{cases}$ 消去参数 t 整理得:

$\tan\alpha\cdot x-y+\sqrt{2}(1-\tan\alpha)=0$, ………………………………… 5分

(2)显然,当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时,直线 l 与圆 C 不相切, ………………………………… 6分

当 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$ 时,若直线 l 与圆 C 恰好相切,则 $\dfrac{|-\sqrt{2}\tan\alpha+\sqrt{2}(1-\tan\alpha)|}{\sqrt{(\tan\alpha)^2+1}}=\sqrt{2}$,

$\tan\alpha=0$ 或 $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$. ………………………………… 10分

23.【解析】(1)当 $a=1$ 时,不等式 $f(x)<2x-1$ 可化为 $|x+1|<2x-1$,
………………………………… 2分

当 $x\geqslant -1$ 时, $x+1<2x-1$, $x>2$,所以 $x>2$; ………………………………… 4分

当 $x<-1$ 时, $-x-1<2x-1$, $x>0$,此时无解, ………………………………… 5分

因此,不等式 $f(x)<2x-1$ 的解集为 $\{x|x>2\}$.

(2)由 $f(1)\leqslant m$, $f(2)\leqslant m$ 得: $|a+1|\leqslant m$, $|2a+1|\leqslant m$,

$3m=2m+m\geqslant 2|a+1|+|2a+1|=|-2a-2|+|2a+1|\geqslant|(-2a-2)+(2a+1)|=1$
………………………………… 10分

当且仅当 $a+1$ 和 $2a+1$ 异号时等号成立,故 $m\geqslant\dfrac{1}{3}$.

则 $h'(x)=e^x-\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x-1}{x^2}=\dfrac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$,

令 $\varphi(x)=x^2e^x+\ln x$，显然 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $\varphi(1)=e>0$，$\varphi(\frac{1}{e})=\dfrac{e^{\frac{1}{e}}}{e^2}-1=e^{\frac{1}{e}-2}-1<e^0-1=0$， ………………………… 8分

∴存在 $x_1\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，使得 $\varphi(x_1)=0$，

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

∴$[h(x)]_{min}=h(x_1)$，

∵$\varphi(x_1)=x_1^2e^{x_1}+\ln x_1=0$，∴$x_1^2e^{x_1}=-\ln x_1>0$，

∴$2\ln x_1+x_1=\ln(-\ln x_1)$，$\ln x_1+x_1=\ln(-\ln x_1)+(-\ln x_1)$， ………………………… 10分

令 $Q(x)=\ln x+x$，显然 $Q(x)=\ln x+x$ 单调递增，

∵$Q(x_1)=Q(-\ln x_1)$，∴$x_1=-\ln x_1$，

$h(x_1)=e^{x_1}-\dfrac{\ln x_1+1}{x_1}=e^{-\ln x_1}-\dfrac{-x_1+1}{x_1}=\dfrac{1}{x_1}+1-\dfrac{1}{x_1}=1$，

∴$k\leqslant 1$，

∴实数 k 的取值范围为 $(-\infty,1]$． ………………………… 12分

22.【解析】(1)∵曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=-2\sqrt{2}\cos\theta$，

∴$\rho^2=-2\sqrt{2}\rho\cos\theta$，将 $\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\theta$ 代入，

整理得曲线 C 的普通方程为 $(x+\sqrt{2})^2+y^2=2$， ………………………… 2分

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，直线 l 的直角坐标方程为：$x=\sqrt{2}$ ………………………… 3分

当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，由 $\begin{cases}x=\sqrt{2}+t\cos\alpha\\ y=\sqrt{2}+t\sin\alpha\end{cases}$ 消去参数 t 整理得：

$\tan\alpha\cdot x-y+\sqrt{2}(1-\tan\alpha)=0$， ………………………… 5分

(2)显然，当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，直线 l 与圆 C 不相切， ………………………… 6分

当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，若直线 l 与圆 C 恰好相切，则 $\dfrac{|-\sqrt{2}\tan\alpha+\sqrt{2}(1-\tan\alpha)|}{\sqrt{(\tan\alpha)^2+1}}=\sqrt{2}$，

$\tan\alpha=0$ 或 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$． ………………………… 10分

23.【解析】(1)当 $a=1$ 时，不等式 $f(x)<2x-1$ 可化为 $|x+1|<2x-1$， ………………………… 2分

当 $x\geqslant -1$ 时，$x+1<2x-1$，$x>2$，所以 $x>2$； ………………………… 4分

当 $x<-1$ 时，$-x-1<2x-1$，$x>0$，此时无解， ………………………… 5分

因此，不等式 $f(x)<2x-1$ 的解集为 $\{x|x>2\}$．

(2)由 $f(1)\leqslant m$，$f(2)\leqslant m$ 得：$|a+1|\leqslant m$，$|2a+1|\leqslant m$，

$3m=2m+m\geqslant 2|a+1|+|2a+1|=|-2a-2|+|2a+1|\geqslant|(-2a-2)+(2a+1)|=1$ ………………………… 10分

当且仅当 $a+1$ 和 $2a+1$ 异号时等号成立，故 $m\geqslant\frac{1}{3}$．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 "精益求精、专业严谨" 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。