房山区 2020-2021 学年第一学期高三期末试题

数 学

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回，试卷自行保存。

第一部分 （选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）设集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x|x^2-x-2<0\}$，则 $M\cap N$ 等于

（A）$\{-2,-1\}$　　（B）$\{-1,0\}$　　（C）$\{1,2\}$　　（D）$\{0,1\}$

（2）命题“$\forall x>0$，$\ln(1+x)<x$”的否定是

（A）$\forall x>0$，均有 $\ln(1+x)\geqslant x$　　（B）$\forall x\leq 0$，均有 $\ln(1+x)\geqslant x$

（C）$\exists x_0>0$，使得 $\ln(1+x_0)\geqslant x_0$　　（D）$\exists x_0\leq 0$，使得 $\ln(1+x_0)\geqslant x_0$

（3）若复数 $z=(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$，则在复平面内复数 z 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

（4）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0\\ 2^x+1, x\leqslant 0\end{cases}$，则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 的值为

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{3}{2}$　　（C）3　　（D）5

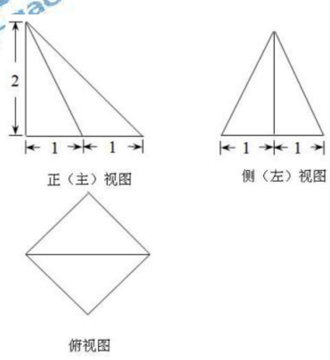
（5）某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的体积是

（A）$\frac{4}{3}$

（B）4

（C）$\frac{8}{3}$

（D）8



（6）若双曲线的实轴长与虚轴长之和等于其焦距的 $\sqrt{2}$ 倍，且一个顶点的坐标为 $(0,2)$，则双曲线

的标准方程为

（A）$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　（B）$\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}=1$　　（C）$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　　（D）$y^2-\dfrac{x^2}{4}=1$

（7）已知m，n，p，q均为实数，且$p>q$，则“$m>n$”是“$m-p>n-q$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）在平行四边形$ABCD$中，$AD=1$，$AB=\dfrac{1}{2}$，$\angle BAD=60^\circ$，E为CD的中点，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=$

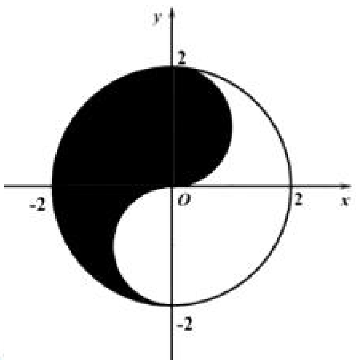
（A）-2　　（B）-1　　（C）1　　（D）2

（9）对于定义在$\mathbf{R}$上的函数$y=f(x)$，若存在非零实数x_0，使函数$y=f(x)$在$(-\infty,x_0)$和$(x_0,+\infty)$上均有零点，则称x_0为函数$y=f(x)$的一个“折点”．下列四个函数存在“折点”的是

（A）$f(x)=3^{|x-1|}+2$　　（B）$f(x)=\lg(|x|+2021)$

（C）$f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x-1$　　（D）$f(x)=x^2-2mx-1$

（10）众所周知的“太极图”，其形状如对称的阴阳两鱼互抱在一起，因而也被称为“阴阳鱼太极图”．下图是放在平面直角坐标系中的“太极图”，整个图形是一个圆形，其中黑色阴影区域在y轴右侧部分的边界为一个半圆，已知直线$l:y=a\left(x-2\right)$．给出以下命题：



①当$a=0$时，若直线l截黑色阴影区域所得两部分面积记为$s_1,s_2\left(s_1\geq s_2\right)$，则$s_1:s_2=3:1$；

②当$a=-\dfrac{4}{3}$时，直线l与黑色阴影区域有1个公共点；

③当$a\in\left[0,1\right]$时，直线l与黑色阴影区域有2个公共点．

其中所有正确命题的序号是

（A）①②　　（B）①③　　（C）②③　　（D）①②③

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 函数 $y=\ln(2x+1)+2$ 的定义域为____.

(12) 在二项式 $(1+x)^6$ 的展开式中，x^2 的系数为____.

(13) 在△ABC 中，若 $AB=4$，$BC=3$，$\cos B=\dfrac{2}{3}$，则 $\cos C=$____.

(14) 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F，且与该抛物线相交于 A,B 两点．若直线 l 的倾斜角为 45°，则△OAB 的面积为____.

(15) 复印纸幅面规格只采用 A 系列和 B 系列，其中 A 系列的幅面规格为：① $A_0,A_1,A_2,\ldots,A_8$ 所有规格的纸张的幅宽（以 x 表示）和长度（以 y 表示）的比例关系都为 $x:y=1:\sqrt{2}$；②将 A_0 纸张沿长度方向对开成两等分，便成为 A_1 规格；A_1 纸张沿长度方向对开成两等分，便成为 A_2 规格；…；如此对开至 A_8 规格. 现有 $A_0,A_1,A_2,\ldots,A_8$ 纸各一张. 若 A_4 纸的幅宽为 2 dm，则 A_0 纸的面积为____dm^2，这 9 张纸的面积之和等于____dm^2.

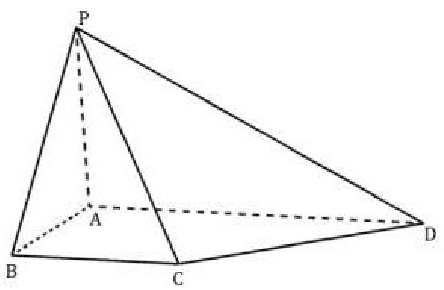
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle BAD=90^\circ$，$AD\,/\!/\,BC$，$PA\perp AD$，$PA\perp AB$，$PA=AB=BC=\dfrac{1}{2}AD=2$.

（Ⅰ）求证：$BC\,/\!/$ 平面 PAD；

（Ⅱ）求平面 PAB 与平面 PCD 所成锐二面角的余弦值.



（17）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=a\sin 2x+2\cos^2 x-1$，再从条件①、②、③这三个条件中选择一个作为已

知，求：

（Ⅰ）$f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）$f(x)$ 的单调递增区间．

条件①：$f(x)$ 图像的对称轴为 $x=\frac{\pi}{8}$；

条件②：$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$；

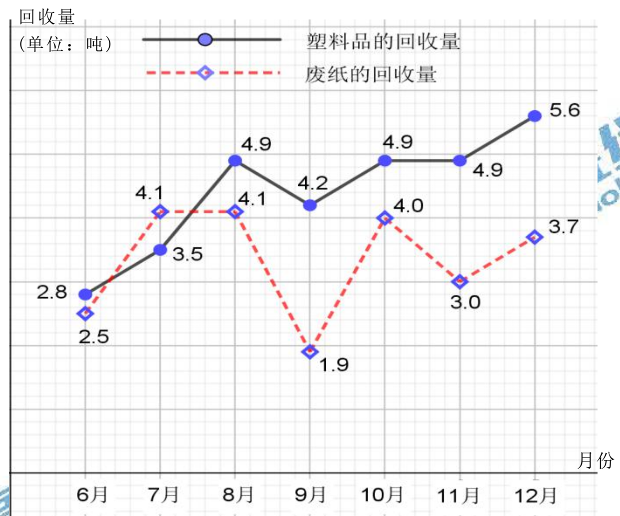
条件③：$a=\sqrt{3}$．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

（18）（本小题 14 分）

2020 年 5 月 1 日起，北京市实行生活垃圾分类，分类标准为厨余垃圾、可回收物、有害垃圾和其它垃圾四类．生活垃圾中有一部分可以回收利用，回收 1 吨废纸可再造出 0.8 吨好纸，降低造纸的污染排放，节省造纸能源消耗．

某环保小组调查了北京市房山区某垃圾处理场 2020 年 6 月至 12 月生活垃圾回收情况，其中可回收物中废纸和塑料品的回收量（单位：吨）的折线图如下图：



（Ⅰ）现从 2020 年 6 月至 12 月中随机选取 1 个月，求该垃圾处理厂可回收物中废纸和塑料品的回收量均超过 4.0 吨的概率；

（Ⅱ）从 2020 年 6 月至 12 月中任意选取 2 个月，记 X 为选取的这 2 个月中回收的废纸可再造好纸超过 3.0 吨的月份的个数．求 X 的分布列及数学期望；

(Ⅲ) 假设 2021 年 1 月该垃圾处理场可回收物中塑料品的回收量为 a 吨．当 a 为何值时，自 2020 年 6 月至 2021 年 1 月该垃圾处理场可回收物中塑料品的回收量的方差最小．（只需写出结论，不需证明）

（注：方差 $s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\bar{x}\right)^2\right]$，其中 $\bar{x}$ 为 x_1，x_2，…… x_n 的平均数）

（19）（本小题 14 分）

已知椭圆$G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，且过$(0,1)$点.

（Ⅰ）求椭圆G的方程；

（Ⅱ）设不过原点O且斜率为$\dfrac{1}{3}$的直线l与椭圆G交于不同的两点C,D，线段CD的中点为M，直线OM与椭圆G交于E,F，证明：$|MC|\cdot|MD|=|ME|\cdot|MF|$.

（20）（本小题 15 分）

已知函数$f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}ax^2+ax\,(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当$a=0$时，求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（Ⅱ）若$a>0$，讨论函数$f(x)$的单调性；

（Ⅲ）当$x\geqslant 2$时，$f(x)\geqslant 0$恒成立，求a的取值范围.

(21)(本小题 14 分)

数 列 $\{a_n\}$ 中， 给 定 正 整 数 m $(m>1)$ ， $V(m)=\sum\limits_{i=1}^{m-1}|a_{i+1}-a_i|$. 定 义：数 列 $\{a_n\}$ 满 足 $a_{i+1}\le a_i\ (i=1,2,\cdots,m-1)$，称数列$\{a_n\}$的前$m$项单调不增.

（Ⅰ）若数列$\{a_n\}$通项公式为：$a_n=(-1)^n,(n\in\mathbf{N}^*)$，求$V(5)$；

（Ⅱ）若数列$\{a_n\}$满足：$a_1=a,a_m=b,(m>1,m\in\mathbf{N}^*,a>b)$，求证$V(m)=a-b$的充分必要条件是数列$\{a_n\}$的前$m$项单调不增;

（Ⅲ）给定正整数m $(m>1)$，若数列$\{a_n\}$满足：$a_n\geqslant 0,(n=1,2,\cdots,m)$，且数列$\{a_n\}$的前$m$项和为$m^2$，求$V(m)$的最大值与最小值.(写出答案即可)

房山区 2020-2021 学年第一学期期末试题参考答案

高三数学

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	(D)	（C）	（A）	（B）	（A）	（B）	（B）	（C）	(D)	(A)

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）$(-\frac{1}{2},+\infty)$　（12）15　（13）$\frac{1}{9}$　（14）$2\sqrt{2}$　（15）$64\sqrt{2}$，$\frac{511}{4}\sqrt{2}$

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16)(Ⅰ)证明：

解法 1.　因为 $BC//AD$

$BC\not\subset$ 平面 PAD

$AD\subset$ 平面 PAD

所以 $BC//$ 平面 PAD ……………………………………4 分

解法 2.

因为 $PA\perp AD$，$PA\perp AB$，$AD\perp AB$，所以

以 A 为坐标原点，AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示空间直角坐标系

$A-xyz$，则

$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$D(0,4,0)$，$P(0,0,2)$，$C(2,2,0)$ ……………………………………1 分

(此处建系，第（Ⅱ）问不重复给分)

平面 PAD 的法向量为 $\vec{t}=(1,0,0)$ ……………………………………2 分

$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$ ……………………………………3 分

因为 $\vec{t}\bullet\overrightarrow{BC}=0\times1+2\times0+0\times0=0$ ……………………………………4 分

$BC\not\subset$ 平面 PAD ……………………………………5 分

所以 $BC//$ 平面 PAD

（Ⅱ）解：因为 $PA\perp AD$，$PA\perp AB$ $AD\perp AB$，所以

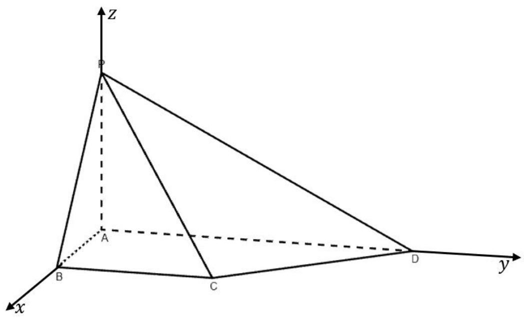
以 A 为坐标原点，AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示空间直角坐标系

$A-xyz$，则

$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$D(0,4,0)$，$P(0,0,2)$，$C(2,2,0)$ ……………………5 分

所以平面 PAB 的法向量为

$\vec{n}=(0,1,0)$ ……………………6 分



设平面 PCD 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$

$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$，

$\overrightarrow{PD}=(0,4,-2)$ ……………………8 分

所以

$$\begin{cases}\vec{m}\perp\overrightarrow{PC}\\ \vec{m}\perp\overrightarrow{PD}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{m}\bullet\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{m}\bullet\overrightarrow{PD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+2y-2z=0\\ 4y-2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\\ z=2y\end{cases}$$ ……………………10 分

令 $y=1$ 得 $\vec{m}=(1,1,2)$ ……………………11 分

$$\cos<\vec{n},\vec{m}>=\frac{\vec{n}\bullet\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\frac{1}{1\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$ ……………………13 分

设平面 PAB 与平面 PCD 所成角为 θ，θ 为锐角，所以 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ……………………14 分

（17）选①（$f(x)$ 图像的一条对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{8}$） ……………………1 分

解：（Ⅰ）$f(x)=a\sin 2x+2\cos^2 x-1$

$$=a\sin 2x+\cos 2x$$

$$=\sqrt{a^2+1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cos 2x\right)$$

$$=\sqrt{a^2+1}\sin(2x+\varphi)(\text{其中}\tan\varphi=\frac{1}{a})$$

因为 $f(x)$ 图像的一条对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{8}$

所以 $f(\frac{\pi}{8})=\sqrt{a^2+1}\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)=\pm\sqrt{a^2+1}$

即有 $\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$

所以 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z$

所以 $\tan\varphi=\tan(k\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1=\frac{1}{a}$

$\therefore a=1$ ……………………6 分

故 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为：$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ ……………………8 分

（II） $\because -\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ ……………………11 分

$\therefore -\frac{3\pi}{4}+2k\pi\le 2x\le\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in Z$

$\therefore -\frac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{8}+k\pi,k\in Z$ ……………………13 分

所以 $f(x)$ 的递增区间为 $[-\frac{3\pi}{8}+\mathrm{k}\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi],\mathrm{k}\in Z$ ……………………14 分

选②（$f(\frac{\pi}{4})=1$） ……………………1 分

解：（I）$f\left(x\right)=a\sin 2x+2\cos^2 x-1$

$=a\sin 2x+\cos 2x$

$\therefore f(\frac{\pi}{4})=a\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=1$

$\therefore a=1$

$f(x)=\sin 2x+\cos 2x$

$=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x)$

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为：$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ ……………………8 分

（Ⅱ） $\because -\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ ……………………11 分

$\therefore -\frac{3\pi}{4}+2k\pi\le 2x\le\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in Z$

$\therefore -\frac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{8}+k\pi,k\in Z$ ……………………13 分

所以 $f(x)$ 的递增区间为 $[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi],k\in Z$ ……………………14 分

选③（$a=\sqrt{3}$） ……………………1 分

解：（Ⅰ）$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$

$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为：$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ ……………………8 分

（Ⅱ） $\because -\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ ……………………11 分

$\therefore -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\le 2x\le\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$

$\therefore -\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$ ……………………13 分

所以 $f(x)$ 的递增区间为 $[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi],k\in Z$ ……………………14 分

（18）解：（Ⅰ）记“该垃圾处理厂可回收物中废纸和塑料品的回收量均超过 4.0 吨”为事件 A ……………………1 分

由题意，只有 8 月份的可回收物中废纸和塑料品的回收量均超过 4.0 吨

……………………2 分

所以 $P(A)=\frac{1}{7}$. ……………………4 分

（Ⅱ）因为回收利用 1 吨废纸可再造出 0.8 吨好纸

所以 6 月至 12 月回收的废纸可再造好纸超过 3.0 吨的月份有：7 月、8 月、10 月，共 3 个月.

X 的所有可能取值为 0，1，2. ……………………5 分

$$P(X=0)=\frac{C_3^0C_4^2}{C_7^2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_4^1}{C_7^2}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2C_4^0}{C_7^2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$$ ……………………8 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

……………………9 分

$$E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$ ……………………11 分

(Ⅲ) $a=4.4$ ……………………14 分

当添加的新数 a 等于原几个数的平均值时，方差最小.

（19）解:（I）根据题意：

$$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\\ b^2=a^2-c^2\\ b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=1\\ c=2\sqrt{2}\end{cases}$$ ……………………4 分

所以椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ ……………………5 分

(II) 设直线 l 的方程为：$y=\frac{1}{3}x+m(m\neq 0)$ ……………………6 分

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+y^2=1\\ y=\dfrac{1}{3}x+m\end{cases}$ 消去 y 得：$x^2+9(\dfrac{1}{3}x+m)^2-9=0$ ……………………7 分

即 $2x^2+6mx+9m^2-9=0$

需 $\Delta=36m^2-8(9m^2-9)>0$ 即 $0<m^2<2$ ……………………8 分

设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$，CD 中点 $M(x_0,y_0)$，则

$x_1+x_2=-3m,x_1x_2=\dfrac{9}{2}(m^2-1)$ ……………………9 分

$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{3}{2}m,y_0=\dfrac{1}{3}x_0+m=\dfrac{1}{2}m$ ……………………10 分

那么直线 OM 的方程为: $y=\dfrac{y_0}{x_0}x$ 即 $y=-\dfrac{1}{3}x$ ……………………11 分

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+y^2=1\\ y=-\dfrac{1}{3}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\ y=\mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

不妨令 $E(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}),F(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ ……………………12 分

那么

$|MC|\cdot|MD|=\dfrac{1}{4}|CD|^2=\dfrac{1}{4}(1+\dfrac{1}{9})[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$

$=\dfrac{5}{18}[(-3m)^2-4\bullet\dfrac{9}{2}(m^2-1)]$

$=\dfrac{5}{2}(2-m^2)$

……………………13 分

$|ME|\cdot|MF|=\sqrt{(-\frac{3}{2}m-\frac{3\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{m}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\cdot\sqrt{(-\frac{3}{2}m+\frac{3\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{m}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$

$=\sqrt{\frac{5}{2}m^2+5\sqrt{2}m+5}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}m^2-5\sqrt{2}m+5}$

$=\sqrt{(\frac{5}{2}m^2+5)^2-(5\sqrt{2}m)^2}=\sqrt{(\frac{5}{2}m^2-5)^2}=\frac{5}{2}(2-m^2)$

……………………14 分

所以 $|MC|\cdot|MD|=|ME|\cdot|MF|$

（20）解：（Ⅰ）当 $a=0$ 时，$f(x)=(x-2)e^x$

$f(0)=(0-2)e^0=-2$，……………………1 分

$f'(x)=(x-1)e^x$，$k=f'(0)=(0-1)e^0=-1$ ……………………3 分

所以切线方程为：$y+2=-(x-0)$

即：$y=-x-2$ ……………………4 分

（Ⅱ）由题 $f(x)=(x-2)e^x-\frac{1}{2}ax^2+ax$，可得

$f'(x)=(x-1)e^x-ax+a=(x-1)(e^x-a)$ ……………………5 分

由于 $a>0$，$f'(x)=0$ 的解为 $x_1=\ln a$，$x_2=1$，……………………6 分

（1）当 $\ln a=1$，即 $a=e$ 时，$f'(x)\geq 0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；……………………7 分

（2）当 $\ln a<1$，即 $0<a<e$ 时，

在区间 $(-\infty,\ln a)$，$(1,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$；在区间 $(\ln a,1)$ 上，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,\ln a)$，$(1,+\infty)$；单调减区间为 $(\ln a,1)$. ……………………9 分

(3) 当 $\ln a>1$，即 $a>e$ 时，

在区间 $(-\infty,1)$，$(\ln a,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$；

在区间$(1,\ln a)$上，$f'(x)<0$，

则$f(x)$在$(-\infty,1),(\ln a,+\infty)$上单调递增，$(1,\ln a)$上单调递减. ……………………11 分

（III）解法一：

$f'(x)=(x-1)(e^x-a)$

（1）当$a\le 0$时，因为$x\ge 2$，所以$x-1>0$，$e^x-a>0$，所以$f'(x)>0$，

则$f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增，$f(x)\ge f(2)=0$成立 ……………………………12 分

（2）当$0<a\le e^2$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增，所以$f(x)\ge f(2)=0$成立. ……………………………13 分

（3）当$a>e^2$时，在区间$(2,\ln a)$上，$f'(x)<0$；在区间$(\ln a,+\infty)$，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(2,\ln a)$上单调递减，$(\ln a,+\infty)$上单调递增，所以$f(x)\le f(2)=0$，不符合题意. ……………………………14 分

综上所述，a的取值范围是$(-\infty,e^2]$. ……………………………15 分

解法二：

当$x\ge 2$时，$f(x)\ge 0$恒成立，等价于"当$x\ge 2$时，$(x-2)e^x-\frac{1}{2}ax^2+ax\ge 0$恒成立".

即$(\frac{1}{2}x^2-x)a\le (x-2)e^x$在$[2,+\infty)$上恒成立. ……………………………12 分

当$x=2$时，$0\cdot a\le 0$，所以$a\in R$. ……………………………13 分

当$x>2$时，$\frac{1}{2}x^2-x>0$，所以$a\le \dfrac{(x-2)e^x}{\frac{1}{2}x^2-x}=\dfrac{2e^x}{x}$恒成立.

设 $g(x)=\dfrac{2e^x}{x}$，则 $g'(x)=2\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

因为 $x>2$，所以 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)>g(2)=e^2$，所以 $a\le e^2$. ……………………………………14 分

综上所述，a 的取值范围是 $\left(-\infty,e^2\right]$. ……………………………………15 分

(21)解:（Ⅰ）$V(5)=8$. ……………………………………4 分

(Ⅱ)充分性：若数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项单调不增，即 $a_m\le\cdots\le a_2\le a_1$

此时有：

$$V(m)=\sum_{i=1}^{m-1}\left|a_{i+1}-a_i\right|=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{m-1}-a_m)$$
$$=a_1-a_m=a-b.$$

必要性：反证法，若数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项不是单调不增，则存在 $i(1\le i\le m-1)$ 使得 $a_{i+1}>a_i$，那么：

$$\begin{aligned}V(m)&=\sum_{i=1}^{m-1}\left|a_{i+1}-a_i\right|\\&=\sum_{t=1}^{i-1}\left|a_{i+1}-a_i\right|+\left|a_{i+1}-a_i\right|+\sum_{t=i+1}^{m}\left|a_{i+1}-a_i\right|\\&=\left|a_i-a_1\right|+(a_{i+1}-a_i)+\left|a_m-a_{i+1}\right|\\&\ge\left|a_m-a_1+a_i-a_{i+1}\right|+(a_{i+1}-a_i)\\&=\left|a-b+a_{i+1}-a_i\right|+(a_{i+1}-a_i).\end{aligned}$$

由于 $a_{i+1}>a_i$，$a>b$，.

$$\therefore\ \left|a-b+a_{i+1}-a_i\right|+(a_{i+1}-a_i)>\mathrm{a}-\mathrm{b}.$$

与已知矛盾. ……………………………………9 分

(Ⅲ)最小值为 0. 此时 $\{a_n\}$ 为常数列. ……………………………………10 分

最大值为 $\begin{cases}4 & m=2,\\ 2m^2 & m>2.\end{cases}$

当 $m=2$ 时的最大值：此时 $a_1+a_2=4,(a_1,a_2\ge0)$，……………………………………11 分

$\left|a_1-a_2\right|\le\left|4-0\right|=4$.

当 $m>2$ 时的最大值：此时 $a_1+a_2+\cdots=m^2,(a_1,a_2,\cdots,a_n\geq 0)$.

由 $|x-y|\leq|x|+|y|$ 易证，$\{a_n\}$ 的值的只有是大小交替出现时，才能让 $V(m)$ 取最大值.

不妨设：$a_{i+1}\leq a_i$ ，i 为奇数，$a_{i+1}\geq a_i$ ，i 为偶数. 当 m 为奇数时有：

$$\begin{aligned}
V(m)&=\sum_{i=1}^{m-1}|a_{i+1}-a_i|\\
&=a_1-a_2+a_3-a_2+a_3-a_4+a_5-a_4+\cdots+a_m-a_{m-1}\\
&=2\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{i=1}^{(m-1)/2}a_{2i}\\
&\leq 2\sum_{i=1}^{m}a_i=2m^2.
\end{aligned}$$

当 m 为偶数时同理可证. ……………………………………14

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。