北京市朝阳区高三年级第二次综合练习

数学学科测试(理工类)　　2017.5

(考试时间120分钟　满分150分)

本试卷分为选择题(共40分)和非选择题(共110分)两部分

第一部分(选择题　共40分)

一、选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 已知i为虚数单位,则复数 $z=i(1+2i)$ 对应的点位于

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

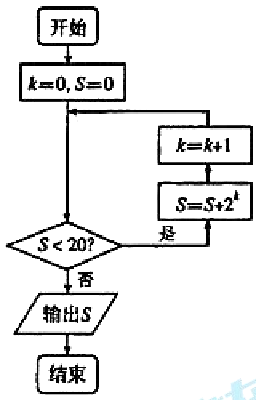
2. 执行如图所示的程序框图,则输出的 S 值是

A. 23

B. 31

C. 32

D. 63



第2题图

3. "$x>0, y>0$"是"$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2$"的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 的最小正周期为 4π,则

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后,所得的图象关于原点对称

D. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调递增

5. 现将5张连号的电影票分给甲、乙等5个人,每人一张,且甲、乙分得的电影票连号,则共有不同分法的种数为

A. 12　B. 24　C. 36　D. 48

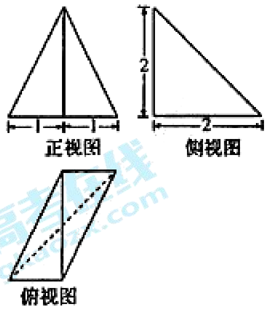
6. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥最长的棱长为

A. $\sqrt{5}$

B. $2\sqrt{2}$

C. 3

D. $3\sqrt{2}$



第 6 题图

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_a x, x>0,\\ |x+3|, -4\leq x<0\end{cases}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$. 若函数 $f(x)$ 的图象上有且只有两个点关于 y 轴对称，则 a 的取值范围是

A. $(0,1)$　　B. $(1,4)$　　C. $(0,1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(0,1)\cup(1,4)$

8. 中国古代儒家要求学生掌握六种基本才艺：礼、乐、射、御、书、数，简称“六艺”. 某中学为弘扬“六艺”的传统文化，分别进行了主题为“礼、乐、射、御、书、数”六场传统文化知识的竞赛. 现有甲、乙、丙三位选手进入了前三名的最后角逐. 规定：每场知识竞赛前三名的得分都分别为 a,b,c $(a>b>c$ 且 $a,b,c\in\mathbf{N}^*)$；选手最后得分为各场得分之和. 在六场比赛后，已知甲最后得分为 26 分，乙和丙最后得分都为 11 分，且乙在其中一场比赛中获得第一名，则下列说法正确的是

A. 每场比赛第一名得分 a 为 4　　B. 甲可能有一场比赛获得第二名

C. 乙有四场比赛获得第三名　　D. 丙可能有一场比赛获得第一名

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$ 的渐近线方程是________，离心率是________.

10. 若平面向量 $a=(\cos\theta,\sin\theta)$，$b=(1,-1)$，且 $a\perp b$，则 $\sin 2\theta$ 的值是________.

11. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $a_1=2$，$a_4=-2$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$________，$S_9=$________.

12. 在极坐标系中，圆 $\rho=2\cos\theta$ 被直线 $\rho\cos\theta=\frac{1}{2}$ 所截得的弦长为________.

13. 已知 x,y 满足 $\begin{cases}y\geq x,\\ x+y\leq 4,\\ 2x-y\geq k.\end{cases}$ 若 $z=x+2y$ 有最大值 8，则实数 k 的值为________.

14. 已知两个集合 A,B，满足 $B\subseteq A$. 若对任意的 $x\in A$，存在 $a_i,a_j\in B$ $(i\neq j)$，使得 $x=\lambda_1 a_i+\lambda_2 a_j$ $(\lambda_1,\lambda_2\in\{-1,0,1\})$，则称 B 为 A 的一个基集. 若 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，则其基集 B 的元素个数的最小值是________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（本小题满分 13 分）

在$\triangle ABC$中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $b=c$，$2\sin B=\sqrt{3}\sin A$．

（Ⅰ）求 $\cos B$ 的值；

（Ⅱ）若 $a=2$，求$\triangle ABC$的面积．

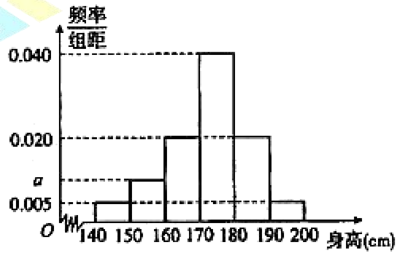
16.（本小题满分 13 分）

从某市的中学生中随机调查了部分男生，获得了他们的身高数据，整理得到如下频率分布直方图．

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）假设同组中的每个数据用该组区间的中点值代替，估计该市中学生中全体男生的平均身高；

（Ⅲ）从该市中学的男生中随机抽取一人，根据直方图中的信息，估计其身高在 180cm 以上的概率．若从该市中学的男生（人数众多）中随机抽取 3 人，用 X 表示身高在 180cm 以上的男生人数，求随机变量 X 的分布列和数学期望 EX．



17.（本小题满分 14 分）

如图 1，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=2$，D,E 分别为边 AC,AB 的中点，点 F,G 分别为线段 CD,BE 的中点．将$\triangle ADE$沿 DE 折起到$\triangle A_1DE$的位置，使得$\angle A_1DC=60°$．点 Q 为线段 A_1B 上的一点，如图 2．

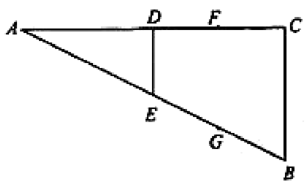


图1

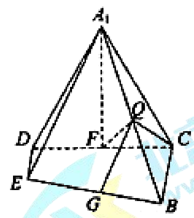


图2

（Ⅰ）求证：$A_1F\perp BE$；

（Ⅱ）线段 A_1B 上是否存在点 Q，使得 $FQ\parallel$ 平面 A_1DE？若存在，求出线段 A_1Q 的长；若不存在，请说明理由．

（Ⅲ）当$\overrightarrow{A_1Q}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A_1B}$时，求直线 GQ 与平面 A_1DE 所成角的大小．

18.（本小题满分 13 分）

已知椭圆 $W:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上下顶点分别为 A,B，且点 $B(0,-1)$. F_1,F_2 分别为椭圆 W 的左、右焦点，且 $\angle F_1BF_2=120^\circ$.

（Ⅰ）求椭圆 W 的标准方程；

（Ⅱ）点 M 是椭圆上异于 A,B 的任意一点，过点 M 作 $MN\perp y$ 轴于 N，E 为线段 MN 的中点．直线 AE 与直线 $y=-1$ 交于点 C，G 为线段 BC 的中点，O 为坐标原点．求 $\angle OEG$ 的大小.

19.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=e^x+x^2-x$，$g(x)=x^2+ax+b(a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线 l 与曲线 $y=g(x)$ 切于点 $(1,c)$，求 a,b,c 的值；

（Ⅲ）若 $f(x)\geq g(x)$ 恒成立，求 $a+b$ 的最大值.

20.（本小题满分 13 分）

各项均为非负整数的数列 $\{a_n\}$ 同时满足下列条件：

①$a_1=m(m\in\mathbf{N}^*)$；②$a_n\leq n-1(n\geq 2)$；③n 是 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的因数 $(n\geq 1)$.

（Ⅰ）当 $m=5$ 时，写出数列 $\{a_n\}$ 的前五项；

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$ 的前三项互不相等，且 $n\geq 3$ 时，a_n 为常数，求 m 的值；

（Ⅲ）求证：对任意正整数 m，存在正整数 M，使得 $n\geq M$ 时，a_n 为常数.

北京市朝阳区高三年级第二次综合练习

数学学科测试(理工类)

2017.5

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	B	B	A	C	D	C	D	C

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

题号	(9)		(10)	(11)		(12)	(13)	(14)
答案	$y=\pm\sqrt{2}x$	$\sqrt{3}$	1	$2\times(-1)^{n-1}$	2	$\sqrt{3}$	-4	4

三、解答题:

(15)(本小题满分 13 分)

解:(Ⅰ)因为 $2\sin B=\sqrt{3}\sin A$,所以 $2b=\sqrt{3}a$.

所以 $a=\dfrac{2b}{\sqrt{3}}$.

所以 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\left(\dfrac{2b}{\sqrt{3}}\right)^2+b^2-b^2}{2\times\dfrac{2b}{\sqrt{3}}\cdot b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. …………7 分

(Ⅱ)因为 $a=2$,所以 $b=c=\sqrt{3}$.

又因为 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}$. …………13 分

(16)(本小题满分 13 分)

解:(Ⅰ)根据题意得:$(0.005\times2+a+0.020\times2+0.040)\times10=1$.

解得 $a=0.010$. …………3 分

(Ⅱ)设样本中男生身高的平均值为 $\bar{x}$,则

$$\begin{aligned}\bar{x}&=145\times0.05+155\times0.1+165\times0.2+175\times0.4+185\times0.2+195\times0.05\\&=(145+195)\times0.05+155\times0.1+(165+185)\times0.2+175\times0.4\\&=17+15.5+70+70=172.5.\end{aligned}$$

所以估计该市中学全体男生的平均身高为 172.5 cm. …………7 分

(Ⅲ)从全市中学的男生中任意抽取一人,估计其身高在 180cm 以上的概率为$\dfrac{1}{4}$. 由已知得,随机变量 X 的可能取值为 0,1,2,3.

所以$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$;

$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$;

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{64}$;

$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{64}$.

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

因为 $X\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$,所以 $EX=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. …………13 分

(17)(本小题满分 14 分)

解:(Ⅰ)因为 $A_1D=DC$, $\angle A_1DC=60°$,

所以$\triangle A_1DC$ 为等边三角形.

又因为点 F 为线段 CD 的中点,

所以 $A_1F\perp DC$.

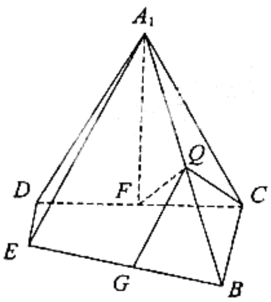
由题可知 $ED\perp A_1D$, $ED\perp DC$,

所以 $ED\perp$平面 A_1DC.

因为 $A_1F\subset$平面 A_1DC,所以 $ED\perp A_1F$.

又 $ED\cap DC=D$,所以 $A_1F\perp$平面 $BCDE$.

所以 $A_1F\perp BE$. …………5 分



(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $A_1F\perp$平面 $BCDE$, $FG\perp DC$,如图建立空间直角坐标系,则 $F(0,0,0)$, $D(0,-1,0)$, $C(0,1,0)$, $E(1,-1,0)$, $A_1(0,0,\sqrt{3})$, $B(2,1,0)$.

设平面 A_1DE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$, $\overrightarrow{A_1D}=(0,-1,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{DE}=(1,0,0)$,

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0.\end{cases}$即$\begin{cases}y+\sqrt{3}z=0,\\ x=0.\end{cases}$

令 $z=1$,所以 $y=-\sqrt{3}$,所以 $\boldsymbol{n}=(0,-\sqrt{3},1)$.

假设在线段 A_1B 上存在点 Q,使 FQ//平面 A_1DE.

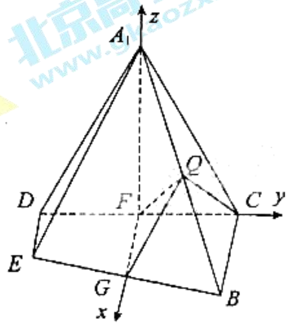
设$\overrightarrow{A_1Q}=\lambda\overrightarrow{A_1B}$, $\lambda\in[0,1]$.

又$\overrightarrow{A_1B}=(2,1,-\sqrt{3})$,所以$\overrightarrow{A_1Q}=(2\lambda,\lambda,-\sqrt{3}\lambda)$.

所以 $Q(2\lambda,\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$. 则$\overrightarrow{FQ}=(2\lambda,\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$.

所以$\overrightarrow{FQ}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{3}\lambda+\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda=0$.

解得, $\lambda=\frac{1}{2}$.



则在线段 A_1B 上存在中点 Q,使 FQ//平面 A_1DE.

且 $A_1Q=\sqrt{2}$. …………10 分

（Ⅲ）因为$\overrightarrow{A_1Q}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A_1B}$，又$\overrightarrow{A_1B}=(2,1,-\sqrt{3})$，所以$\overrightarrow{A_1Q}=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4},-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

所以 $Q\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 又因为 $G\left(\frac{3}{2},0,0\right)$，

所以$\overrightarrow{GQ}=\left(0,\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

因为 $\boldsymbol{n}=(0,-\sqrt{3},1)$，设直线 GQ 与平面 A_1DE 所成角为 θ.

$$\text{则 }\sin\theta=\left|\frac{\overrightarrow{GQ}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{GQ}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{0-\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}}{2\times\frac{2\sqrt{3}}{4}}\right|=\frac{1}{2}.$$

则直线 GQ 与平面 A_1DE 所成角为 $30°$. …………14 分

（18）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）依题意，得 $b=1$. 又$\angle F_1BF_2=120°$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BF_1O$ 中，$\angle F_1BO=60°$，所以 $a=2$.

所以椭圆 W 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………4 分

（Ⅱ）设 $M(x_0,y_0)$，$x_0\neq0$，则 $N(0,y_0)$，$E\left(\frac{x_0}{2},y_0\right)$.

因为点 M 在椭圆 W 上，所以$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$. 即 $x_0^2=4-4y_0^2$.

又 $A(0,1)$，所以直线 AE 的方程为 $y-1=\frac{2(y_0-1)}{x_0}x$.

令 $y=-1$，得 $C\left(\frac{x_0}{1-y_0},-1\right)$.

又 $B(0,-1)$，G 为线段 BC 的中点，所以 $G\left(\frac{x_0}{2(1-y_0)},-1\right)$.

所以$\overrightarrow{OE}=\left(\frac{x_0}{2},y_0\right)$，$\overrightarrow{GE}=\left(\frac{x_0}{2}-\frac{x_0}{2(1-y_0)},y_0+1\right)$.

$$\begin{aligned}\text{因为}\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{GE}&=\frac{x_0}{2}\left(\frac{x_0}{2}-\frac{x_0}{2(1-y_0)}\right)+y_0(y_0+1)\\&=\frac{x_0^2}{4}-\frac{x_0^2}{4(1-y_0)}+y_0^2+y_0\\&=1-\frac{4-4y_0^2}{4(1-y_0)}+y_0\\&=1-y_0-1+y_0=0,\end{aligned}$$

所以$\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{GE}$. 即$\angle OEG=90°$. …………13 分

(19)(本小题满分 14 分)

解:(Ⅰ)$F(x)=e^x-2x-b$,则 $F'(x)=e^x-2$.

令 $F'(x)=e^x-2>0$,得 $x>\ln2$,所以 $F(x)$ 在 $(\ln2,+\infty)$ 上单调递增.

令 $F'(x)=e^x-2<0$,得 $x<\ln2$,所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,\ln2)$ 上单调递减. …………4 分

(Ⅱ)因为 $f'(x)=e^x+2x-1$,所以 $f'(0)=0$,所以 l 的方程为 $y=1$.

依题意,$-\frac{a}{2}=1$,$c=1$.

于是 l 与抛物线 $g(x)=x^2-2x+b$ 切于点 $(1,1)$,

由 $1^2-2+b=1$ 得 $b=2$.

所以 $a=-2,b=2,c=1$. …………8 分

(Ⅲ)设 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-(a+1)x-b$,则 $h(x)\geqslant0$ 恒成立.

易得 $h'(x)=e^x-(a+1)$.

(1)当 $a+1\leqslant0$ 时,

因为 $h'(x)>0$,所以此时 $h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

①若 $a+1=0$,则当 $b\leqslant0$ 时满足条件,此时 $a+b\leqslant-1$;

②若 $a+1<0$,取 $x_0<0$ 且 $x_0<\frac{1-b}{a+1}$,

此时 $h(x_0)=e^{x_0}-(a+1)x_0-b<1-(a+1)\frac{1-b}{a+1}-b=0$,所以 $h(x)\geqslant0$ 不恒成立. 不满足条件;

(2)当 $a+1>0$ 时,

令 $h'(x)=0$,得 $x=\ln(a+1)$. 由 $h'(x)>0$,得 $x>\ln(a+1)$;

由 $h'(x)<0$,得 $x<\ln(a+1)$.

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln(a+1))$ 上单调递减,在 $(\ln(a+1),+\infty)$ 上单调递增.

要使得"$h(x)=e^x-(a+1)x-b\geqslant0$ 恒成立",必须有

"当 $x=\ln(a+1)$ 时,$h(x)_{\min}=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b\geqslant0$"成立.

所以 $b\leqslant(a+1)-(a+1)\ln(a+1)$. 则 $a+b\leqslant2(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-1$.

令 $G(x)=2x-x\ln x-1$,$x>0$,则 $G'(x)=1-\ln x$.

令 $G'(x)=0$,得 $x=e$. 由 $G'(x)>0$,得 $0<x<e$;

由 $G'(x)<0$,得 $x>e$. 所以 $G(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增,在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,

所以,当 $x=e$ 时,$G(x)_{\max}=e-1$.

从而,当 $a=e-1,b=0$ 时,$a+b$ 的最大值为 $e-1$.

综上,$a+b$ 的最大值为 $e-1$. …………14 分

(20)(本小题满分 13 分)

解:(Ⅰ)5,1,0,2,2. …………3 分

(Ⅱ)因为 $0\leqslant a_n\leqslant n-1$,所以 $0\leqslant a_2\leqslant 1,0\leqslant a_3\leqslant 2$,

又数列$\{a_n\}$的前 3 项互不相等,

(1)当 $a_2=0$ 时,

若 $a_3=1$,则 $a_3=a_4=a_5=\cdots=1$,

且对 $n\geqslant 3$,$\dfrac{m+0+(n-2)}{n}=\dfrac{m-2}{n}+1$ 都为整数,所以 $m=2$;

若 $a_3=2$,则 $a_3=a_4=a_5=\cdots=2$,

且对 $n\geqslant 3$,$\dfrac{m+0+2(n-2)}{n}=\dfrac{m-4}{n}+2$ 都为整数,所以 $m=4$;

(2)当 $a_2=1$ 时,

若 $a_3=0$,则 $a_3=a_4=a_5=\cdots=0$,且对 $n\geqslant 3$,$\dfrac{m+1+0\cdot(n-2)}{n}=\dfrac{m+1}{n}$都为整数,所以 $m=-1$,不符合题意;

若 $a_3=2$,则 $a_3=a_4=a_5=\cdots=2$,

且对 $n\geqslant 3$,$\dfrac{m+1+2(n-2)}{n}=\dfrac{m-3}{n}+2$ 都为整数,所以 $m=3$;

综上,m 的值为 2,3,4. …………8 分

(Ⅲ)对于 $n\geqslant 1$,令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,

则$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}<\dfrac{S_{n+1}}{n}=\dfrac{S_n+a_{n+1}}{n}\leqslant\dfrac{S_n+n}{n}=\dfrac{S_n}{n}+1$.

又对每一个 n,$\dfrac{S_n}{n}$都为正整数,所以$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}\leqslant\dfrac{S_n}{n}\leqslant\cdots\leqslant\dfrac{S_1}{1}=m$,其中“$<$”至多出现$m-1$个.故存在正整数 $M>m$,当 $n>M$ 时,必有$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n}{n}$成立.

当$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n}{n}$时,则 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\dfrac{(n+1)S_n}{n}-S_n=\dfrac{S_n}{n}$.

从而$\dfrac{S_{n+2}}{n+2}=\dfrac{a_{n+2}+a_{n+1}+S_n}{n+2}=\dfrac{a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}}{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{n+2}$.

由题设知$\dfrac{|a_{n+2}-a_{n+1}|}{n+2}\leqslant\dfrac{n+1}{n+2}<1$,又$\dfrac{S_{n+2}}{n+2}$及 a_{n+1} 均为整数,

所以$\dfrac{S_{n+2}}{n+2}=a_{n+1}=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{S_{n+1}}{n+1}$,故$\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_{n+2}}{n+2}=\cdots=$常数.

从而 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\dfrac{(n+1)S_n}{n}-S_n=\dfrac{S_n}{n}=$常数.

故存在正整数 M,使得 $n\geqslant M$ 时,a_n 为常数. …………13 分