数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. D　　2. C　　3. B　　4. A　　5. A　　6. D

7. B　　8. B

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. AC　　10. BCD　　11. ABD　　12. BD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. -1　　14. $\frac{25}{4}$

15. 3　　16. $\frac{1}{2}$

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解析　(Ⅰ)因为$\chi^2=\frac{400\times(160\times40-80\times120)^2}{240\times160\times280\times120}=\frac{200}{63}\approx3.175$, ……(2 分)

因为 $3.175<3.841$,所以不能认为男性和女性在选购羽绒服时的关注点有差异. ……(4 分)

(Ⅱ)选出的男性人数为 $5\times\frac{160}{400}=2$,选出的女性人数为 $5\times\frac{240}{400}=3$, ……(5 分)

由题意可得 X 的所有可能取值为 0,1,2, ……(6 分)

$P(X=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$,$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$,$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$, ……(8 分)

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

……(9 分)

所以 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$. ……(10 分)

18. 解析　(Ⅰ)因为 $EF\perp FC$,平面 $EFCD\perp$ 平面 $ABCF$,

所以 $EF\perp$ 平面 $ABCF$, ……(1 分)

又因为 $PC\subset$ 平面 $ABCF$,所以 $EF\perp PC$. ……(2 分)

在矩形 $ABCF$ 中,$AF=1$,$AB=2$,P 为 AB 的中点,

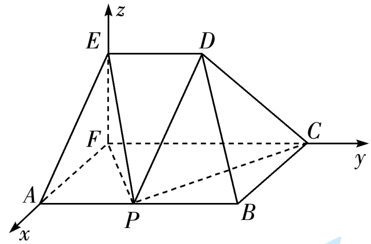
所以 $FP=CP=\sqrt{2}$,$FC=2$,根据勾股定理可得 $FP\perp PC$. ……(3 分)

因为 $EF\cap FP=F$,所以 $PC\perp$ 平面 EPF, ……(4 分)

所以平面 $EPF\perp$ 平面 DPC. ……(5 分)

(Ⅱ)以 F 为坐标原点,FA,FC,FE 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息



则 $D(0,1,1)$，$C(0,2,0)$，$B(1,2,0)$，$P(1,1,0)$. ……………………………………（6 分）

所以 $\overrightarrow{DC}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{DP}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,-1)$. ……………………………（7 分）

设平面 DPC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y-z=0,\\ x-z=0,\end{cases}$

令 $y=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$. ……………………………………………………………（9 分）

同理可得平面 BCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$. …………………………………………（10 分）

设平面 BCD 与平面 DPC 的夹角为 θ，

故 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，即平面 BCD 与平面 DPC 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ………………（12 分）

19. **解析**　（Ⅰ）因为 $a_n=2a_{n-1}-2n+4(n\geqslant 2)$，

所以 $a_n-2n=2[a_{n-1}-2(n-1)](n\geqslant 2)$. ……………………………………………（2 分）

所以 $\{a_n-2n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列. …………………………………………（4 分）

所以 $a_n-2n=2^n$，即 $a_n=2^n+2n$. ……………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $2^n\cdot a_n-4^n=n\cdot 2^{n+1}$. ……………………………………………………（7 分）

设前 n 项和为 T_n，

则 $T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\times2^{n+1}$，

$2T_n=1\times2^3+2\times2^4+3\times2^5+\cdots+n\times2^{n+2}$， ………………………………………（9 分）

两式相减可得

$$-T_n=2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-n\times2^{n+2}=\frac{2^2(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+2}=2^{n+2}-4-n\times2^{n+2}=(1-n)2^{n+2}-4,$$

所以 $T_n=(n-1)2^{n+2}+4$. ………………………………………………………………（12 分）

20. **解析**　（Ⅰ）由题意得 $S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$，$S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$， …………………………………（1 分）

则 $S_1-S_2-S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc$，所以 $a^2-b^2-c^2=bc$， ……………………（2 分）

由余弦定理可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$， ……………………………………………（3 分）

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$. ……………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）设 $\angle ACB=\alpha$（α 为锐角），在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

由正弦定理可得 $\dfrac{BD}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{AD}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}$，$\dfrac{CD}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{AD}{\sin(\pi-\alpha)}$， ……………………（6 分）

于是 $\dfrac{BD\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\sin\dfrac{5\pi}{6}}=\dfrac{CD\cdot\sin\alpha}{\sin\dfrac{\pi}{6}}$， ……………………………………………（7 分）

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息

又 $BD=4CD$，$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}$，

所以$\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha}=4$，…………………………………………（8 分）

化简得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$. …………………………………………（9 分）

根据同角三角函数基本关系，解得 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，…………………………………………（10 分）

故$\triangle ABC$ 的 BC 边上的高为 $AC\sin\alpha=\sqrt{7}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=2$. …………………………………………（12 分）

21. **解析** （Ⅰ）由题意知 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，

所以 $k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\frac{1}{2+a}\cdot\frac{1}{2-a}=\frac{1}{4-a^2}=\frac{1}{2}$，解得 $a=\sqrt{2}$，…………………………………………（2 分）

又$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$，所以 $b=1$，

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{2}-y^2=1$. …………………………………………（4 分）

（Ⅱ）因为$|MP|\cdot|NQ|=|MQ|\cdot|NP|$，所以$\frac{|MP|}{|MQ|}=\frac{|NP|}{|NQ|}$，

又因为点 M,N 在直线 $x=2$ 的两侧，所以直线 $PQ:x=2$ 是$\angle MPN$ 的平分线，

所以 $k_{MP}+k_{NP}=0$. …………………………………………（5 分）

由题，显然直线 l 的斜率存在且斜率不是$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，设 $l:y=kx+m\left(k\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立双曲线方程可得$(2k^2-1)x^2+4kmx+2m^2+2=0$，

故 $x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2-1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2+2}{2k^2-1}$. …………………………………………（6 分）

$k_{MP}+k_{NP}=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{kx_1+m-1}{x_1-2}+\frac{kx_2+m-1}{x_2-2}=0$，…………………………………………（8 分）

化简得 $2kx_1x_2+(m-1-2k)(x_1+x_2)-4(m-1)=0$，

故$\frac{2k(2m^2+2)}{2k^2-1}+(m-1-2k)\left(-\frac{4km}{2k^2-1}\right)-4(m-1)=0$，

即$(k+1)(m+2k-1)=0$，而直线 l 不过 P 点，故 $k=-1$. …………………………………………（10 分）

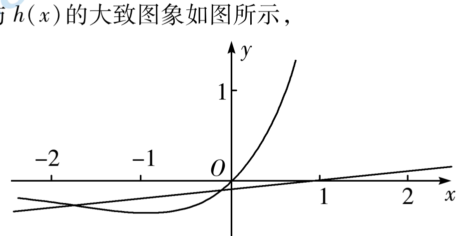
所以线段 MN 的中点 R 的坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=(2m,-m)$，

所以点 R 恒在直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 上. …………………………………………（12 分）

22. **解析** （Ⅰ）$f'(x)=(x+1)e^x$，…………………………………………（1 分）

可得 $f(x)$ 在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$(-1,+\infty)$上单调递增. …………………………………………（2 分）

令 $h(x)=m(x-1)$，作出 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的大致图象如图所示，



关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息

因为存在唯一的负整数 x_0，使得 $f(x_0)<h(x_0)$，则 $x_0=-1$，

故 $\begin{cases}f(-1)<h(-1),\\ f(-2)\geqslant h(-2),\end{cases}$ 即 $\dfrac{2}{3e^2}\leqslant m<\dfrac{1}{2e}$，

故 m 的取值范围为 $\left[\dfrac{2}{3e^2},\dfrac{1}{2e}\right)$. ……………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）根据题意，$af(x)+3\geqslant \ln\dfrac{a^2(x+1)}{8}$ 对 $x\in(-1,+\infty)$ 恒成立，

等价于 $axe^x-\ln(x+1)\geqslant 2\ln a-3\ln 2-3$ 对 $x\in(-1,+\infty)$ 恒成立. ……………………………（5 分）

令 $F(x)=axe^x-\ln(x+1)$，$x>-1$，则有 $F'(x)=a(xe^x+e^x)-\dfrac{1}{x+1}$，

令 $G(x)=F'(x)=a(xe^x+e^x)-\dfrac{1}{x+1}$，$x>-1$，

则 $G'(x)=a(x+2)e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$，所以 $F'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $x\to -1$ 时，$F'(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时，$F'(x)\to+\infty$，

从而存在唯一的 $x_0\in(-1,+\infty)$，使得 $F'(x_0)=0$，

即 $a(x_0e^{x_0}+e^{x_0})-\dfrac{1}{x_0+1}=0$， ……………………………………………………………（7 分）

可得 $a=\dfrac{1}{(x_0+1)^2e^{x_0}}$，$\ln a=-2\ln(x_0+1)-x_0$，

当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 上单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $F(x)\geqslant F(x_0)=ax_0e^{x_0}-\ln(x_0+1)$， ……………………………………………………（8 分）

故原不等式恒成立只需 $\dfrac{x_0}{(x_0+1)^2e^{x_0}}\cdot e^{x_0}-\ln(x_0+1)\geqslant 2[-2\ln(x_0+1)-x_0]-3\ln 2-3$，

即 $\dfrac{x_0}{(x_0+1)^2}+3\ln(x_0+1)+2x_0+3\ln 2+3\geqslant 0$. ………………………………………（9 分）

构造函数 $H(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}+3\ln(x+1)+2x+3\ln 2+3$，$x>-1$，

可得 $H'(x)=\dfrac{1-x}{(x+1)^3}+\dfrac{3}{x+1}+2=\dfrac{3x^2+5x+4}{(x+1)^3}+2$，……………………………………（10 分）

当 $x>-1$ 时，令 $u(x)=3x^2+5x+4$，因为 $\Delta=25-48=-23<0$，从而可得 $H'(x)>0$ 在 $x\in(-1,+\infty)$ 时恒成立，又 $H\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$，所以 $H(x)\geqslant 0$ 的解集为 $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. …………………………………（11 分）

又因为 $\ln a=-2\ln(x_0+1)-x_0$，

令 $v(x)=-2\ln(x+1)-x$，易得 $v(x)$ 在定义域内单调递减，

所以 $\ln a\leqslant -2\ln\left(-\dfrac{1}{2}+1\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\ln 4$，所以 $a\leqslant e^{\frac{1}{2}+\ln 4}=4\sqrt{e}$，

故 a 的取值范围为 $(0,4\sqrt{e}]$. ……………………………………………………………（12 分）

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通（微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息