

2020 年全国高中数学联合竞赛一试 (B 卷)
参考答案及评分标准

说明:

1. 评阅试卷时, 请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档; 其他各题的评阅, 请严格按照本评分标准的评分档次给分, 不得增加其他中间档次.
2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 解答题中第 9 小题 4 分为一个档次, 第 10、11 小题 5 分为一个档次, 不得增加其他中间档次.

一、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分.

1. 若实数 x 满足 $\log_2 x = \log_4 (2x) + \log_8 (4x)$, 则 $x =$ _____.

答案: 128.

解: 由条件知

$$\log_2 x = \log_4 2 + \log_4 x + \log_8 4 + \log_8 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \log_2 x,$$

解得 $\log_2 x = 7$, 故 $x = 128$.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 Ω 经过点 $(0, 0), (2, 4), (3, 3)$, 则圆 Ω 上的点到原点的距离的最大值为_____.

答案: $2\sqrt{5}$.

解: 记 $A(2, 4), B(3, 3)$, 圆 Ω 经过点 O, A, B . 注意到 $\angle OBA = 90^\circ$ (直线 OB 与 AB 的斜率分别为 1 和 -1), 故 OA 为圆 Ω 的直径. 从而圆 Ω 上的点到原点 O 的距离的最大值为 $|OA| = 2\sqrt{5}$.

3. 设集合 $X = \{1, 2, \dots, 20\}$, A 是 X 的子集, A 的元素个数至少是 2, 且 A 的所有元素可排成连续的正整数, 则这样的集合 A 的个数为_____.

答案: 190.

解: 每个满足条件的集合 A 可由其最小元素 a 与最大元素 b 唯一确定, 其中 $a, b \in X, a < b$, 这样的 (a, b) 的取法共有 $C_{20}^2 = 190$ 种, 所以这样的集合 A 的个数为 190.

4. 在三角形 ABC 中, $BC = 4, CA = 5, AB = 6$, 则 $\sin^6 \frac{A}{2} + \cos^6 \frac{A}{2} =$ _____.

答案: $\frac{43}{64}$.

解: 由余弦定理得 $\cos A = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA \cdot AB} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{3}{4}$, 所以

$$\begin{aligned} \sin^6 \frac{A}{2} + \cos^6 \frac{A}{2} &= \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} \right) \left(\sin^4 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^4 \frac{A}{2} \right) \\ &= \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} \right)^2 - 3 \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 A \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 A = \frac{43}{64}.
 \end{aligned}$$

5. 设 9 元集合 $A = \{a + bi \mid a, b \in \{1, 2, 3\}\}$, i 是虚数单位. $\alpha = (z_1, z_2, \dots, z_9)$ 是 A 中所有元素的一个排列, 满足 $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_9|$, 则这样的排列 α 的个数为_____.

答案: 8.

解: 由于

$$|1+i| < |2+i| = |1+2i| < |2+2i| < |3+i| = |1+3i| < |3+2i| = |2+3i| < |3+3i|,$$

故 $z_1 = 1+i, \{z_2, z_3\} = \{2+i, 1+2i\}, z_4 = 2+2i, \{z_5, z_6\} = \{3+i, 1+3i\},$
 $\{z_7, z_8\} = \{3+2i, 2+3i\}, z_9 = 3+3i,$

由乘法原理知, 满足条件的排列 α 的个数为 $2^3 = 8$.

6. 已知一个正三棱柱的各条棱长均为 3, 则其外接球的体积为_____.

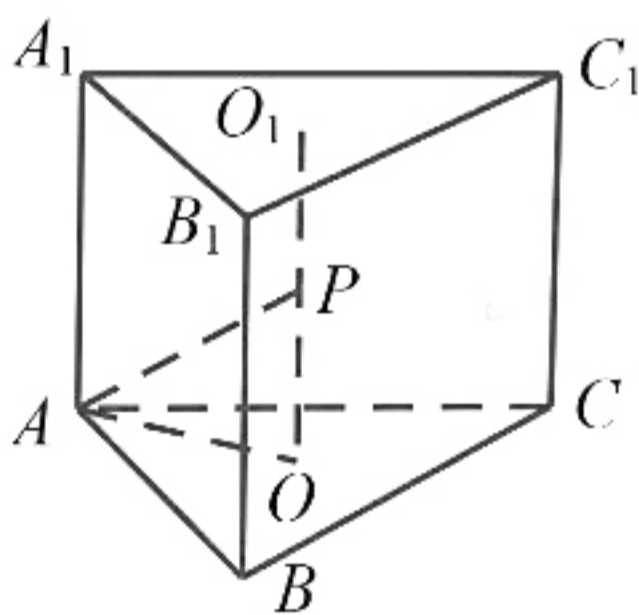
答案: $\frac{7\sqrt{21}}{2}\pi$.

解: 如图, 设面 ABC 和面 $A_1B_1C_1$ 的中心分别为 O 和 O_1 , 记线段 OO_1 的中点为 P , 由对称性知, P 为正三棱柱外接球的球心, PA 为外接球的半径.

易知 $PO \perp AO$, 所以

$$PA = \sqrt{PO^2 + AO^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{21}}{2},$$

故外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^3 = \frac{7\sqrt{21}}{2}\pi$.



7. 在凸四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$. 点 P 是四边形 $ABCD$ 所在平面上一点, 满足 $\overrightarrow{PA} + 2020\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + 2020\overrightarrow{PD} = \vec{0}$. 设 s, t 分别为四边形 $ABCD$ 与 $\triangle PAB$ 的面积, 则 $\frac{t}{s} =$ _____.

答案: $\frac{337}{2021}$.

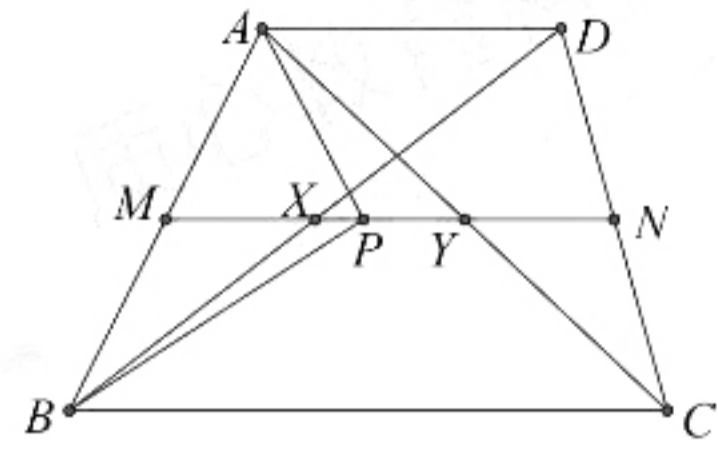
解: 不妨假设 $AD = 2, BC = 4$. 记 M, N, X, Y 分别是 AB, CD, BD, AC 的中点, 则 M, X, Y, N 顺次共线并且 $MX = XY = YN = 1$. 由于

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PY}, \quad \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PX},$$

故结合条件可知 $\overrightarrow{PY} + 2020\overrightarrow{PX} = \vec{0}$. 故点 P 在线段 XY 上且 $PX = \frac{1}{2021}$. 设 A 到

MN 的距离为 h , 由面积公式可知

$$\begin{aligned} \frac{t}{s} &= \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{ABCD}} = \frac{PM \cdot h}{MN \cdot 2h} = \frac{PM}{2MN} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{2021}}{2 \times 3} = \frac{337}{2021}. \end{aligned}$$



8. 已知首项系数为 1 的五次多项式 $f(x)$ 满足: $f(n) = 8n, n = 1, 2, \dots, 5$, 则 $f(x)$ 的一次项系数为_____.

答案: 282.

解: 令 $g(x) = f(x) - 8x$, 则 $g(x)$ 也是一个首项系数为 1 的五次多项式, 且

$$g(n) = f(n) - 8n = 0, n = 1, 2, \dots, 5,$$

故 $g(x)$ 有 5 个实数根 $1, 2, \dots, 5$, 所以 $g(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-5)$, 于是

$$f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-5) + 8x,$$

所以 $f(x)$ 的一次项系数等于 $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot 5! + 8 = 282$.

二、解答题: 本大题共 3 小题, 满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分 16 分) 在椭圆 Γ 中, A 为长轴的一个端点, B 为短轴的一个端点, F_1, F_2 为两个焦点. 若 $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} + \overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BF_2} = 0$, 求 $\tan \angle ABF_1 \cdot \tan \angle ABF_2$ 的值.

解: 由对称性, 设椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $A(a, 0), B(0, b)$,

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

由条件知

$$\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} + \overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BF_2} = (-c-a)(c-a) + (-c^2 + b^2) = a^2 + b^2 - 2c^2 = 0.$$

.....4 分

所以 $a^2 + b^2 - 2c^2 = -a^2 + 3b^2 = 0$, 故 $a = \sqrt{3}b, c = \sqrt{2}b$.

.....8 分

记 O 为坐标原点, 则

$$\tan \angle ABO = \frac{a}{b} = \sqrt{3}, \quad \tan \angle OBF_1 = \tan \angle OBF_2 = \frac{c}{b} = \sqrt{2}.$$

.....12 分

所以

$$\tan \angle ABF_1 \cdot \tan \angle ABF_2 = \tan(\angle ABO + \angle OBF_1) \cdot \tan(\angle ABO - \angle OBF_1)$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{5}. \quad \text{.....16 分}$$

10. (本题满分 20 分) 设正实数 a, b, c 满足 $a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 4b + 12c - 2$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$ 的最小值.

解: 由题设条件得

$$a^2 + (2b-1)^2 + (3c-2)^2 = 3, \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

由柯西不等式得

$$3[a^2 + (2b-1)^2 + (3c-2)^2] \geq (a+2b-1+3c-2)^2,$$

即 $(a+2b+3c-3)^2 \leq 9$, 故

$$a+2b+3c \leq 6. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

又由柯西不等式得

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right)(a+2b+3c) \geq (1+2+3)^2,$$

所以

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq \frac{36}{a+2b+3c} \geq 6, \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

当 $a=b=c=1$ 时等号成立.

故 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$ 的最小值是 6. \dots\dots\dots 20 分

11. (本题满分 20 分) 设数列 a_n 的通项公式为

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], n=1, 2, \dots.$$

证明: 存在无穷多个正整数 m , 使得 $a_{m+4}a_m - 1$ 是完全平方数.

证明: 记 $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 则 $q_1 + q_2 = 1, q_1q_2 = -1$, 于是

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (q_1^n - q_2^n), n=1, 2, \dots.$$

所以 $a_1 = 1, a_2 = 1$. 又注意到 $q_i + 1 = q_i^2 (i=1, 2)$, 有

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} (q_1^{n+1} - q_2^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}} (q_1^n - q_2^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (q_1^n q_1 + 1 - q_2^n q_2 + 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (q_1^{n+2} - q_2^{n+2}), \end{aligned}$$

即

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n=1, 2, \dots, \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

由此易知, 数列 a_n 的每一项都是正整数.

由计算易得 $q_1^4 + q_2^4 = 7$, 故

$$a_{2n+3}a_{2n-1} - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (q_1^{2n+3} - q_2^{2n+3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (q_1^{2n-1} - q_2^{2n-1}) - 1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} q_1^{4n+2} + q_2^{4n+2} - q_1 q_2^{2n-1} q_1^4 - q_1 q_2^{2n-1} q_2^4 - 1 \\
&= \frac{1}{5} q_1^{4n+2} + q_2^{4n+2} + q_1^4 + q_2^4 - 1 \\
&= \frac{1}{5} q_1^{4n+2} + q_2^{4n+2} + 7 - 1 \\
&= \frac{1}{5} q_1^{4n+2} + q_2^{4n+2} + 2 \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{5}} q_1^{2n+1} - q_2^{2n+1} \right]^2 = a_{2n+1}^2, \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}
\end{aligned}$$

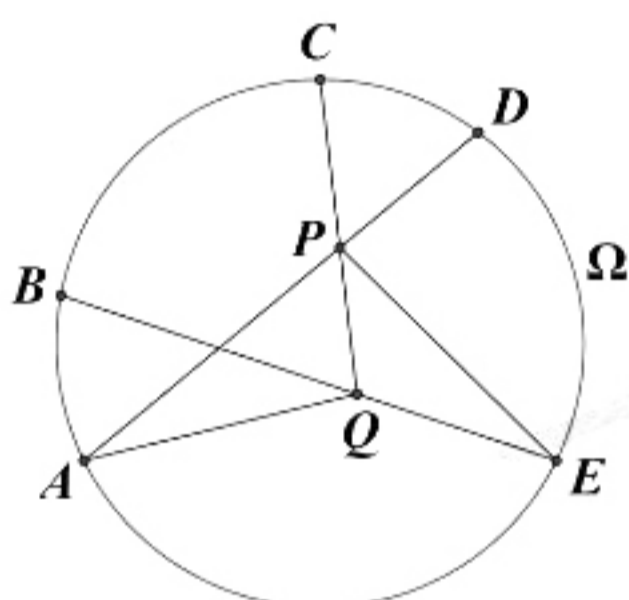
所以，对任意正整数 n ， $a_{2n+3} a_{2n-1} - 1$ 都是完全平方数。于是对于正奇数 m ，
 $a_{m+4} a_m - 1$ 均为完全平方数。 \dots\dots\dots 20 分

2020 年全国高中数学联合竞赛加试 (B 卷) 参考答案及评分标准

说明:

1. 评阅试卷时, 请严格按照本评分标准的评分档次给分.
2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 10 分为一个档次, 不得增加其他中间档次.

一、(本题满分 40 分) 如图, A, B, C, D, E 是圆 Ω 上顺次的五点, 满足 $ABC = BCD = CDE$, 点 P, Q 分别在线段 AD, BE 上, 且 P 在线段 CQ 上. 证明: $\angle PAQ = \angle PEQ$.

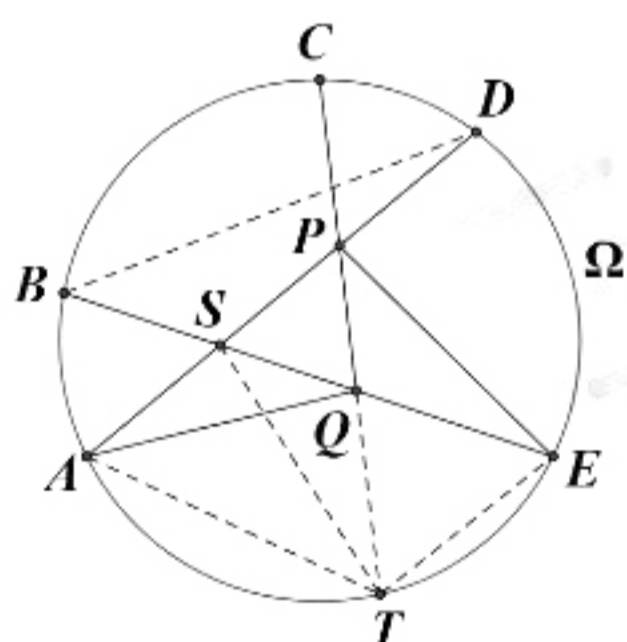


证明: 记 S 为 AD 与 BE 的交点, T 为 CQ 延长线与圆 Ω 的交点.

注意到 $ABC = BCD = CDE$, 可设 AB, CD 所对的圆周角均为 α , BC, DE 所对的圆周角均为 β .

于是

$$\begin{aligned} \angle ATQ &= \angle ATC = \alpha + \beta, \\ \angle PTE &= \angle CTE = \alpha + \beta, \\ \angle PSQ &= \angle BDA + \angle DBE = \alpha + \beta. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 20 \text{ 分}$$



由 $\angle ATQ = \angle PSQ$ 得 S, A, T, Q 四点共圆, 又由 $\angle PTE = \angle PSQ$ 得 P, S, T, E 四点共圆.

所以 $\angle PAQ = \angle PTS = \angle PEQ$. \dots\dots\dots 40 分

二、(本题满分 40 分) 设集合 $A = \{1, 2, \dots, 19\}$. 是否存在集合 A 的非空子集 S_1, S_2 , 满足

- (1) $S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cup S_2 = A$;
- (2) S_1, S_2 都至少有 4 个元素;
- (3) S_1 的所有元素的和等于 S_2 的所有元素的乘积?

证明你的结论.

解：答案是肯定的.

设 $S_2 = 1, 2, x, y, 2 < x < y \leq 19$,10 分

则 $1+2+\dots+19-1-2-x-y=2xy$, 所以

$$2xy+x+y=187, \quad \dots\dots\dots 20 \text{ 分}$$

故

$$(2x+1)(2y+1)=375=15 \times 25,$$

所以 $x=7, y=12$ 是一组解.30 分

故取 $S_1 = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$, $S_2 = 1, 2, 7, 12$, 则这样的 S_1, S_2 满足条件.40 分

注：直接给出例子并验证给 40 分.

三、(本题满分 50 分) 给定整数 $n \geq 2$. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$, 满足

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

且对任意 $i, j (1 \leq i < j \leq n)$, 均有 $a_i a_j \geq b_i + b_j$. 求 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 的最小值.

解：记 $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

由条件知

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} (b_i + b_j) = (n-1)S. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

又
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i^2 + a_j^2}{2} = \frac{n-1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad \dots\dots\dots 20 \text{ 分}$$

于是

$$S^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \geq \left(\frac{2}{n-1} + 2 \right) \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \geq 2nS. \quad \dots\dots\dots 40 \text{ 分}$$

注意 $S > 0$, 故 $S \geq 2n$.

另一方面, 当 $a_i = b_i = 2 (i=1, 2, \dots, n)$ 时, 条件满足, 且 $S = 2n$.

综上, $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 的最小值为 $2n$50 分

四、(本题满分 50 分) 设 a, b 为不超过 12 的正整数, 满足: 存在常数 C , 使得 $a^n + b^{n+9} \equiv C \pmod{13}$ 对任意正整数 n 成立. 求所有满足条件的有序数对 (a, b) .

解法 1: 由条件知, 对任意正整数 n , 有

$$a^n + b^{n+9} \equiv a^{n+3} + b^{n+12} \pmod{13}. \quad \textcircled{1}$$

注意到 13 为素数, a, b 均与 13 互素, 由费马小定理知 $a^{12} \equiv b^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.

因此在①中取 $n=12$, 化简得 $1+b^9 \equiv a^3+1 \pmod{13}$, 故

$$b^9 \equiv a^3 \pmod{13}.$$

代入①, 得 $a^n + a^3 b^n \equiv a^{n+3} + b^{n+12} \equiv a^{n+3} + b^n \pmod{13}$, 即

$$(a^n - b^n)(1 - a^3) \equiv 0 \pmod{13}. \quad \textcircled{2}$$

.....20 分

分两种情况讨论.

(i) 若 $a^3 \equiv 1 \pmod{13}$, 则 $b^3 \equiv a^3 b^3 \equiv b^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, 又 $a, b \in \{1, 2, \dots, 12\}$, 经检验可知 $a, b \in \{1, 3, 9\}$.

此时 $a^n + b^{n+9} \equiv a^n + b^n \pmod{13}$. 由条件知 $a + b \equiv a^3 + b^3 \equiv 2 \pmod{13}$, 从而只能是 $a = b = 1$.

经检验, 当 $(a, b) = (1, 1)$ 时, 对任意正整数 n , $a^n + b^{n+9}$ 模 13 余 2 为常数, 满足条件.30 分

(ii) 若 $a^3 \not\equiv 1 \pmod{13}$, 则由②知, 对任意正整数 n , 有 $a^n \equiv b^n \pmod{13}$.

特别地, $a \equiv b \pmod{13}$, 故 $a = b$. 所以 $a^3 \equiv b^9 = a^9 \pmod{13}$, 即

$$a^3(a^3 - 1)(a^3 + 1) \equiv 0 \pmod{13},$$

故 $a^3 \equiv -1 \pmod{13}$. 通过检验 $a \equiv \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6 \pmod{13}$, 可知 $a = 4, 10, 12$.

经检验, 当 $(a, b) = (4, 4), (10, 10), (12, 12)$ 时, 对任意正整数 n , 有

$$a^n + b^{n+9} = a^n + a^{n+9} = a^n(1 + (a^3)^3) \equiv 0 \pmod{13},$$

满足条件.

综合 (i)、(ii), 所求的有序数对 (a, b) 为 $(1, 1), (4, 4), (10, 10), (12, 12)$.

.....50 分

解法 2: 由条件知, 对任意正整数 n , 有

$$(a^n + b^{n+9})(a^{n+2} + b^{n+11}) \equiv (a^{n+1} + b^{n+10})^2 \pmod{13},$$

.....10 分

化简得 $a^n b^{n+11} + a^{n+2} b^{n+9} \equiv 2a^{n+1} b^{n+10} \pmod{13}$, 即

$$a^n b^{n+9} (a - b)^2 \equiv 0 \pmod{13}.$$

由于 13 为素数, $a, b \in \{1, 2, \dots, 12\}$, 故 $13 \mid (a - b)^2$, 进而 $a = b$.

.....20 分

因此, 当 n 变化时, $a^n + b^{n+9} = a^n(1 + a^9)$ 模 13 的余数为常数.

当 $1 + a^9 \not\equiv 0 \pmod{13}$ 时, 由上式知, a^n 模 13 的余数为常数, 特别地, 有 $a^2 \equiv a \pmod{13}$, 故 $a = 1$30 分

当 $1 + a^9 \equiv 0 \pmod{13}$ 时, 由费马小定理得 $a^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, 故

$$a^3 \equiv a^3 \cdot (-a^9) \equiv -a^{12} \equiv -1 \pmod{13}.$$

通过检验 $a \equiv \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6 \pmod{13}$, 可知 $a = 4, 10, 12$.

综上, 所求的有序数对 (a, b) 为 $(1, 1), (4, 4), (10, 10), (12, 12)$50 分