# 2021 北京房山高二（上）期末

# 数　　学

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

## 第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知点 $M(1,-1),\ N(2,5)$，则线段 $MN$ 的中点坐标为

（A）$(3,4)$　　（B）$(\frac{3}{2},2)$

（C）$(1,6)$　　（D）$(\frac{1}{2},3)$

（2）圆心为 $(-1,2)$，半径为 $5$ 的圆的方程为

（A）$(x-1)^2+(y+2)^2=5$　　（B）$(x+1)^2+(y-2)^2=5$

（C）$(x-1)^2+(y+2)^2=25$　　（D）$(x+1)^2+(y-2)^2=25$

（3）已知直线 $l_1: x+ay+7=0$ 和 $l_2:(a-2)x+3y+1=0$ 互相平行，则

（A）$a=3$　　（B）$a=-1$

（C）$a=-1$ 或 $a=3$　　（D）$a=1$ 或 $a=-3$

（4）下列双曲线中以 $y=\pm 2x$ 为渐近线的是

（A）$x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　（B）$x^2-\frac{y^2}{2}=1$

（C）$y^2-\frac{x^2}{4}=1$　　（D）$y^2-\frac{x^2}{2}=1$

（5）在 $(x-2)^5$ 的展开式中，$x^4$ 的系数为

（A）$5$　　（B）$-5$

（C）$10$　　（D）$-10$

（6）已知某种药物对某种疾病的治愈率为 $\frac{3}{4}$，现有 $3$ 位患有该病的患者服用了这种药物，$3$ 位患者是否会被治愈是相互独立的，则恰有 $1$ 位患者被治愈的概率为

（A）$\dfrac{27}{64}$　　（B）$\dfrac{9}{64}$

（C）$\dfrac{3}{64}$　　（D）$\dfrac{3}{4}$

（7）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 有相同的焦点，则 $a=$

（A）$\sqrt{6}$　　（B）$2\sqrt{3}$

（C）2　　（D）4

（8）已知圆 $O:x^2+y^2=4$，从圆上任意一点 $M$ 向 $x$ 轴作垂线段 $MN$，$N$ 为垂足，则线段 $MN$ 的中点 $P$ 的轨迹方程为

（A）$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　　（B）$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

（C）$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$

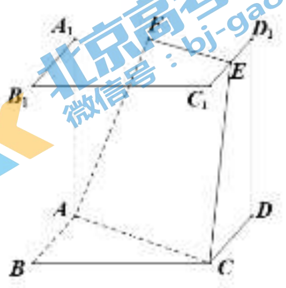
（9）已知直线 $l$：$kx-y+1-k=0$ 和圆 $C$：$x^2+y^2-4x=0$，则直线 $l$ 与圆 $C$ 的位置关系为

（A）相交　　（B）相切

（C）相离　　（D）不能确定

（10）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $E,F$ 分别是棱 $C_1D_1,A_1D_1$ 上的动点．

给出下面四个命题：




①直线 $EF$ 与直线 $AC$ 平行；

②若直线 $AF$ 与直线 $CE$ 共面，则直线 $AF$ 与直线 $CE$ 相交；

③直线 $EF$ 到平面 $ABCD$ 的距离为定值；

④直线 $AF$ 与直线 $CE$ 所成角的最大值是 $\dfrac{\pi}{3}$．

其中，真命题的个数是

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

## 第二部分（非选择题　共 100 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）电影《夺冠》要在 4 所学校轮流放映，每所学校放映一场，则不同的放映次序共有____种．(用数字作答)

（12）设随机变量$\xi$的分布列为：

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $m$ |

则$m=$____；随机变量$\xi$的数学期望$E\xi=$____.

（13）某班级的学生中，寒假是否有参加滑雪运动打算的情况如下表所示.

| | 男生 | 女生 |
|---|---|---|
| 有参加滑雪运动打算 | 8 | 10 |
| 无参加滑雪运动打算 | 10 | 12 |

从这个班级中随机抽取一名学生，则“抽到的人是男生且有参加滑雪运动打算”的概率为____；

若已知抽到的人是男生，则他有参加滑雪运动打算的概率为____.

（14）设抛物线$x^2=8y$的焦点为$F$，点$M(x_0,3)$在抛物线上. 则抛物线的准线方程为____；

$|MF|=$____.

（15）已知曲线$C:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(mn\neq 0)$.给出下列四个命题：

①曲线$C$过坐标原点；

②若$m=n>0$，则$C$是圆，其半径为$m$；

③若$m>n>0$，则$C$是椭圆，其焦点在$x$轴上；

④若$mn<0$，则$C$是双曲线，其渐近线方程为$y=\pm\sqrt{-\frac{n}{m}}x$.

其中所有真命题的序号是___.

三、解答题共 6 小题，共 75 分。 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 12 分）

已知直线$l$过点$(0,3)$，再从下列条件①、条件②、条件③这三个条件中任意选择一个作为已知，求直线$l$的方程.

条件①：直线$l$经过直线$l_1:x+y+1=0$与$l_2:2x-y-4=0$的交点；

条件②：直线$l$与圆$x^2+y^2=3$相切；

条件③：直线$l$与坐标轴围成的三角形的面积为$3$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 12 分）

已知点 $A(1,-2)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上，过点 $A$ 且斜率为 $2$ 的直线与抛物线的另一个交点为 $B$.

（I）求 $p$ 的值和抛物线的焦点坐标；

（II）求弦长 $|AB|$.

（18）（本小题 12 分）

袋中有 10 个大小、材质都相同的小球，其中红球 3 个，白球 7 个.每次从袋中随机摸出 1 个球，摸出的球不再放回.求：

（I）第一次摸到红球的概率；

（II）在第一次摸到红球的条件下，第二次也摸到红球的概率；

（III）第二次摸到红球的概率.

（19）（本小题 13 分）

某软件是一款自营生鲜平台以及提供配送服务的生活类 APP.某机构为调查顾客对该软件的使用情况，在某地区随机抽取了 100 人，调查结果整理如下：

| 顾客年龄 | 20 岁以下 | [20,30) | [30,40) | [40,50) | [50,60) | [60,70] | 70 岁以上 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 使用人数 | 5 | 10 | 18 | 8 | 4 | 2 | 0 |
| 未使用人数 | 0 | 0 | 2 | 12 | 36 | 3 | 0 |

（I）现随机抽取 1 名顾客，试估计该顾客年龄在 $[30,50)$ 且未使用这款 APP 的概率；

（II）从被抽取的年龄在 $[50,70]$ 且使用这款 APP 的顾客中，随机抽取 2 人进一步了解情况，用 $X$ 表示这 2 人中年龄在 $[50,60)$ 的人数,求随机变量 $X$ 的分布列及数学期望；

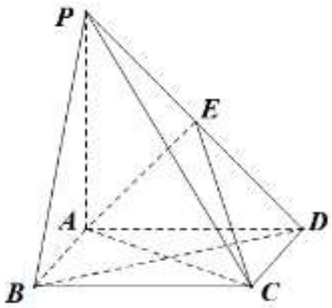
（III）为鼓励居民使用，该机构拟对使用这款 APP 的居民赠送 1 张 5 元的代金券.若某区预计有 6000 人具有购物能力，试估计该机构至少应准备多少张代金券.

（20）（本小题 13 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为正方形，$PA=AB=2$，$E$ 为 $PD$ 中点.

（I）求证：$BD\perp$ 平面 $PAC$；

（II）求二面角 $P-AC-E$ 的余弦值；






（21）（本小题 13 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点 $A(2,0)$.

（I）求椭圆 $C$ 的方程；

（II）不过点 $A$ 的直线 $l$ 与椭圆交于 $P,Q$ 两点，以线段 $PQ$ 为直径的圆经过点 $A$，证明：直线 $l$ 过定点.

# 2021 北京房山高二（上）期末数学

## 参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | D | C | A | D | B | C | A | A | B |

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。（第一空 3 分，第二空 2 分）

（11）24　　（12）$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{3}$；　　（13）$\frac{1}{5}$，$\frac{4}{9}$；

（14）$y=-2$，5　　（15）③④（错选 0 分，漏选 3 分）

三、解答题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 12 分）

选择条件①：

解方程组$\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x-y-4=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$ ……………………………4

则直线$l$的斜率为$k=\dfrac{3+2}{0-1}=-5$， ……………………………8

所以直线$l$的方程为$y=-5x+3$，即$5x+y-3=0$………………………12

选择条件②：

设直线$l$的方程为$y=kx+3$（显然直线$l$的斜率存在），即$kx-y+3=0$.

圆$x^2+y^2=3$的圆心为$(0,0)$，半径为$\sqrt{3}$. ……………………………4

因为 直线$l$与圆$x^2+y^2=3$相切,

所以 $\dfrac{3}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$ . 解得$k=\pm\sqrt{2}$. ……………………………8

所以直线$l$的方程为$y=\pm\sqrt{2}x+3$，即$\pm\sqrt{2}x-y+3=0$. ………………12

选择条件③：

设直线$l$的方程为$y=kx+3$（显然直线$l$不与坐标轴平行），…………………1

令$y=0$ 得$x=-\dfrac{3}{k}$.

则 $S=\frac{1}{2}\times3\times\left|-\frac{3}{k}\right|=3$. ………………………………4

解得 $k=\pm\frac{3}{2}$. ………………………………8

所以直线 $l$ 的方程为 $y=\pm\frac{3}{2}x+3$，即，$\pm\frac{3}{2}x-y+3=0$ ………………………12

（17）（本小题 12 分）

（I）由点 $A(1,-2)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上，得 $p=2$ ………………………………2

所以抛物线的方程为 $y^2=4x$，焦点坐标为 $(1,0)$. ………………………………5

（II）直线 $AB$ 的方程为 $y+2=2(x-1)$，即 $y=2x-4$， ……………………7

解方程组 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=2x-4\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\ y=-2.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\ y=4.\end{cases}$ ……………………9

所以点 $B$ 的坐标为 $(4,4)$.

所以 $|AB|=\sqrt{(1-4)^2+(-2-4)^2}=3\sqrt{5}$. ………………………………12

（18）（本小题 12 分）

设事件 $A$：第一次摸到红球；事件 $B$：第二次摸到红球，

则事件 $\overline{A}$：第一次摸到白球.

（I）第一次从 10 个球中摸一个共 10 种不同的结果，其中是红球的结果共 3 种，

所以 $P(A)=\frac{3}{10}$. ……………………4

（II）第一次摸到红球的条件下,剩下的 9 个球中有 2 个红球，7 个白球，第二次从这 9 个球中摸一个共 9 种不同的结果，其中是红球的结果共 2 种.

所以 $P(B|A)=\frac{2}{9}$. ……………………8

（III）$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{3}{10}$……………………12

所以第二次摸到红球的概率 $P(B)=\frac{3}{10}$.

（19）（本小题 13 分）

（I）在随机抽取的 100 名顾客中，年龄在[30, 50)且未使用这款 APP 的共有 2+12=14 人，

所以，随机抽取 1 名顾客，估计该顾客年龄在[30, 50)且未使用这款 APP 的概率为

$P=\frac{14}{100}=\frac{7}{50}$.  ……………………2

（II） $X$ 的所有可能取值为 0，1，2，则

$P(X=0)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$， $P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}$ ………8

所以 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
| --- | --- | --- | --- |
| $P$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{6}{15}$ |

……………………………9

故 $X$ 的数学期望为

$EX=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{6}{15}=\frac{4}{3}$ …………………………11

（III）在随机抽取的 100 名顾客中，使用自助结算机的共有 $5+10+18+8+4+2=47$ 人， 所以该机构至少应准备张代金券的张数估计为: $\frac{47}{100}\times 6000=2820$ 张. ………………………………13

（20）（本小题 13 分）

（I）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$， $AB, AD\subseteq$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AB, PA\perp AD$.

因为底面 $ABCD$ 为正方形，所以 $AB\perp AD$.

如图，以 $A$ 为原点，分别以 $AB, AD, AP$ 为 $x, y, z$ 轴建立空间直角坐标系

…………………………………………1

则 $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,2,0), P(0,0,2)$

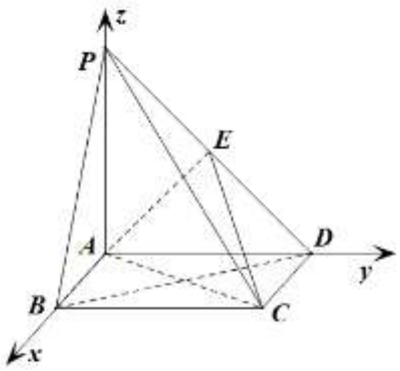
$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$， $\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$， $\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$.

因为 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD}=(0,0,2)\cdot(-2,2,0)=0$， $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(2,2,0)\cdot(-2,2,0)=0$，

所以 $AP\perp BD, AC\perp BD$.  ………………………………2

又 $AP\cap AC=A$，  ………………………………3

所以 $BD\perp$ 平面 $PAC$.  …………………………………………4




（II）因为 $E$ 为 $PD$ 中点， 所以 $E(0,1,1)$， $\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$ .

设平面 $EAC$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+2y=0,\\ y+z=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $\vec{n}=(-1,1,-1)$ ……………………………8

由（I）知， $\overrightarrow{BD}$ 为平面 $PAC$ 的法向量, …………10

所以 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{BD}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\vec{n}||\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{4}{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ . ………………………12

由题知，二面角 $P-AC-E$ 为锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ …………13

（21）.（本小题 13 分）

（I）由椭圆离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ,且经过点 $A(2,0)$ ,可知 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ , $a=2$……………2

所以 $c=\sqrt{3}$ .

所以 $b^2=a^2-c^2=4-3=1$ . …………………………………3

所以椭圆 $C$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ . ………………………………………4

（II）当直线 $l$ 的斜率存在时，设直线 $l$ 的方程为 $y=kx+m$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=kx+m\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$ ……………………6

$\Delta=(8km)^2-4(1+4k^2)(4m^2-4)>0$ .

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$， 则 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2},x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}$ …………8

因为以线段 $PQ$ 为直径的圆经过点 $A$，

所以 $AP\perp AQ$．所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$． ………………………………9

$\overrightarrow{AP}=(x_1-2,y_1)\cdot\overrightarrow{AQ}=(x_2-2,y_2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}&=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2\\&=(x_1-2)(x_2-2)+(kx_1+m)(kx_2+m)\\&=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2\\&=(1+k^2)x_1x_2+(km-2)(x_1+x_2)+m^2+4\\&=(1+k^2)\frac{4m^2-4}{1+4k^2}+(km-2)\frac{-8km}{1+4k^2}+m^2+4\end{aligned}$$

由 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$，整理得 $5m^2+16km+12k^2=0$．

解得 $m=-\dfrac{6}{5}k$ 或 $m=-2k$（都满足 $\Delta>0$）．

所以 $y=k(x-\dfrac{6}{5})$ 或 $y=k(x-2)$．………………………………10

因为直线 $l$ 不过点 $A(2,0)$，

所以直线 $l$ 过定点 $(\dfrac{6}{5},0)$． ………………………………………11

当直线 $l$ 的斜率不存在时，设直线 $l$ 的方程为 $x=x_0(-2<x_0<2)$，

则 $P(x_0,y_0),Q(x_0,-y_0)$，$y_0{}^2=1-\dfrac{x_0{}^2}{4}$．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}&=(x_0-2)(x_0-2)-y_0{}^2\\&=x_0{}^2-4x_0+4-(1-\frac{x_0{}^2}{4})\\&=\frac{5}{4}x_0{}^2-4x_0+3=0\end{aligned}$$

解得 $x_0=\dfrac{6}{5}$ 或 $x_0=2$（舍）．

综上 直线 $l$ 过定点 $(\dfrac{6}{5},0)$． ………………………………………13

备注：解答题只提供一种解法，其他解法请仿此标准给分。

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。