2021 北京朝阳高三（上）期末

数　　学

2021．1

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

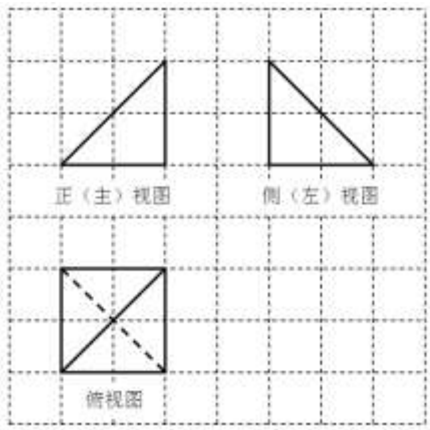
（1）已知全集 $U=\{-1,0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{0,1,2\}$，则 $\complement_U A=$

（A）$\{3,4\}$　　（B）$\{-1,3,4\}$　　（C）$\{0,1,2\}$　　（D）$\{-1,4\}$

（2）已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(x,4)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{b}|=$

（A）$2\sqrt{5}$　　（B）$4\sqrt{3}$　　（C）$4\sqrt{5}$　　（D）8

（3）某三棱锥的三视图如图所示，已知网格纸上小正方形的边长为 1，则该三棱锥的体积为



（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{8}{3}$　　（C）3　　（D）4

（4）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $a_3=9$，则 $\log_3 a_1+\log_3 a_2+\log_3 a_3+\log_3 a_4+\log_3 a_5=$

（A）$\frac{5}{2}$　　（B）$\frac{5}{3}$　　（C）10　　（D）15

（5）设抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，准线 l 与 x 轴的交点为 M，P 是 C 上一点．若 $|PF|=4$，则 $|PM|=$

（A）$\sqrt{21}$　　（B）5　　（C）$2\sqrt{7}$　　（D）$4\sqrt{2}$

（6）已知函数 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$，给出下列四个结论：

①函数 $f(x)$ 是周期为 π 的偶函数；

②函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$ 上单调递减；

③函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为 -1；

④将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，所得图象与 $g(x)=\sin 2x$ 的图象重合.

其中，所有正确结论的序号是

（A）①③　　　　（B）②③

（C）①④　　　　（D）②④

（7）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)$，且 $f(1)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=2^x+x$．设 $a=f(5)$，$b=f(\frac{1}{3})$，$c=f(-\frac{5}{2})$，则 a,b,c 的大小关系为

（A）$b>a>c$　　（B）$a>c>b$　　（C）$c>a>b$　　（D）$b>c>a$

（8）已知圆 C：$x^2+y^2=4$，直线 l：$x+y+t=0$，则“l 与 C 相交”是“$|t|<2$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左焦点为 F，右顶点为 A，过 F 作 C 的一条渐近线的垂线 FD，D 为垂足．若 $|DF|=|DA|$，则 C 的离心率为

（A）$2\sqrt{2}$　　（B）2　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{2}$

（10）在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $y=mx$（$m>0$）与曲线 $y=x^3$ 从左至右依次交于 A，B，C 三点．若直线 l：$kx-y+3=0$（$k\in\mathbf{R}$）上存在点 P 满足 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}|=2$，则实数 k 的取值范围是

（A）$(-2,2)$　　（B）$[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$

（C）$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　（D）$(-\infty,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},+\infty)$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）设 $a\in\mathbf{R}$．若复数 $z=\mathrm{i}(1+a\mathrm{i})$ 为纯虚数，则 $a=$________，$z^2=$________.

（12）在 $(x^2+\frac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项是________．（用数字作答）

（13）在我国古代，人们将直角三角形中短的直角边叫做勾，长的直角边叫做股，斜边叫做弦．根据《周髀算经》记载，西周数学家商高就发现勾股定理的一个特例：若勾为三，股为四，则弦为五．一般地，像$(3,4,5)$这样能够成为一个直角三角形三条边长的正整数组称为勾股数组．若从$(3,4,5)$，$(5,12,13)$，$(6,8,10)$，$(7,24,25)$，$(8,15,17)$，$(9,12,15)$，$(9,40,41)$，$(10,24,26)$，$(11,60,61)$，$(12,16,20)$这些勾股数组中随机抽取 1 组，则被抽出的勾股数组中的三个数恰好构成等差数列的概率为________．

（14）若函数$f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x$为偶函数，则常数$\varphi$的一个取值为________．

（15）设函数$y=f(x)$的定义域为D，若对任意$x_1\in D$，存在$x_2\in D$，使得$f(x_1)\cdot f(x_2)=1$，则称函数$f(x)$具有性质M，给出下列四个结论：

①函数$y=x^3-x$不具有性质M；

②函数$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$具有性质M；

③若函数$y=\log_8(x+2)$，$x\in[0,t]$具有性质M，则$t=510$；

④若函数$y=\dfrac{3\sin x+a}{4}$具有性质M，则$a=5$　　．

其中，正确结论的序号是________.

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求。全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

在$\triangle ABC$中，$\cos A=\dfrac{7}{8}$，$c=3$，且$b\neq c$，再从条件①、条件②中选择一个作为已知，求：

（I）b的值；

（II）$\triangle ABC$的面积.

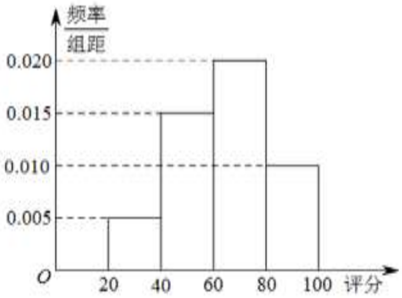
条件①：$\sin B=2\sin A$；

条件②：$\sin A+\sin B=2\sin C$．

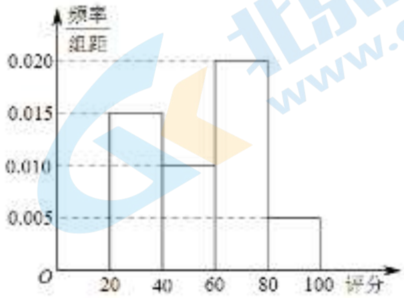
注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分。

（17）（本小题 13 分）

某公司为了解用户对其产品的满意程度，从 A 地区随机抽取了 400 名用户，从 B 地区随机抽取了 100 名用户，请用户根据满意程度对该公司产品评分．该公司将收集到的数据按照[20,40)，[40,60)，[60,80)，[80,100]分组，绘制成评分频率分布直方图如下：



A 地区用户满意程度评分频率分布直方图



B 地区用户满意程度评分频率分布直方图

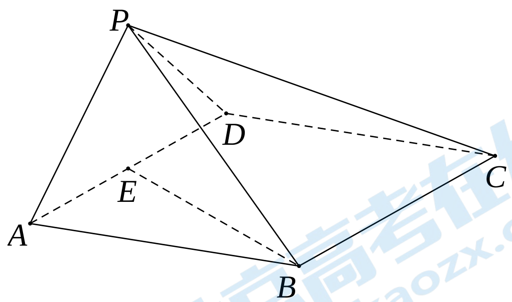
（I）从 A 地区抽取的 400 名用户中随机选取一名，求这名用户对该公司产品的评分不低于 60 分的概率；

（II）从 B 地区抽取的 100 名用户中随机选取两名，记这两名用户的评分不低于 80 分的个数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（III）根据频率分布直方图，假设同组中的每个数据用该组区间的中点值代替，估计 A 地区抽取的 400 名用户对该公司产品的评分的平均值为 μ_1，B 地区抽取的 100 名用户对该公司产品的评分的平均值为 μ_2，以及 A，B 两个地区抽取的 500 名用户对该公司产品的评分的平均值为 μ_0，试比较 μ_0 和 $\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$ 的大小．（结论不要求证明）

（18）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp PD$，$PA=PD$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，$E$ 是线段 AD 的中点，连结 BE．



（I）求证：$BE\perp PA$；

（II）求二面角 $A-PD-C$ 的余弦值；

（III）在线段 PB 上是否存在点 F，使得 $EF//$ 平面 PCD？若存在，求出 $\dfrac{PF}{PB}$ 的值；若不存在，说明理由．

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，且 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）过点 $P(1,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A， B 两点，求 $|PA|\cdot|PB|$ 的取值范围.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-(a+2)x+ax^2$ （ $a\in\mathbf{R}$ ）.

（I）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（II）求 $f(x)$ 的单调区间；

（III）若 $f(x)$ 恰有两个零点，求实数 a 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1=0$， $a_{n+1}=a_n^2+c$ （ $n\in\mathbf{N}^*$， $c\in\mathbf{R}$ ）. 对任意正整数 $n\geq 2$，记 $M_n=\{c\,|\,对任意i\in\{1,2,3,\cdots,n\},|a_i|\leq 2\}$， $M=\{c\,|\,对任意i\in\mathbf{N}^*,|a_i|\leq 2\}$.

（I）写出 M_2， M_3；

（II）当 $c>\frac{1}{4}$ 时，求证：数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，且存在正整数 k，使得 $c\notin M_k$；

（III）求集合 M .

2021 北京朝阳高三（上）期末数学

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B　（2）C　（3）A　（4）C　（5）C

（6）D　（7）A　（8）B　（9）B　（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）0；-1　（12）15

（13）$\frac{2}{5}$　（14）$\frac{\pi}{2}$（答案不唯一）

（15）①③

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：选条件①：$\sin B=2\sin A$.

（I）在$\triangle ABC$中，因为$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$，所以$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=2a$.

因为$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，且$c=3$，$\cos A=\frac{7}{8}$，$b=2a$，

所以$\frac{4a^2+9-a^2}{12a}=\frac{7}{8}$.

化简得$2a^2-7a+6=0$，

解得$a=2$或$a=\frac{3}{2}$.

当$a=\frac{3}{2}$时，$b=2a=3=c$，与题意矛盾.

所以$a=2$，所以$b=4$. ……………………………………………… 9 分

（II）因为$\cos A=\frac{7}{8}$，$A\in(0,\pi)$，所以$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{8}$.

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\times3\times\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$. ……………………………… 13 分

选条件②：$\sin A+\sin B=2\sin C$.

（I）在$\triangle ABC$中，因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

所以由 $\sin A+\sin B=2\sin C$ 得 $a+b=2c=6$．

因为 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，且 $c=3$，$\cos A=\dfrac{7}{8}$，$a=6-b$，

所以 $\dfrac{b^2+9-(6-b)^2}{6b}=\dfrac{7}{8}$．

解得 $b=4$． .... 9 分

（II）由（I）知 $b=4$，所以 $a=6-b=2$．

因为 $\cos A=\dfrac{7}{8}$，$A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$．

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times4\times3\times\dfrac{\sqrt{15}}{8}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$． .... 13 分

（17）（共 13 分）

解：（I）由题知 A 地区共抽取 400 名用户，其中有 240 名用户对该公司产品的评分不低于 60 分，

所以从 A 地区抽取的 400 名用户中随机选取一名，

这名用户对该公司产品的评分不低于 60 分的概率是 $\dfrac{240}{400}=0.6$． .... 3 分

（II）由题可知 X 的可能取值为 0，1，2．

$P(X=0)=\dfrac{C_{90}^2}{C_{100}^2}=\dfrac{89}{110}$；

$P(X=1)=\dfrac{C_{90}^1C_{10}^1}{C_{100}^2}=\dfrac{2}{11}$；

$P(X=2)=\dfrac{C_{10}^2}{C_{100}^2}=\dfrac{1}{110}$．

所以 X 的分布列如下表：

X	0	1	2
P	$\dfrac{89}{110}$	$\dfrac{2}{11}$	$\dfrac{1}{110}$

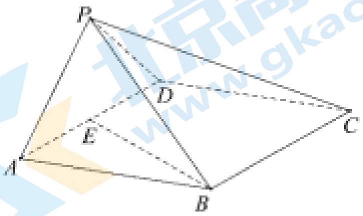
所以 X 的数学期望 $EX=0\times\dfrac{89}{110}+1\times\dfrac{2}{11}+2\times\dfrac{1}{110}=\dfrac{1}{5}$． .... 10 分

（III）$\mu_0>\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$． .... 13 分

（18）（共 14 分）

解：（I）因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AB=AD$.

又因为 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$， E 为 AD 的中点，所以 $BE\perp AD$.



又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,

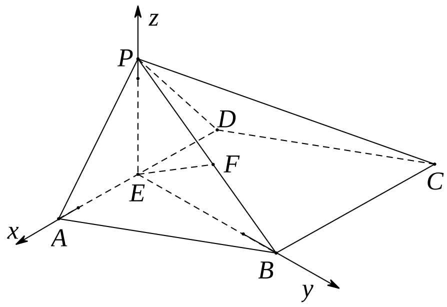
平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$,

所以 $BE\perp$ 平面 PAD .

因为 $PA\subset$ 平面 PAD ,

所以 $BE\perp PA$ . ... 4 分

（II）连结 PE . 因为 $PA=PD$ ， E 为 AD 的中点，



所以 $PE\perp AD$.

由（I）可知 $BE\perp$ 平面 PAD ,

所以 $BE\perp AD$ ， $PE\perp BE$.

设 $AD=2a$ ，则 $PE=a$.

如图，建立空间直角坐标系 $E-xyz$.

所以 $A(a,0,0),B(0,\sqrt{3}a,0),C(-2a,\sqrt{3}a,0),D(-a,0,0),P(0,0,a)$.

所以 $\overrightarrow{DC}=(-a,\sqrt{3}a,0)$ ， $\overrightarrow{DP}=(a,0,a)$.

因为 $BE\perp$ 平面 PAD ，所以 $\overrightarrow{EB}=(0,\sqrt{3}a,0)$ 是平面 PAD 的一个法向量.

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-ax+\sqrt{3}ay=0,\\ ax+az=0.\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=\sqrt{3}y,\\ x=-z.\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$ ，则 $y=1$ ， $z=-\sqrt{3}$. 于是 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{EB}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{EB}|}=\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{7}\times\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

由题知，二面角 $A-PD-C$ 为钝角，所以其余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ . ... 9 分

（III）当点 F 是线段 PB 的中点时， $EF//$ 平面 PCD . 理由如下：

因为点 $E\notin$ 平面 PCD ，所以在线段 PB 上存在点 F 使得 $EF//$ 平面 PCD 等价于 $\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

假设线段 PB 上存在点 F 使得 $EF//$ 平面 PCD .

设 $\frac{PF}{PB}=\lambda(\lambda\in[0,1])$，则 $\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PB}$.

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{EP}+\lambda\overrightarrow{PB}=(0,0,a)+\lambda(0,\sqrt{3}a,-a)=(0,\sqrt{3}\lambda a,a-\lambda a)$.

由 $\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}\lambda a-\sqrt{3}(a-\lambda a)=0$，得 $\lambda=\frac{1}{2}$.

所以当点 F 是线段 PB 的中点时，EF// 平面 PCD，且 $\frac{PF}{PB}=\frac{1}{2}$ . ... 14 分

（19）（共 15 分）

解：（I）由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ . ... 5 分

（II）当直线 l 的斜率不存在时，直线 l： $x=1$ 与椭圆 C 交于 $A(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$， $B(1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 两点，

所以 $|PA|=|PB|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $|PA|\cdot|PB|=\frac{3}{4}$.

当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y=k(x-1)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$.

且 $\Delta=64k^4-4(1+4k^2)(4k^2-4)=16(3k^2+1)>0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+4k^2}$， $x_1x_2=\frac{4k^2-4}{1+4k^2}$.

所以 $|PA|\cdot|PB|=(\sqrt{1+k^2}\,|x_1-1|)(\sqrt{1+k^2}\,|x_2-1|)=(1+k^2)\,|x_1x_2-(x_1+x_2)+1|=\frac{3(1+k^2)}{1+4k^2}$.

令 $t=1+4k^2$，则 $t\geq 1$，

所以 $|PA|\cdot|PB|=\frac{3(1+k^2)}{1+4k^2}=\frac{3(1+\frac{t-1}{4})}{t}=\frac{3t+9}{4t}=\frac{3}{4}+\frac{9}{4t}\in(\frac{3}{4},3]$.

当 $t=1$，即 $k=0$ 时，$|PA|\cdot|PB|$ 取最大值 3 .

综上所述，$|PA|\cdot|PB|$ 的取值范围是 $[\frac{3}{4},3]$ . ... 15 分

（20）（共 15 分）

解：（I）当 $a=0$ 时，$f(x)=\ln x-2x$，$f'(x)=\frac{1}{x}-2$，

所以 $f(1)=-2$，$f'(1)=-1$.

所以曲线在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y+2=-(x-1)$，即 $x+y+1=0$． ....3 分

（II）因为 $f(x)=\ln x-(a+2)x+ax^2$，定义域为 $(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-(a+2)+2ax=\frac{2ax^2-(a+2)x+1}{x}=\frac{(2x-1)(ax-1)}{x}$.

①当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的变化情况如下：

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	最大值 $f(\frac{1}{2})=-\ln 2-1-\frac{a}{4}$	↘

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 内单调递增，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 内单调递减.

②当 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的变化情况如下：

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 $f(\frac{1}{2})=-\ln 2-1-\frac{a}{4}$	↘	极小值 $f(\frac{1}{a})=-\ln a-1-\frac{1}{a}$	↗

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$，$(\frac{1}{a},+\infty)$ 内单调递增，在 $(\frac{1}{2},\frac{1}{a})$ 内单调递减.

③当 $a=2$ 时，$f'(x)\ge 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

④当 $a>2$ 时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的变化情况如下：

x	$(0,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 $f(\frac{1}{a})=-\ln a-1-\frac{1}{a}$	↘	极小值 $f(\frac{1}{2})=-\ln 2-1-\frac{a}{4}$	↗

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$，$(\frac{1}{2},+\infty)$ 内单调递增，在 $(\frac{1}{a},\frac{1}{2})$ 内单调递减．……………………………………………………9 分

（III）由（II）可知：

①当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 内单调递增，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 内单调递减，

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f(\frac{1}{2})=-\ln 2-1-\frac{a}{4}$．

（i）当 $-4\ln 2-4\le a\le 0$ 时，$f(\frac{1}{2})\le 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多有一个零点，不符合题意．

（ii）当 $a<-4\ln 2-4$ 时，$f(\frac{1}{2})>0$．

因为 $f(\frac{1}{2})>0$，$f(1)=-2<0$，$f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 内单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 内有唯一零点．

因为 $a<-4\ln 2-4<-\mathrm{e}$，

所以 $-a>\mathrm{e}$ 且 $0<-\frac{1}{a}<\frac{1}{4\ln 2+4}<\frac{1}{2}$．

因为 $f(-\frac{1}{a})=-\ln(-a)+1+\frac{3}{a}<1-\ln(-a)<1-\ln\mathrm{e}=0$，$f(\frac{1}{2})>0$，

且 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 内单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 内有唯一零点．

所以当 $a<-4\ln 2-4$ 时，$f(x)$ 恰有两个零点．

②当 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$，$(\frac{1}{a},+\infty)$ 内单调递增，在 $(\frac{1}{2},\frac{1}{a})$ 内单调递减，

因为当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(\frac{1}{2})=-\ln 2-1-\frac{a}{4}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多有一个零点，不符合题意．

③当 $a=2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多有一个零点，不符合题意．

④当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$，$(\frac{1}{2},+\infty)$ 内单调递增，在 $(\frac{1}{a},\frac{1}{2})$ 内单调递减．

因为当 $x=\frac{1}{a}$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(\frac{1}{a})=-\ln a-1-\frac{1}{a}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多有一个零点，不符合题意.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-4\ln 2-4)$. ……………………………………………………………………………… 15 分

（21）（共 15 分）

解：（I）$M_2=[-2,2]$，$M_3=[-2,1]$. ………………………………………………………………………………………… 4 分

（II）当 $c>\frac{1}{4}$ 时，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有

$$a_{n+1}-a_n=a_n^2+c-a_n=(a_n-\frac{1}{2})^2+c-\frac{1}{4}\geq c-\frac{1}{4}>0,$$

所以 $a_{n+1}>a_n$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是递增数列. ……………………………………………………………………………………………… 7 分

因为 $a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1\geq(c-\frac{1}{4})+(c-\frac{1}{4})+\cdots+(c-\frac{1}{4})$，

所以 $a_{n+1}\geq n(c-\frac{1}{4})$.

令 $n_0=\min\{t\in\mathbf{N}\,|\,t>\frac{8}{4c-1}\}$，则 $a_{n_0+1}\geq n_0(c-\frac{1}{4})>\frac{8}{4c-1}(c-\frac{1}{4})=2$，

所以 $c\notin M_{n_0+1}$.

所以存在正整数 $k=n_0+1$，使得 $c\notin M_k$. ……………………………………………………………………………… 9 分

（III）由题意得，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $M_{n+1}\subseteq M_n$ 且 $M\subseteq M_n$.

由（II）可得，当 $c>\frac{1}{4}$ 时，存在正整数 k，使得 $c\notin M_k$，所以 $c\notin M$.

所以若 $c\in M$，则 $c\leq\frac{1}{4}$.

又因为 $M\subseteq M_3=[-2,1]$，所以若 $c\in M$，则 $c\geq-2$.

所以若 $c\in M$，则 $-2\leq c\leq\frac{1}{4}$，即 $M\subseteq[-2,\frac{1}{4}]$.

下面证明 $[-2,\frac{1}{4}]\subseteq M$.

①当 $0\leq c\leq\frac{1}{4}$ 时，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n\geq 0$.

下证对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n<\frac{1}{2}$.

假设存在正整数k，使得$a_k \geq \frac{1}{2}$.

令集合$S=\{k\in \mathbf{N}^* \mid a_k \geq \frac{1}{2}\}$，则非空集合$S$存在最小数$s_0$.

因为$0\leq a_2=c\leq \frac{1}{4}<\frac{1}{2}$，所以$s_0>2$.

因为$s_0-1\notin S$，所以$0\leq a_{s_0-1}<\frac{1}{2}$.

所以$a_{s_0}=a_{s_0-1}^2+c<\frac{1}{4}+c\leq \frac{1}{2}$，与$a_{s_0}\geq \frac{1}{2}$矛盾.

所以对任意$n\in \mathbf{N}^*$，$0\leq a_n<\frac{1}{2}$.

所以当$0\leq c\leq \frac{1}{4}$时，$|a_n|\leq 2$.

②当$-2\leq c<0$时，$c^2+2c\leq 0$.

下证对任意$n\in \mathbf{N}^*$，$|a_n|\leq |c|$.

假设存在正整数k，使得$|a_k|>|c|$.

令集合$T=\{k\in \mathbf{N}^* \mid |a_k|>|c|\}$，则非空集合$T$存在最小数$t_0$.

因为$a_2=c$，所以$|a_2|\leq |c|$，所以$t_0>2$.

因为$t_0-1\notin T$，所以$|a_{t_0-1}|\leq |c|$.

$a_{t_0}=a_{t_0-1}^2+c\leq c^2+c\leq -c$，且$a_{t_0}=a_{t_0-1}^2+c\geq c$，

所以$|a_{t_0}|\leq |c|$，与$|a_{t_0}|>|c|$矛盾.

所以当$-2\leq c<0$时，$|a_n|\leq |c|\leq 2$.

所以当$c\in[-2,\frac{1}{4}]$时，对任意$n\in \mathbf{N}^*$，都有$|a_n|\leq 2$.

所以$c\in M$，即$[-2,\frac{1}{4}]\subseteq M$.

因为$M\subseteq[-2,\frac{1}{4}]$，且$[-2,\frac{1}{4}]\subseteq M$，所以$M=[-2,\frac{1}{4}]$. ……………………………………………………………15分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯