

首师大附中 2021-2022 学年第二学期高三开学检测

数学

2022.02.16

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 复数 $(1 + \sqrt{3}i)(-2i) =$

- (A) $-2\sqrt{3} + 2i$ (B) $2\sqrt{3} - 2i$ (C) $-2\sqrt{3} - 2i$ (D) $2\sqrt{3} + 2i$

2. 集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ (B) $\{-2, -1, 0, 1\}$ (C) $\{-1, 0, 1, 2\}$ (D) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

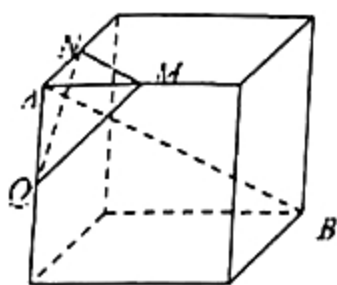
3. 在 $(1 - \frac{1}{x})^5$ 的展开式中, x^{-4} 的系数是

- (A) 4 (B) 5 (C) -5 (D) -4

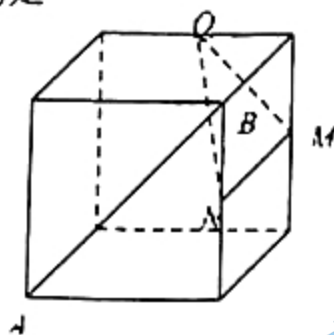
4. 下列函数中, 在 $(0, +\infty)$ 为增函数的是

- (A) $y = \tan x$ (B) $y = e^{|x-1|}$ (C) $y = \ln \frac{1}{x}$ (D) $y = (x-1)e^{x-2}$

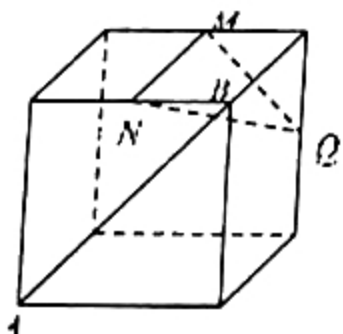
5. 如图, 在下列四个正方体中, A, B 为正方体的两个顶点, M, N, Q 为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 直线 AB 与平面 MNQ 不垂直的是



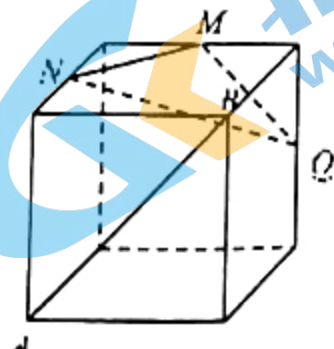
(A)



(B)



(C)



(D)

6. 若函数 $f(x) = a \sin x + b \cos x$ 的最大值为 2, 则下列结论不一定成立的是

- (A) $a^2 + b^2 = 4$ (B) $ab \leq 2$ (C) $(a+b)^2 \leq 8$ (D) $(a-b)^2 \leq 4$

7. 若 $a > b > 1$, $0 < c < 1$, 则

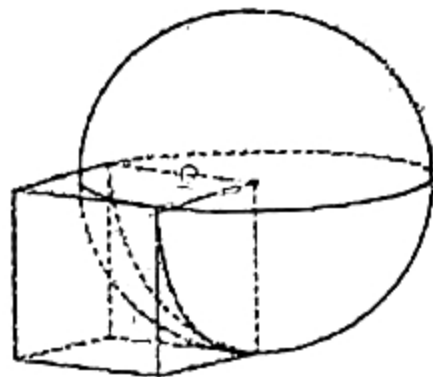
- (A) $c^b < c^a$ (B) $\log_c a > \log_c b$ (C) $\log_a c > \log_b c$ (D) $a^c < b^c$

8. “角 α, β 的终边关于 $y = x$ 轴对称”是“ $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ ”的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 如图, 将半径为 1 的球与棱长为 1 的正方体组合在一起, 使正方体的一个顶点正好是球的球心, 则这个组合体的体积为

- (A) $\frac{7}{6}\pi + \frac{5}{6}$ (B) $\frac{7}{6}\pi + 1$
(C) $\frac{7}{8}\pi + 1$ (D) $\pi + 1$



10. 公司在工程招标中是根据技术、商务、报价三项评分标准进行综合评分的; 按照综合得分的高低进行排序, 排序高者中标。分值权重表如下:

综合得分	技术	商务	报价
100%	50%	10%	40%

技术标、商务标基本都是由公司的技术、资质、资信等实力来决定的。报价标则相对灵活, 报价标的评分方法是: 基准价的基准分是 68 分, 若报价每高于基准价 1%, 则在基准分的基础上扣 0.8 分, 最低得分 48 分; 若报价每低于基准价 1%, 则在基准分的基础上加 0.8 分, 最高得分为 80 分; 若报价低于基准价 15% 以上(不含 15%)每再低 1%, 在 80 分在基础上扣 0.8 分。在某次招标中, 若基准价为 1000 (万元), 甲、乙两公司综合得分如下表:

公司	技术	商务	报价
甲	80 分	90 分	$A_甲$ 分
乙	70 分	100 分	$A_乙$ 分

甲公司的报价为 1100 (万元), 乙公司的报价为 800 (万元), 则甲、乙两公司综合得分分别是

- (A) 73 分 75.4 分 (B) 73 分 80 分
(C) 74.6 分 76 分 (D) 74.6 分 75.4 分

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分。）

11. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + y = 0$ ，则 C 的焦距为_____。

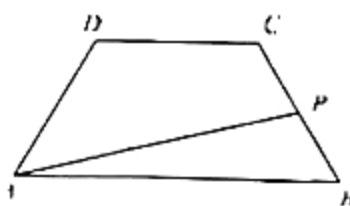
12. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，能够说明“若 $a_2 > a_1$ ，则 $S_2 > S_1$ ”是假命题的一组 a_1 和公比 q 的值依次为_____。

13. 北京 2022 年冬奥会吉祥物“冰墩墩”和冬残奥会吉祥物“雪容融”一亮相，好评不断，这是一次中国文化与奥林匹克精神的完美结合。为了宣传 2022 年北京冬奥会和冬残奥会，某学校决定派小明和小李等 5 名志愿者将两个吉祥物安装在学校的体育广场，每人参与且只参与一个吉祥物的安装，每个吉祥物都至少由两名志愿者安装，若小明和小李必须安装不同的吉祥物，则不同的分配方案种数为_____种。

14. 在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ， $AD = BC = 2$ ，

$AB = 4$ ， $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ ， P 是 BC 的中点，

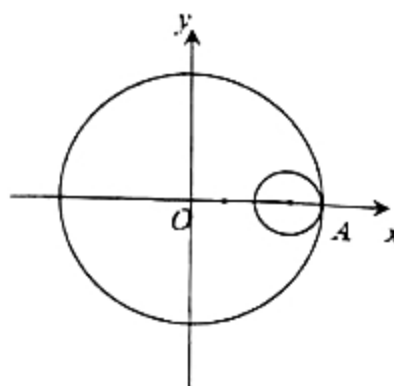
则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} =$ _____。



15. 数学中有许多形状优美的曲线，如星形线。让一个半径为 r 的小圆在一个半径为 $4r$ 的大圆内部，小圆沿着大圆的圆周滚动，小圆的圆周上任一点形成的轨迹即为星形线。如图，已知 $r = 1$ ，起始位置时大圆与小圆的交点为 A （ A 点为 x 轴正半轴上的点），滚动过程中 A 点形成的轨迹记为星形线 C 。有如下结论：

- ① 曲线 C 上任意两点间距离的最大值为 8；
- ② 曲线 $D: |x| + |y| = 4$ 的周长大于曲线 C 的周长；
- ③ 曲线 C 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 有且仅有 4 个公共点。

其中正确结论的序号为_____。



三、解答题（本大题共 6 小题，满分 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。）

16.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x) = 2 \sin x \sin(x - \frac{\pi}{2}) (x \in \mathbf{R})$.

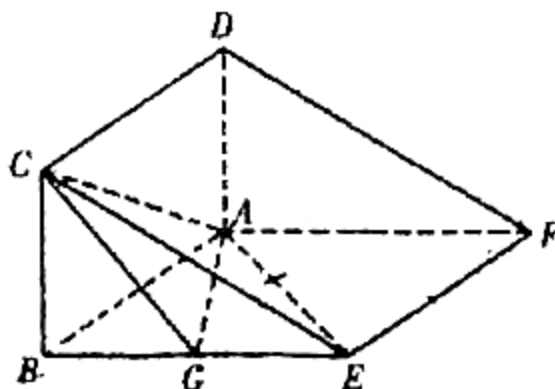
(I) 求 $f(0)$ 的值;

(II) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(III) 若 $g(x) = f(x + \varphi) (-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 为偶函数, 写出一个满足条件的 φ 的值, 并证明.

17.（本小题满分 14 分）

如图, 矩形 $ABCD$ 所在的平面与菱形 $ABEF$ 所在的平面垂直, G 为 BE 边中点, $AE = AF$.



(I) 求证: 直线 $AG \perp$ 平面 BCE ;

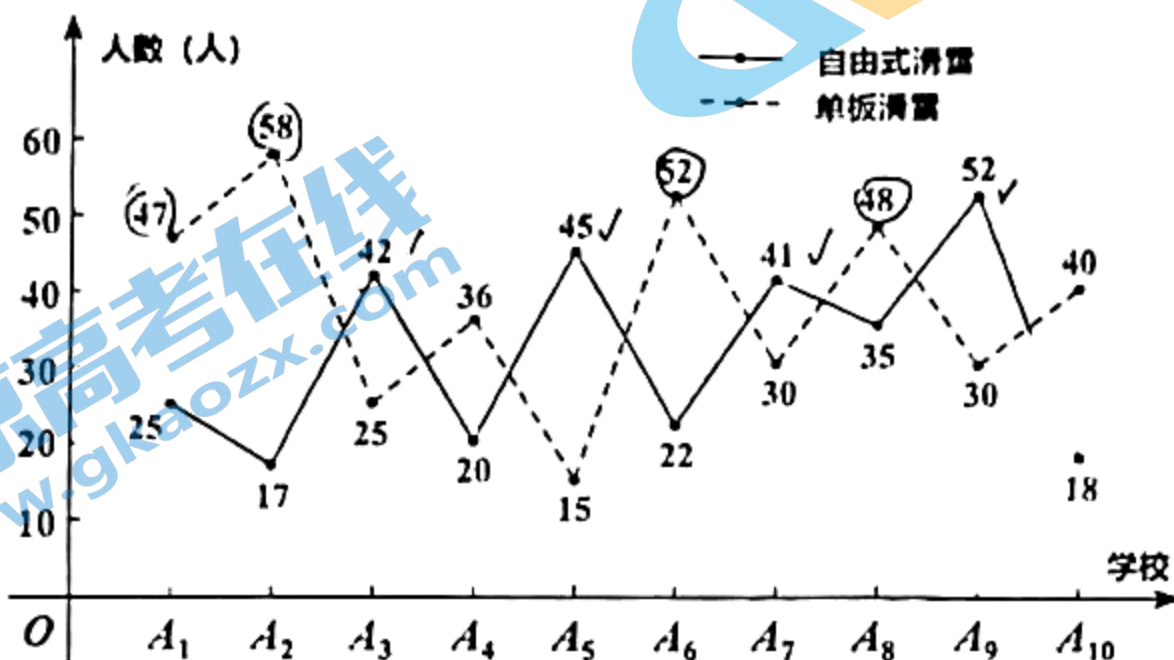
(II) 若 $AF = 2$, _____, 求二面角 $C-AG-F$ 的余弦值. 从① $BC = \sqrt{2}AB$,

② $BC = AG$ 这两个条件中任选一个填入上面的横线上, 并解答问题.

注: 如果选择多个条件作答, 按第一个解答计分.

18. (本小题满分 14 分)

随着北京 2022 冬奥会的开幕, 冰雪运动在全国各地蓬勃开展. 某地为深入了解学生参与“自由式滑雪”、“单板滑雪”两项运动的情况, 在该地随机抽取了 10 所学校进行调研, 得到数据如下:



(I) 从这 10 所学校中随机选取 1 所学校, 求这所学校“自由式滑雪”的参与人数超过 40 人的概率;

(II) 规定“单板滑雪”的参与人数超过 45 人的学校作为“基地学校”

(i) 现在从这 10 所学校中随机选取 3 所, 记 X 为其中的“基地学校”的个数, 求 X 的分布列和数学期望;

(ii) 为提高学生“单板滑雪”水平, 某“基地学校”针对“单板滑雪”的 4 个基本动作进行集训并考核. 要求 4 个基本动作中至少有 3 个动作达到“优秀”, 则考核为“优秀”. 已知某同学参训前, 4 个基本动作中每个动作达到“优秀”的概率均为 0.2, 参训后该同学考核为“优秀”. 能否认为该同学在参训后“单板滑雪”水平发生了变化? 并说明理由.

19. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = ax \ln x + x^2 - 1$.

(I) 若 $a = 2$, 判断集合 $A = \{x | f(x) = 0\}$ 与集合 $B = \{x | f(x) - 4x + 4 \leq 0\}$ 是否相等, 并证明;

(II) 若函数 $f(x)$ 的导函数有两个不同零点, 求实数 a 的取值范围.

20. (本小题满分 15 分)

已知椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 长轴的两个端点分别为 $A_1(-2,0), A_2(2,0)$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设直线 $x = my + 1$ 与椭圆 C 交于 P_1, P_2 两点, 直线 A_1P_1 与 A_2P_2 交于点 P . 试问: 当 m 变化时, 点 P 是否恒在一条定直线上? 若是, 请写出这条直线方程, 并证明你的结论; 若不是, 请说明理由.

21. (本小题满分 15 分)

若有穷数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ 且 $n \geq 3$) 满足 $|a_i - a_{i+1}| \leq |a_{i+1} - a_{i+2}|$ ($i = 1, 2, \dots, n-2$), 则称 $\{a_n\}$ 为 M 数列.

(I) 判断下列数列是否为 M 数列, 并说明理由:

① 1, 2, 4, 3.

② 4, 2, 8, 1.

(II) 已知 M 数列 $\{a_n\}$ 中各项互不相同. 令 $b_m = |a_m - a_{m+1}|$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$), 求

证: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列的充分必要条件是数列 $\{b_m\}$ 是常数列;

(III) 已知 M 数列 $\{a_n\}$ 是 m ($m \in \mathbb{N}^*$ 且 $m \geq 3$) 个连续正整数 $1, 2, \dots, m$ 的一个排列. 若

$\sum_{k=1}^{m-1} |a_k - a_{k+1}| = m+2$, 求 m 的所有取值.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018