20230607 项目第一次模拟测试卷

文科数学

本试卷共 4 页，23 小题，满分 150 分．考试时间 120 分钟．

注意事项：

1　答卷前．考生务必将自已的姓名、准考证号填涂在答题卡上，并在相应位置贴好条形码．

2　作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案信息涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案

3　非选择题必须用黑色水笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来答案，然后再写上新答案．不准使用铅笔和涂改液．不按以上要求作答无效．

4．考生必须保证答题卡整洁　考试结束后，将试卷和答题卡一并交回．

一　选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{-2,-1,0,1\}$，$B=\{x\mid x^2+1\le 0\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1\}$　　B．$\{-2,-1\}$　　C．$\{-2,-1,0\}$　　D．$\{-2,-1,0,1\}$

2．设复数 z 满足 $z=\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}+\mathrm{i}$，则 $|\bar{z}|=$

A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　D．$\sqrt{10}$

3．如图，一组数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_9,x_{10}$ 的平均数为 5，方差为 s_1^2，去除 x_9,x_{10} 这两个数据后，平均数为 $\bar{x}$，方差为 s_2^2，则

A．$\bar{x}>5$，$s_1^2>s_2^2$　　B．$\bar{x}<5$，$s_1^2<s_2^2$　　C．$\bar{x}=5$，$s_1^2<s_2^2$　　D．$\bar{x}=5$，$s_1^2>s_2^2$

4．双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4a^2}=1(a>0)$ 的渐近线方程为

A．$2x\pm y=0$　　B．$x\pm 2y=0$　　C．$4x\pm y=0$　　D．$x\pm 4y=0$

5．已知 x,y 为正实数，则"$x+y>4$"是"$\ln x+\ln y>2\ln 2$"的（　　）

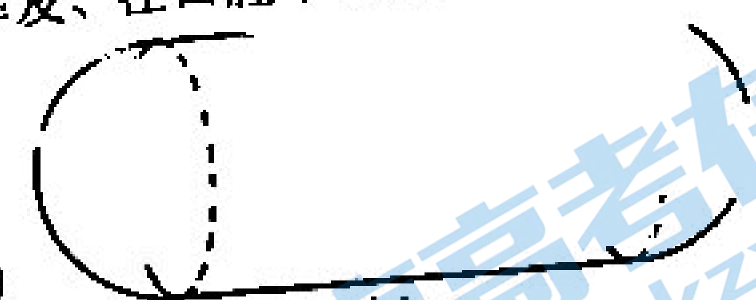
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．已知 x,y 满足 $\begin{cases}x-y-2\le 0,\\ x+2y-5\ge 0,\\ y-2\le 0,\end{cases}$ 则 $z=x+y+1$ 的最小值为

A．3　　B．4　　C．5　　D．7

7. 对食道和胃粘膜有刺激性的粉末或颗粒，或口感不好、易于挥发、在口腔中易被唾液分解，以及易吸入气管的药需要装入胶囊，既保护了药物药性不被破坏，也保护了消化器官和呼吸道.在数学探究课中某同学设计一个"胶囊形"的几何体，由一个圆柱和两个半球构成，已知圆柱的高是底面半径的 4 倍，若该几何体表面积为108π，则它体积为



A. 72π　　B. 96π　　C. 108π　　D. 144π

8. 已知$a=\sin\frac{1}{3},b=(\frac{1}{3})^{0.9},c=\frac{1}{2}\log_{27}9$，则

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

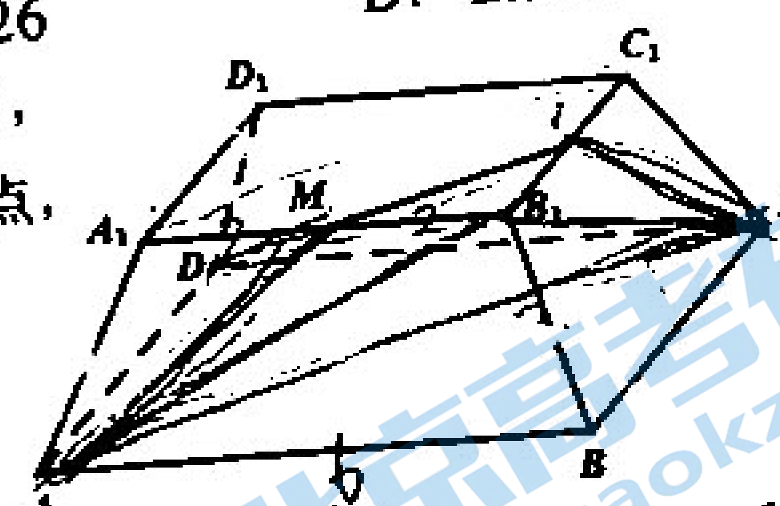
9. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})+\sin\omega x$ ($\omega>0$)，$f(x_1)=0$，$f(x_2)=\sqrt{3}$，且$|x_1-x_2|=\pi$，则ω的最小值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. 1　　D. 2

10. 二项式定理，又称牛顿二项式定理，由艾萨克•牛顿提出. 二项式定理可以推广到任意实数次幂，即广义二项式定理：对于任意实数α，$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1}\cdot x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\times1}\cdot x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k\times(k-1)\times\cdots\times2\times1}\cdot x^k+\dots$当$|x|$比较小的时候，取广义二项式定理的展开式的前两项可得：$(1+x)^\alpha\approx1+\alpha\cdot x$，并且$|x|$的值越小，所得结果就越接近真实数据.用这个方法计算$\sqrt{5}$的近似值，可以这样操作：$\sqrt{5}=\sqrt{4+1}=\sqrt{4(1+\frac{1}{4})}=2\sqrt{1+\frac{1}{4}}\approx2\times(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4})=2.25$. 用这样的方法，估计$\sqrt[3]{25}$的近似值约为

A. 2.922　　B. 2.928　　C. 2.926　　D. 2.930

11. 如图，已知正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=6$，$A_1B_1=4$，$BB_1=2$，点M,N分别为A_1B_1，B_1C_1的中点，则下列平面中与BB_1垂直的平面是



A. 平面A_1C_1D　　B. 平面DMN

C. 平面$ACNM$　　D. 平面AB_1C

12. 已知函数$f(x)=\frac{1}{2^x+2}$，若对于任意的$x\in[2,3]$，不等式$f(x)+f(a-2x)\le\frac{1}{2}$恒成立，则实数$a$的取值范围是

A. $[5,+\infty)$　　B. $[4,+\infty)$　　C. $(-\infty,6]$　　D. $(-\infty,4]$

二．填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量$\vec{a}=(m,-2)$，$\vec{b}=(1,1)$，若$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$，则$m=$______.

14. 函数$f(x)=x^3-ax$在$x=1$处的切线平行于直线$x-y-1=0$，则切线在y轴上的截距为______.

15. 在锐角ΔABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$a=1,B=60^\circ$，则b的取值范围为______.

16. 已知一簇圆 $C_n:(x-n)^2+(y-2n)^2=n^2(n\neq 0)$，直线 $l:y=kx+b$ 是它们的一条公切线，则 $k+b=$________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答；第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

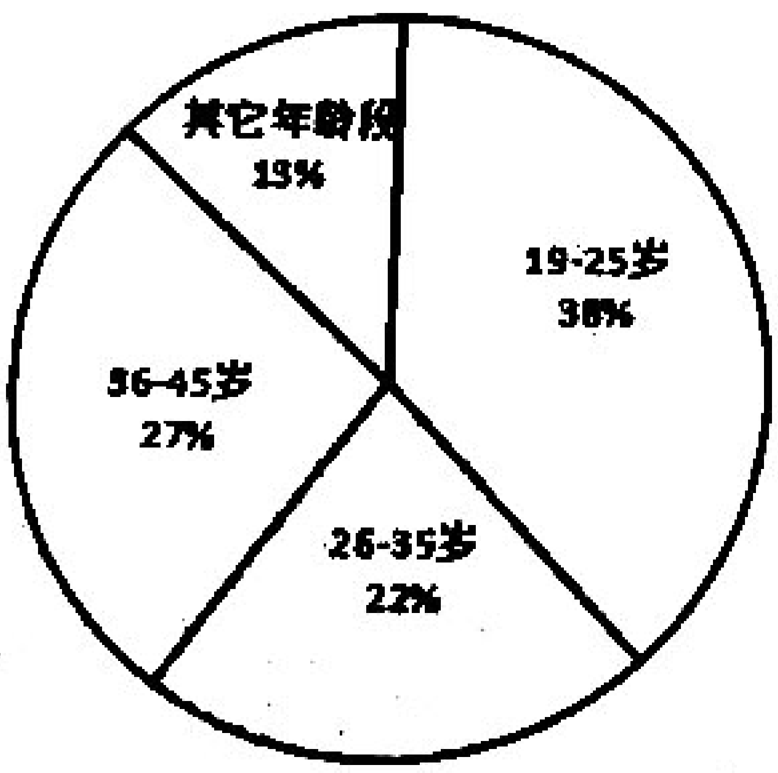
（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_4=64$，且 $a_na_{n+2}=ka_{n+1}^2$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求 k 的值；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18.（12 分）随着国民旅游消费能力的提升，选择在春节假期放松出行的消费者数量越来越多. 伴随着我国疫情防控形势趋向平稳，被“压抑”已久的出行需求持续释放，“周边游”、“乡村游”等新旅游业态火爆，为旅游行业发展注入新活力，旅游预订人数也开始增多. 为了调查游客预订与年龄是否有关，调查组对 400 名不同年龄段的游客进行了问卷调查，其中有 200 名游客预定了，这 200 名游客中各年龄段所占百分比见下图：



已知在所有调查游客中随机抽取 1 人，抽到不预订的且在 19-35 岁年龄段的游客概率为 $\frac{3}{16}$.

（1）请将下列 2×2 列联表补充完整.

	预订旅游	不预订旅游	合计
19-35 岁			
18 岁以下及 36 岁以上			
合计			

能否在犯错误概率不超过 0.001 的前提下，认为旅游预订与年龄有关？请说明理由.

（2）将上述调查中的频率视为概率，按照分层抽样的方法，从预订旅游客群中选取 5 人，在从这 5 人中任意取 2 人，求 2 人中恰有 1 人是 19-35 岁年龄段的概率.

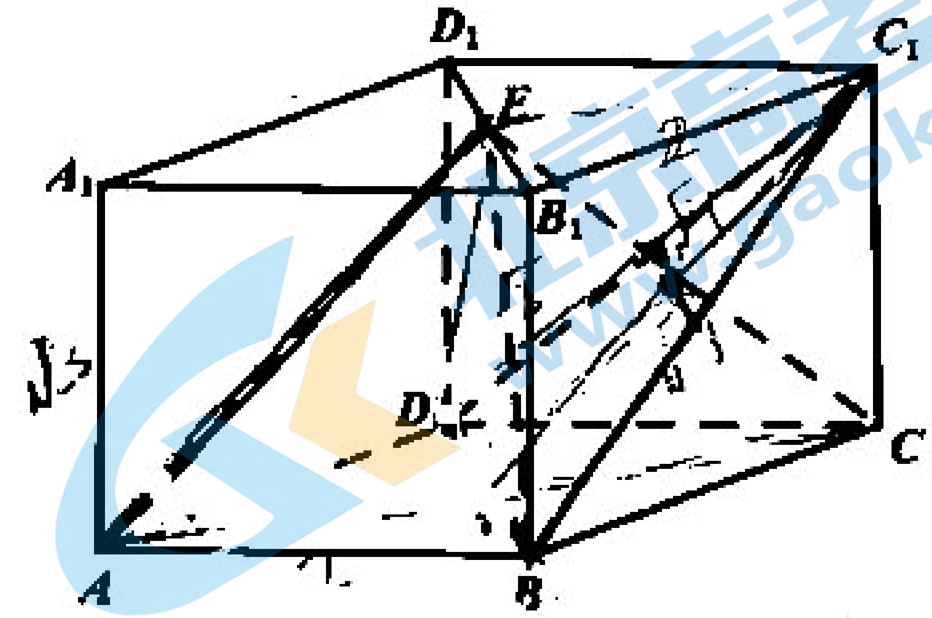
附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
k	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

19.（12 分）已知直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为菱形，且 $AB=AD=BD=2$，$AA_1=\sqrt{3}$，点 E 为 B_1D_1 的中点.

（1）证明：$AE\,//$ 平面 BDC_1；

（2）求三棱锥 $E-BDC_1$ 的体积.



20.（12 分）已知函数 $f(x)=(x-a)^2+be^x(a,b\in\mathbf{R})$.

（1）若 $a=0$ 时，函数 $y=f(x)$ 有 2 个极值点，求 b 的取值范围；

（2）若 $a=1,b=\dfrac{2}{e}$，方程 $f(x)=3$ 有几个解？

21.（12 分）已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上一点 P，若 P 处的切线斜率为 -1，且该切线与 y 轴相交于 $D(0,-1)$.

（1）求抛物线 C 的标准方程；

（2）过点 D 的直线与曲线 C 相交于 A,B 两点，若直线 PA,PB 分别与 x 轴相交于 M,N 两点，求 M,N 两点横坐标的和.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为：$\begin{cases}x=-1+t\cos\alpha\\ y=-3+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为：$\rho=4\cos\theta$.

（1）当 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时，求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

（2）直线 l 与曲线 C 交于 A，B 两点，若 $|AB|=2$，求 $\sin 2\alpha$ 的值.

23.（10分）选修 4-5：不等式选讲

已知 $a>0,b>0$，且 $a+b=ab$.

（1）求证：$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geq\dfrac{1}{2}$；

（2）求 $M=|2a-1|+|3b-1|$ 的最小值.

20230607 项目第一次模拟测试卷

文科数学 参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	D	A	B	B	D	A	A	C	C	A

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分，满分 20 分.

13. 2　　14. -2　　15. $(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3})$　　16. $\frac{3}{4}$

三. 解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17 题-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答.

17.【解析】(1) 因为 $a_na_{n+2}=ka_{n+1}^2$ $(n\in N^*)$，所以 $\begin{cases}a_1a_3=ka_2^2\\a_2a_4=ka_3^2\end{cases}$，……………… 2 分

因为 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_4=64$，所以 $\begin{cases}a_3=4k\\a_2a_4=16k^3\end{cases}$，

则 $k^3=8$，所以 $k=2$；…………………………………………………… 5 分

(2) 因为 $k=2$，所以 $a_na_{n+2}=2a_{n+1}^2$，则 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=2\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}$，……………………… 6 分

令 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，所以 $b_{n+1}=2b_n$，则 $\{b_n\}$ 是等比数列，

因为 $b_1=\frac{a_2}{a_1}=2$，$q=2$，所以 $b_n=b_1q^{n-1}=2^n$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$，……………… 9 分

则 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\times\cdots\times\frac{a_2}{a_1}\times a_1$

$=2^{n-1}\times2^{n-2}\times\cdots\times2^2\times2^1\times1=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. ……………………………… 12 分

18.【解析】(1) 预定旅游中，19-35 岁年龄段的人数为：$200\times(38\%+20\%)=120$ 人，
18 岁以下及 36 岁以上人数为 $200-120=80$ 人.
在所有调查对象中随机抽取 1 人，

抽到不预订的旅游客群在 19-35 岁年龄段的人的概率为 $\frac{3}{16}$，

故不预订旅游客群 19-35 岁年龄段的人为：$400\times\frac{3}{16}=75$ 人，

18 岁以下及 36 岁以上人数为 $200-75=125$ 人. ……………………… 2 分
所以 2×2 列联表中的数据为：

	预订旅游	不预订旅游	合计
19-35 岁	120	75	195

18 岁以下及 36 岁以上	80	125	205
合计	200	200	400

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{400(120\times125-80\times75)^2}{200\times200\times195\times205}\approx20.26>10.828,$$

则能在犯错误概率不超过 0.001 的前提下，认为旅游预订与年龄有关. ………… 6 分

（2）按分层抽样，从预定旅游客群中选取 5 人，

其中在 19-35 岁年龄段的人数为$5\times\dfrac{120}{200}=3$，分别记为：$A$，$B$，$C$；

18 岁以下及 36 岁以上人数为2人，分别记为：a，b． …………………… 8 分

从 5 人中任取 2 人，共有 10 种情况：(A,B)，(A,C)，(B,C)，(A,a)，(A,b)，(B,a)，(B,b)，(C,a)，(C,b)，(a,b)；其中恰有 1 人是 19-35 岁年龄段的有：(A,a)，(A,b)，(B,a)，(B,b)，(C,a)，(C,b) 6 种情况，概率为：$\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$．

……………………………………………………………… 12 分

19.【解析】（1）连接AC交BD于点F，连接C_1F，

在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中$AA_1 \underline{\parallel} CC_1$，

所以四边形AA_1C_1C为平行四边形，即$AC \underline{\parallel} A_1C_1$， ……………… 2 分

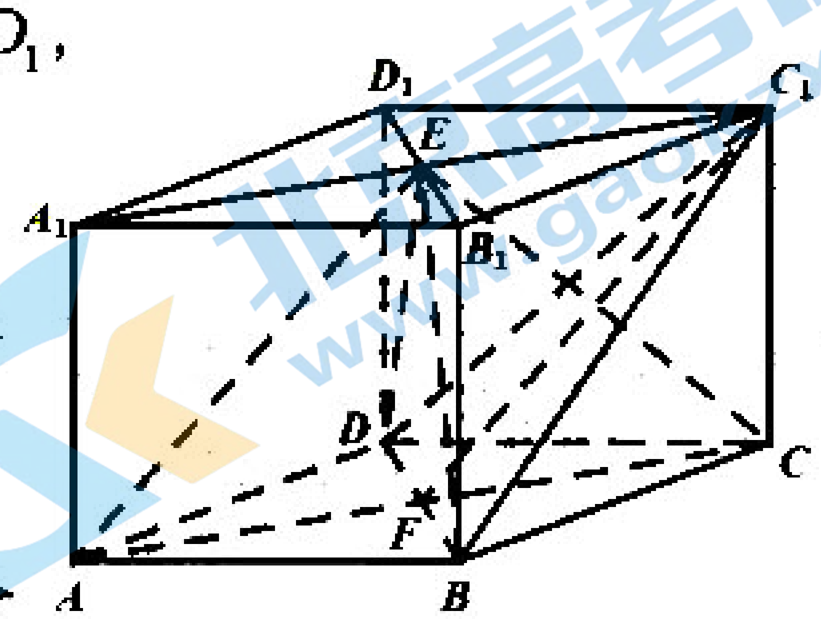
又因为底面$ABCD$为棱形，所以点F为AC的中点，

点E为B_1D_1的中点，即点E为A_1C_1的中点，所以$C_1E \underline{\parallel} AF$，

即四边形AFC_1E为平行四边形，所以$AE\parallel C_1F$， ………… 4 分

因为$C_1F\subseteq$平面BDC_1，所以$AE\parallel$平面BDC_1； …………………………… 6 分

（2）在直棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中$BB_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，



所以$BB_1\perp A_1C_1$，

又因为上底面$A_1B_1C_1D_1$为棱形，所以$B_1D_1\perp A_1C_1$，

所以$A_1C_1\perp$平面BB_1D_1D， …………………… 8 分

因为在ΔABD中，$AB=AD=BD=2$，

且点F为BD的中点，

所以$AF=\sqrt{3}$，即$C_1E=\sqrt{3}$， ……………………10 分

所以$V_{E-BDC_1}=V_{C_1-BDE}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BDE}\cdot C_1E=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$． …………12 分

20.【解析】（1）$a=0$时，$f(x)=x^2+be^x,f'(x)=2x+be^x$，

则方程$2x+be^x=0$有两实根，

即$b=-\dfrac{2x}{e^x}$有两实根． ………………………………………………… 2 分

设$b(x)=-\dfrac{2x}{e^x},b'(x)=\dfrac{2(x-1)}{e^x}$，

则$x<1$时，$b'(x)<0$，$b(x)$单调递减；$x>1$时，$b'(x)>0$，$b(x)$单调递增，

所以$b(x)_{\min}=b(1)=-\dfrac{2}{e}$，

且$b(0)=0$，$x\to+\infty$时，$b(x)\to 0$，

所以当$b(x)=b$有两个实根时，$-\dfrac{2}{e}<b<0$. ………………………………… 5分

（2）当$a=1,b=\dfrac{2}{e}$时，设$g(x)=f(x)-3$，

则$g(x)=(x-1)^2+2e^{x-1}-3,g'(x)=2(x-1)+2e^{x-1}$，

因为$g'(x)$在R上单调递增，且$g'(0)=-2+\dfrac{2}{e}<0,g'(1)=2>0$，

所以$g'(x)=0$恰有一根x_0，且$x_0-1+e^{x_0-1}=0,0<x_0<1$， ……………… 8分

当$x<x_0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；当$x>x_0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

所以$g(x)_{\min}=g(x_0)=(x_0-1)^2+2e^{x_0-1}-3=(x_0-1)^2+(2-2x_0)-3=x_0{}^2-4x_0<0$，

且$g(-1)=1+\dfrac{2}{e^2}>0,g(2)=2e-2>0$，

所以$g(x)=0$有且仅有两个实根，即方程$f(x)=3$有且仅有两个实根.

………………………………… 12分

21.【解析】（1）由题意可知直线m的方程为$y=-x-1$，

联立方程$\begin{cases}y=-x-1\\x^2=2py\end{cases}$可得$x^2+2px+2p=0$， ………………………… 2分

又因为直线m与抛物线相切，则$\Delta=4p^2-8p=0$，解得$p=2$，

所以抛物线C的方程为$x^2=4y$，此时切点$P(-2,1)$. ………………………… 5分

（2）设直线的方程为$y=kx-1$，且$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

与抛物线C联立方程$\begin{cases}x^2=4y\\y=kx-1\end{cases}$得$x^2-4kx+4=0$，

$\Delta=16k^2-16>0$，得$k^2>1$，

则有$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=4$， ………………………… 7分

直线AP的方程$y-1=\dfrac{y_1-1}{x_1+2}(x+2)$，令$y=0$，$x_M=-\dfrac{x_1+2}{y_1-1}-2$，

同理可知$x_N=-\dfrac{x_2+2}{y_2-1}-2$， ………………………… 9分

所以$x_M+x_N=-\dfrac{x_1+2}{y_1-1}-\dfrac{x_2+2}{y_2-1}-4=-(\dfrac{x_1+2}{y_1-1}+\dfrac{x_2+2}{y_2-1})-4$，

因为点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$在抛物线上，则$y_1=\dfrac{1}{4}x_1^2,y_2=\dfrac{1}{4}x_2^2$，

$$x_M+x_N=-(\frac{4}{x_1-2}+\frac{4}{x_2-2})-4=-\frac{4(x_1+x_2)-16}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}-4,$$

由于韦达定理可得 $x_M+x_N=-\frac{4(x_1+x_2)-16}{8-2(x_1+x_2)}-4=-(-2)-4=-2$. ………… 12 分

22.【解析】(1) 当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-1+\frac{1}{2}t \\ y=-3+\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$，

消去参数 t 得 $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}-3=0$，

即直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}-3=0$. ………………………………… 2 分

$\because \rho=4\cos\theta$，$\therefore \rho^2=4\rho\cos\theta$，$\because x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，$\therefore x^2+y^2=4x$，

则曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x=0$. ………………………………… 5 分

(2) 将直线 l 的参数方程代入到曲线 C 的直角坐标方程中得

$(-1+t\cos\alpha)^2+(-3+t\sin\alpha)^2=4(-1+t\cos\alpha)$，

化简得 $t^2-6(\sin\alpha+\cos\alpha)t+14=0$，

设 A，B 两点对应的参数为 t_1，t_2，

则 $t_1+t_2=6(\sin\alpha+\cos\alpha)$，$t_1t_2=14$， ………………………………… 8 分

因为直线 l 过点 $P(-1,-3)$，

则 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{36(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-56}=\sqrt{36\sin 2\alpha-20}=2$，

解得 $\sin 2\alpha=\frac{2}{3}$. ………………………………… 10 分

23. 【解析】(1) 因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=ab$，$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$

又 $\because \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}{2}}\geq\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$， ………………………………………… 3 分

$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^2=\frac{1}{2}$.

当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立. ………………………………………… 5 分

(2) 因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=ab$，$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，$\therefore a>1$，$b>1$，

所以 $M=|2a-1|+|3b-1|\geq 2a+3b-2$， ………………………………… 7 分

$=(2a+3b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})-2=(2+3+\frac{3b}{a}+\frac{2a}{b})-2\geq 3+2\sqrt{6}$，

当且仅当 $\frac{3b}{a}=\frac{2a}{b}$ 时等号成立，所以 M 最小值为 $2\sqrt{6}+3$. ………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。