绝密★启用前

茂名市五校联盟 2022 届高三第二次联考试题
数学试卷

本试卷共 4 页，22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x\mid(x+1)(x-2)\leqslant 0\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{-1,0,1,2\}$

C. $\{-1,2\}$　　D. $\{-2,1\}$

2. 复数 $z=\dfrac{i+1}{i}$ 在复平面内所对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

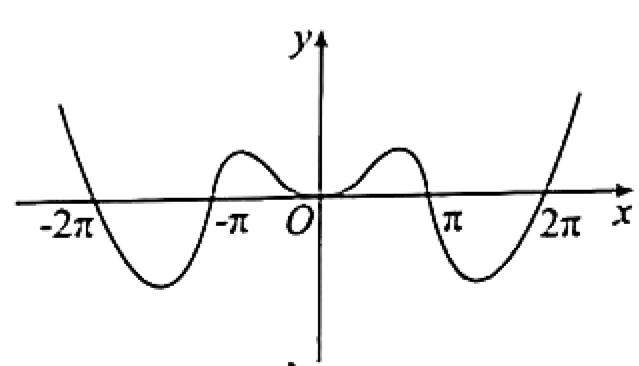
C. 第三象限　　D. 第四象限

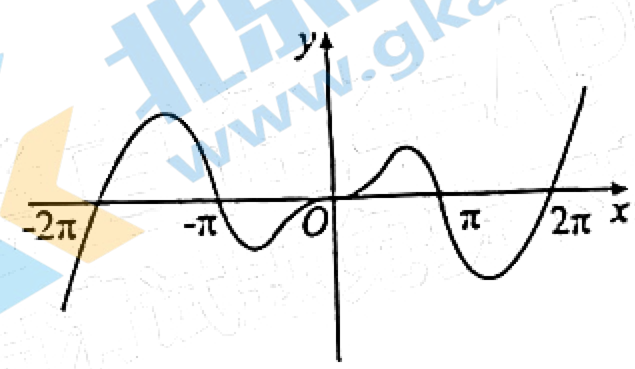
3. 已知向量 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{b}\cdot\left(\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=0$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

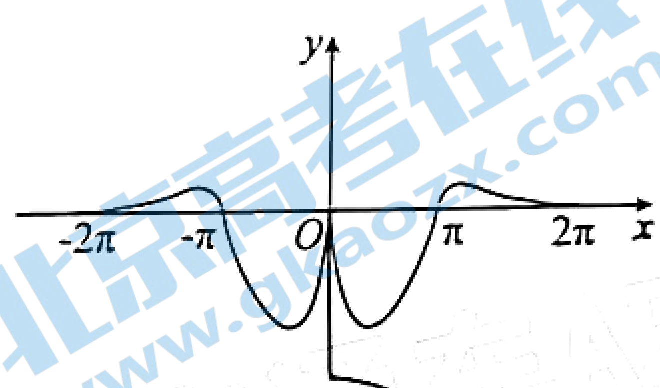
A. 30°　　B. 60°

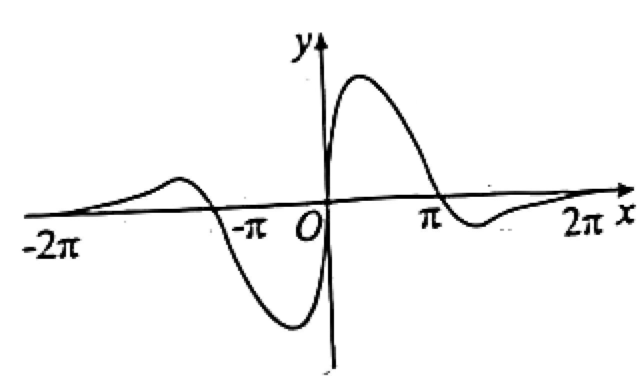
C. 90°　　D. 150°

4. 函数 $f(x)=\dfrac{x\cdot\sin x}{\cos x+2}$ 的图象大致为


A.


B.


C.


D.

5. 已知圆 $x^2+y^2=1$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 交于 A,B 两点，与抛物线的准线交于 C,D 两点，若四边形 $ABCD$ 是矩形，则 p 等于

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　C. $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

6. 从甲地到乙地共有 A、B、C、D 四条路线可走，走路线 A 堵车的概率为 0.08，走路线 B 堵车的概率为 0.1，走路线 C 堵车的概率为 0.12，走路线 D 堵车的概率为 0.04，若小李从这四条路线中等可能的任选一条开车自驾游，则堵车的概率为

A. 0.034　　B. 0.065

C. 0.085　　D. 0.34

7. 已知 $a=\log_3 2$，$b=\log_5 4$，$c=0.75$，则 a,b,c 的大小关系是

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$

C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

8. 已知正三棱柱的高等于 1，且球 O 与所有棱都相切，则球 O 的体积为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$

C. $\frac{4\pi}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列关于函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的说法正确的是

A. 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增

B. 最小正周期是 π

C. 图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 中心对称

D. 图象关于直线 $x=-\frac{5\pi}{6}$ 轴对称

10. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_2+a_9=3$，则下列选项一定正确的是

A. $S_7=7$　　B. $S_{10}=10$

C. $a_4=1$　　D. $a_2+a_6=2$

11. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+ax}{2}+\ln x$，若 $f(x)$ 的图象存在两条相互垂直的切线，则 a 的值可以是

A. -6　　B. -5

C. -4　　D. -3

12. 东汉末年的数学家赵爽在《周髀算经》中利用一副"弦图"，根据面积关系给出了勾股定理的证明，后人称其为"赵爽弦图". 如图 1，它由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形. 我们通过类比得到图 2，它是由三个全等的钝角三角形与一个小等边三角形 $A'B'C'$ 拼成的一个大等边三角形 ABC，对于图 2，下列结论正确的是

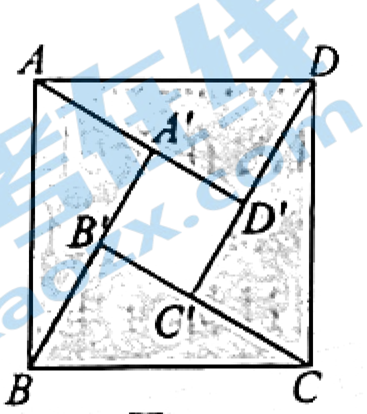


图1

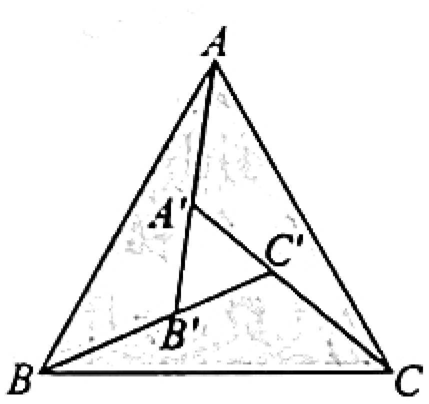


图2

A. 这三个全等的钝角三角形不可能是等腰三角形

B. 若 $BB'=3$，$\sin\angle ABB'=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，则 $A'B'=2$

C. 若 $AB=2A'B'$，则 $AB'=\sqrt{5}BB'$

D. 若 A' 是 AB' 的中点，则三角形 ABC 的面积是三角形 $A'B'C'$ 面积的 7 倍

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，若 $P(\xi>3)=P(\xi<1)$，则 $\mu=$________.

14. 若 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$，且 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$，则 $\cos 2\alpha$ 的值为________.

15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 A 在双曲线的渐近线上，线段 AF_1 的中点 M 在 y 轴上，且 $\triangle AMF_2$ 为等边三角形，则双曲线的离心率等于________.

16. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=BC=1$，$AA_1=2$，在 A_1B 上取一点 M，在 B_1C 上取一点 N，使得直线 MN∥平面 A_1ACC_1，则线段 MN 的最小值是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，满足 $a_3=3$，且 a_2,a_4,a_8 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n；

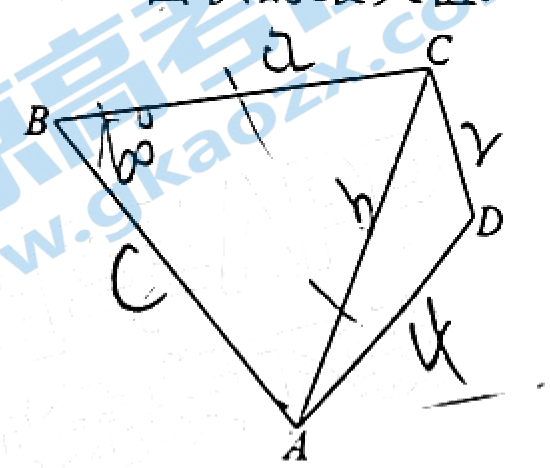
(2) 设 $b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+2}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（本小题满分 12 分）

已知在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，满足 $b\cos C=(2a-c)\cos B$.

(1) 求 B；

(2) 如图，若 $a=b$，在 $\triangle ABC$ 外取点 D，且 $AD=4$，$CD=2$. 求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.



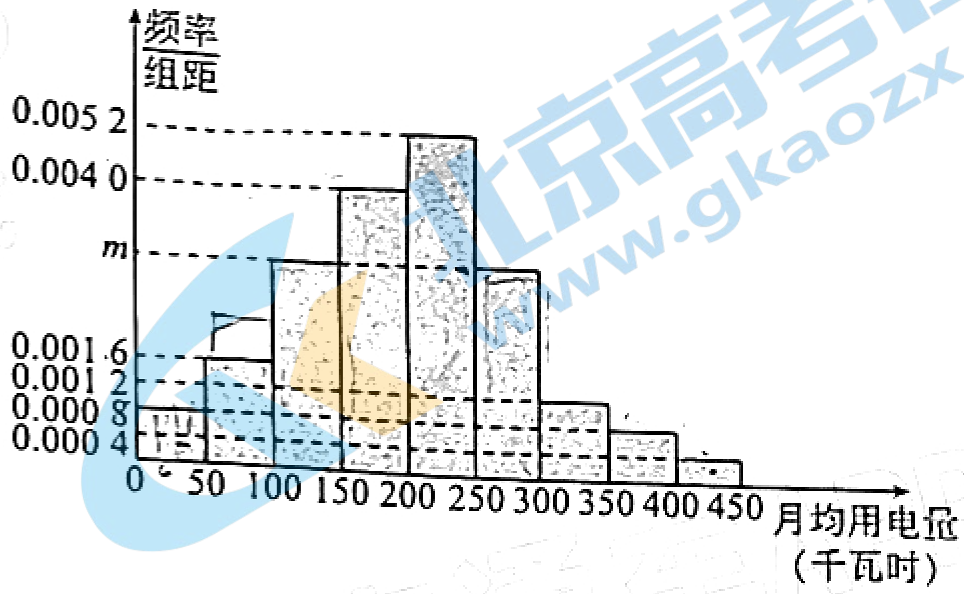
19.（本小题满分 12 分）

2021 年 9 月以来，多地限电的话题备受关注，广东省能源局和广东电网有限责任公司联合发布《致全省电力用户有序用电、节约用电倡议书》，目的在于引导大家如何有序节约用电. 某市电力公司为了让居民节约用电，采用"阶梯电价"的方法计算电价，每户居民每月用电量不超过标准用电量 x（千瓦时）时，按平价计费，每月用电量超过标准电量 x（千瓦时）时，超过部分按议价计费. 随机抽取了 100 户居民月均用电量情况，已知每户居民月均用电量均不超过 450 度，将数据按照[0,50)，[50,100)，…，[400,450]分成 9 组，制成了频率分布直方图（如图所示）.

(1) 求直方图中 m 的值；

(2) 如果该市电力公司希望使 85%的居民每月均能享受平价电费，请估计每月的用电量标准 x（千瓦时）的值；

(3)在用电量不小于 350(千瓦时)的居民样本中随机抽取 4 户,若其中不小于 400(千瓦时)的有 X 户居民,求 X 的分布列.

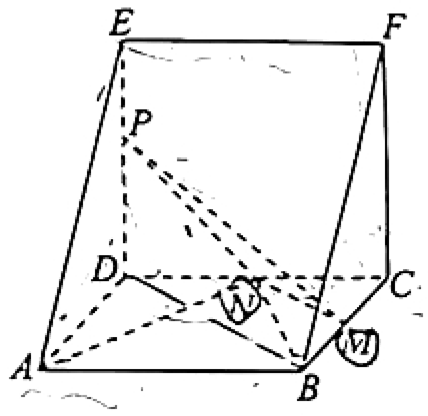


20.(本小题满分 12 分)

如图,四边形 $ABCD$ 和 $CDEF$ 都是正方形,且平面 $ABCD\perp$平面 $CDEF$,M、N 分别是 BC、CD 的中点,点 P 在线段 DE 上.

(1)求证:$AN\perp PM$;

(2)若二面角 $P-MN-A$ 的大小为 $45°$,求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.



21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,离心率等于$\frac{\sqrt{6}}{3}$,点 P 在 y 轴正半轴上,$\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形且面积等于 2.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)已知斜率存在且不为 0 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点,当点 A 关于 y 轴的对称点在直线 PB 上时,直线 l 是否过定点?若过定点,求出此定点;若不过,请说明理由.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+b$,曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=5x-5$.

(1)求 a,b 的值;

(2)若 x_1,x_2 是两个正数,且 $f(x_1)+f(x_2)\geqslant x_1+x_2$,证明:$x_1+x_2>1$.

茂名市五校联盟2022届高三第二次联考试题

数学参考答案

一、单选题

1. B 【解析】因为 $N=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，故 $M\cap N=\{-1,0,1,2\}$. 故选 B.

2. D 【解析】$z=\frac{i+1}{i}=1+\frac{1}{i}=1-i$ 对应的点 $(1,-1)$ 在第四象限. 故选 D.

3. B 【解析】$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2=0$，$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{b}^2}{2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$，所以夹角为 60°. 故选 B.

4. A 【解析】因为 $f(x)=\frac{x\sin x}{\cos x+2}$，$f(-x)=\frac{-x\cdot\sin(-x)}{\cos(-x)+2}=\frac{x\cdot\sin x}{\cos x+2}=f(x)$，为偶函数，所以图象关于 y 轴对称，排除选项 B、D；当 $x\in(0,\pi)$ 时，$f(x)>0$，排除选项 C. 故选 A.

5. D 【解析】由对称性可知 AB 为通径，所以 $\left(\frac{p}{2}\right)^2+p^2=1$，解得 $p=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

6. C 【解析】由概率公式得 $P=0.25\times0.08+0.25\times0.1+0.25\times0.12+0.25\times0.04=0.085$. 故选 C.

7. A 【解析】$4^4>5^3\Rightarrow 4\log_5 4>3\Rightarrow\log_5 4>\frac{3}{4}=0.75$，$2^4<3^3\Rightarrow 4\log_3 2<3\Rightarrow\log_3 2<\frac{3}{4}=0.75$. 故选 A.

8. B 【解析】设球的半径为 R，底面三角形的边长为 a，由相切关系得球与三条侧棱的切点确定的平面截球与三棱柱，得到的截面是大圆与内接正三角形，故球 O 的半径 R 等于底面等边三角形中线的 $\frac{2}{3}$，即 $R=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，底面三角形被球截得的小圆半径为 r，由此小圆为底面三角形的内切圆得 $r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$，所以 $R^2=r^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$，得 $a=1$，$R=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. 故选 B.

二、多选题

9. AD 【解析】解不等式 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$k=0$ 时，得增区间是 $\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，所以 A 选项对；$T=\frac{2\pi}{w}=2\pi$，B 选项错；解 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 关于 $x=\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 对称，$k=0$，-1 时，得 $x=\frac{\pi}{6}$，$x=-\frac{5\pi}{6}$ 均为对称轴，故 C 选项错、D 选项对. 故选 AD.

10. ACD 【解析】$a_1+a_2+a_9=3a_4=3$，所以 $a_4=1$，$S_7=7a_4=7$，$a_2+a_6=2a_4=2$，S_{10} 不确定. 故选 ACD.

11. AB 【解析】$f'(x)=x+\frac{a}{2}+\frac{1}{x}\geqslant 2+\frac{a}{2}(x>0)$，当且仅当 $x=1$ 时取等号. 存在两条相互垂直切线的充要条件是 $f'(x)_{\min}<0$，所以 $2+\frac{a}{2}<0$，即 $a<-4$. 故选 AB.

12. ABD 【解析】根据对称性 $AA'=BB'$，所以 $BB'<AB'$，所以 A 选项正确；在 $\triangle ABB'$ 中，$\sin\angle ABB'=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，而 $\angle AB'B=120^\circ$，所以 $\sin\angle BAB'=\sin(60^\circ-\angle ABB')=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，由正弦定理得 $\frac{BB'}{\sin\angle BAB'}=$

$\frac{AB'}{\sin\angle ABB'}$,解得 $AB'=5$,又因为 $AA'=BB'=3$,所以 $A'B'=AB'-AA'=2$,选项 B 正确;不妨设 $AB=2A'B'=2$,$AA'=x$,由余弦定理 $AB^2=BB'^2+AB'^2-2BB'\cdot AB'\cos 120°$,解得 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,所以 $\frac{AB'}{BB'}=\frac{1+x}{x}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$,故 C 选项不正确;若 A' 是 AB' 的中点,$S_{\triangle ABB'}=\frac{1}{2}BB'\cdot AB'\sin 120°=B'C'\cdot A'B'\sin 60°=2S_{\triangle A'B'C'}$,所以 $S_{\triangle ABC}=7S_{\triangle A'B'C'}$. 故选 ABD.

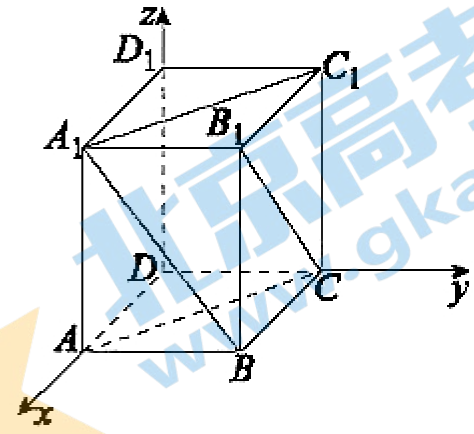
三、填空题

13. 2 【解析】因为 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$,故正态密度函数关于直线 $x=\mu$ 对称,又 $P(\xi>3)=P(\xi<1)$,从而 $\mu=\frac{1+3}{2}=2$.

14. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 【解析】因为 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$,所以 $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos 2\alpha=\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

15. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ 【解析】由线段 AF_1 的中点 M 在 y 轴上,得 $A\left(c,\frac{bc}{a}\right)$,由已知 $AF_2\perp F_1F_2$,$\angle AF_1F_2=30°$,所以渐近线的斜率 $\frac{b}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}}$,$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

16. $\frac{2}{3}$ 【解析】如图以 D 为原点,DA,DC,DD_1 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,



则 $D(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$C(0,1,0)$,$A_1(1,0,2)$,$B_1(1,1,2)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$,设平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $p=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}p\cdot\overrightarrow{AC}=-x+y=0,\\ p\cdot\overrightarrow{AA_1}=2z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$,则 $y=1$,$z=0$,即 $p=(1,1,0)$,又 $\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-2)$,$\overrightarrow{CB_1}=(1,0,2)$,$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,1,0)$,由 $\overrightarrow{A_1M}=\lambda\overrightarrow{A_1B}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,$\overrightarrow{CN}=\mu\overrightarrow{CB_1}(0\leqslant\mu\leqslant1)$,得 $M(1,\lambda,2-2\lambda)$,$N(\mu,1,2\mu)$,所以 $\overrightarrow{MN}=(-1+\mu,1-\lambda,2\lambda-2+2\mu)$,由 $\overrightarrow{MN}\cdot p=0$ 得 $\lambda=\mu$,$|\overrightarrow{MN}|^2=(-1+\lambda)^2+(1-\lambda)^2+(4\lambda-2)^2=18\lambda^2-20\lambda+6$,当 $\lambda=\frac{5}{9}$ 时,$|\overrightarrow{MN}|^2$ 取得最小值 $\frac{4}{9}$,即 MN 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

四、解答题

17. 解:(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,因为 a_2,a_4,a_8 成等比数列,

所以 $a_4^2=a_2\cdot a_8$,即 $(a_3+d)^2=(a_3-d)\cdot(a_3+5d)$. (1 分)

又因为 $a_3=3$ 所以 $(3+d)^2=(3-d)\cdot(3+5d)$,

$d^2-d=0$,解得 $d=0$(舍去)或 $d=1$. (3 分)

故 $a_n=a_3+(n-3)d=n$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=n$. (5 分)

(2)因为 $a_n=n$,所以 $b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+2}}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$, (7 分)

$$T_n=\frac{1}{a_1\cdot a_3}+\frac{1}{a_2\cdot a_4}+\cdots+\frac{1}{a_n\cdot a_{n+2}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4},$$

因此 $T_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4}$. (10 分)

18. 解:(1)$\because b\cos C=(2a-c)\cos B$,

由正弦定理得 $\sin B\cos C=(2\sin A-\sin C)\cos B$, (2 分)

$\therefore 2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,

$\therefore 2\sin A\cos B=\sin(B+C)$,

$\therefore 2\sin A\cos B=\sin A$, (5 分)

$\because \sin A\neq 0$, $\therefore \cos B=\frac{1}{2}$,

$\because 0<B<\pi$,故 $B=\frac{\pi}{3}$. (6 分)

(2)$\because B=\frac{\pi}{3}$,且 $a=b$, $\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

设$\angle ADC=\alpha$,则在$\triangle ACD$ 中,由余弦定理得 $b^2=16+4-16\cos\alpha=20-16\cos\alpha$, (7 分)

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times b^2\times\sin\frac{\pi}{3}=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cos\alpha$, $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sin\alpha=4\sin\alpha$, (10 分)

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $S=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cos\alpha+4\sin\alpha=5\sqrt{3}+8\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 8+5\sqrt{3}$,

当 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ 时 $S=8+5\sqrt{3}$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积的最大值是 $8+5\sqrt{3}$. (12 分)

19. 解:(1)由题得 $50\times(0.000\ 8+0.001\ 6+0.004\ 0+0.005\ 2+0.001\ 2+0.000\ 8+0.000\ 4+2m)=1$, (2 分)

解得 $m=0.003\ 0$. (3 分)

(2)月均用电量小于 250(千瓦时)的居民家庭所占百分比为

$50\times(0.000\ 8+0.001\ 6+0.003\ 0+0.004\ 0+0.005\ 2)=0.73$,

即 73%的居民家庭月均用电量小于 250(千瓦时), (5 分)

同理,88%的居民月均用电量小于 300(千瓦时),故 $250<x<300$,

则 $0.73+(x-250)\times 0.003\ 0=0.85$,

解得 $x=290$(千瓦时). (7 分)

(3)在样本中用电量不小于 350(千瓦时)的居民共有 $(0.000\ 8+0.000\ 4)\times 50\times 100=6$(户),

用电量不小于 400(千瓦时)的居民共有 $0.000\ 4\times 50\times 100=2$(户), (8 分)

由题意随机变量 X 可取 0,1,2,

$P(X=0)=\frac{C_4^4}{C_6^4}=\frac{1}{15}$,

$P(X=1)=\frac{C_4^3\times C_2^1}{C_6^4}=\frac{8}{15}$,

$P(X=2)=\frac{C_4^2\times C_2^2}{C_6^4}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$,

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$

(12 分)

20. 解:(1)连接 DM,在正方形 $ABCD$ 中,M、N 分别是 BC、CD 的中点,

$\because AD:DN=DC:CM$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADN \cong \mathrm{Rt}\triangle DCM$,

$\therefore \angle DAN=\angle CDM$,

$\therefore AN\perp DM$.　　(2 分)

$\because$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 $CDEF$, $ED\perp CD$,

$\therefore ED\perp$ 平面 $ABCD$,

又 $\because AN\subset$ 平面 $ABCD$,

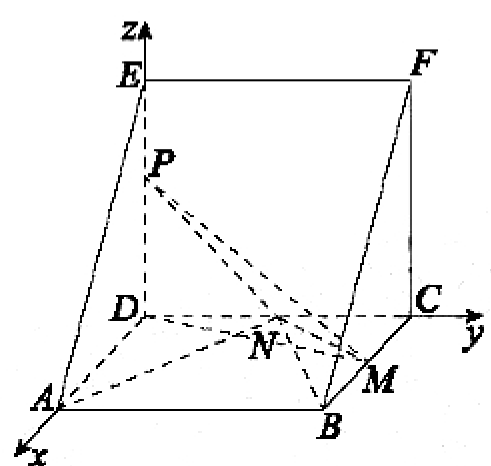
$\therefore AN\perp ED$, $ED\cap DM=D$,　　(4 分)

$\therefore AN\perp$ 平面 EDM,

又 $\because PM\subset$ 平面 EDM,

$\therefore AN\perp PM$.　　(6 分)

(2)直线 DA,DC,DE 两两垂直,以 D 为坐标原点,DA,DC,DE 分别为 x,y,z 轴建立如图所示坐标系,



不妨设 $AB=2$, $DP=a$,由已知,$N(0,1,0)$, $M(1,2,0)$, $A(2,0,0)$, $P(0,0,a)$,

$\therefore \overrightarrow{NM}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{NP}=(0,-1,a)$, $\overrightarrow{AN}=(-2,1,0)$,　　(7 分)

设平面 MNP 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{NM}\cdot\boldsymbol{m}=0\\ \overrightarrow{NP}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$,所以 $\begin{cases}x+y=0\\ -y+az=0\end{cases}$,

令 $x=1$,解得一个法向量 $\boldsymbol{m}=\left(1,-1,-\dfrac{1}{a}\right)$,　　(8 分)

取平面 $ABCD$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$,

$\because$ 二面角 $P-MN-A$ 的大小为 45°,

$$\therefore |\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|-\dfrac{1}{a}\right|}{\sqrt{1+1+\dfrac{1}{a^2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,　　(10 分)

设直线 AN 与平面 PMN 所成角等于 θ,

$$\text{则}\ \sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AN},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AN}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{AN}||\boldsymbol{m}|}=\frac{3}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{1+1+2}}=\frac{3\sqrt{5}}{10},$$

$\therefore$ 直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.　　(12 分)

21. 解:(1)由对称性可知三角形 PF_1F_2 为等腰直角三角形,$\angle F_1PF_2=90^\circ$,

因为三角形 PF_1F_2 面积等于 2,所以 $F_1F_2=2\sqrt{2}$,

即 $c^2=2$,　　(2 分)

而椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{a}$,解得 $a=\sqrt{3}$,则

$b^2=a^2-c^2=1$,

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.　　(4 分)

(2)依题意,$P(0,\sqrt{2})$,设直线 l 的方程为 $y=kx+m(k\neq 0)$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

由点 A 关于 y 轴的对称点在直线 PB 上,得斜率 k_{AP} 与 k_{BP} 互为相反数,

又 $k_{AP}=\dfrac{y_1-\sqrt{2}}{x_1}$, $k_{BP}=\dfrac{y_2-\sqrt{2}}{x_2}$,

即 $\dfrac{y_1-\sqrt{2}}{x_1}+\dfrac{y_2-\sqrt{2}}{x_2}=0$,化简整理得 $x_2(y_1-\sqrt{2})+x_1(y_2-\sqrt{2})=0$,

又 $y_1=kx_1+m$, $y_2=kx_2+m$,于是得 $2kx_1x_2+(m-\sqrt{2})(x_1+x_2)=0$,　　(8 分)

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+3y^2=3,\end{cases}$ 消去 y 得 $(3k^2+1)x^2+6kmx+$

$3m^2-3=0$,

$\Delta>0\Rightarrow m^2<3k^2+1$,

则 $x_1+x_2=-\frac{6km}{3k^2+1}, x_1x_2=\frac{3m^2-3}{3k^2+1}$, (10 分)

从而有 $2k\cdot\frac{3m^2-3}{3k^2+1}+(m-\sqrt{2})\cdot\left(-\frac{6mk}{3k^2+1}\right)=0$,

即 $2k\cdot(3m^2-3)-6mk(m-\sqrt{2})=0$,

解得 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$,此时直线 l 的方程为 $y=kx+\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以直线 l 恒过定点 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. (12 分)

22. 解:(1) $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax(x>0)$, (1 分)

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=5x-5$,

所以 $\begin{cases}f'(1)=5,\\ f(1)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1+2a=5,\\ a+b=0,\end{cases}$ (3 分)

解得 $a=2,b=-2$. (4 分)

(2)由(1) $f(x)=\ln x+2x^2-2$,

设 $g(x)=f(x)-x=\ln x+2x^2-2-x(x>0)$,

则 $g'(x)=\frac{1}{x}+4x-1\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot 4x}-1=3>0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数, (6 分)

由已知 $g(x_1)+g(x_2)\geqslant 0$,不妨设 $x_1\leqslant x_2$,

①若 $x_1>\frac{1}{2}$,则 $x_1+x_2>1$,命题得证; (7 分)

②若 $0<x_1\leqslant\frac{1}{2}$,令 $F(x)=g(x)+g(1-x)\left(0<x\leqslant\frac{1}{2}\right)$,

$F'(x)=\frac{1}{x}+4x-1-\frac{1}{1-x}+4x-3=\frac{(1-2x)^3}{x(1-x)}$,

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 时,$1-2x\geqslant 0$,$1-x>0$,因此

$F'(x)\geqslant 0$,$F(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上是增函数, (9 分)

$\therefore F(x)\leqslant F\left(\frac{1}{2}\right)=-2\ln 2-4<0$,即 $g(x)+g(1-x)<0$,即 $g(x_1)<-g(1-x_1)$,

又因为 $g(x_1)\geqslant -g(x_2)$,

所以 $-g(x_2)\leqslant g(x_1)<-g(1-x_1)$,故 $g(1-x_1)<g(x_2)$, (11 分)

因为 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,

所以 $1-x_1<x_2$,因此 $x_1+x_2>1$,

综上所述,$x_1+x_2>1$ 得证. (12 分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。