

一、选择题：（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 已知椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍，则椭圆的离心率等于

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 倾斜角为 135° ，在 y 轴上的截距为 -1 的直线方程是

- A. $3x+2y-1=1$ B. $x-y-1=0$ C. $x+y-1=0$ D. $x+y+1=0$

3. 直线 l 过点 $(-1,2)$ 且与直线 $2x-3y+4=0$ 垂直，则 l 的方程是

- A. $3x+2y-1=0$ B. $3x+2y+7=0$ C. $2x-3y+5=0$ D. $2x-3y+8=0$

4. 设 m 是不为零的实数，且“ $m>0$ ”是“方程 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{m}=1$ 表示双曲线”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点为 F_1, F_2 , M 是椭圆上一点，且 $|MF_1|-|MF_2|=1$ ，则 $\triangle MF_1F_2$ 是

- A. 钝角三角形 B. 直角三角形 C. 锐角三角形 D. 等边三角形

6. 已知点 F_1, F_2 是椭圆 $x^2+2y^2=2$ 的两个焦点，点 P 是该椭圆上的一个动点，那么 $|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|$ 的最小值是

- A. 0 B. 1 C. 2 D. $2\sqrt{2}$

7. 已知直线 $x-y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交于 A, B 两点，且 $\triangle OAB$ 为正三角形，则实数 m 的值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=1$, D 是 AC 边的中点，则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD}$ 的取值范围是

- A. $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ B. $(-\infty, \frac{1}{4})$ C. $(-\frac{3}{4}, +\infty)$ D. $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

二、填空题：（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的渐近线方程为_____.

10. 已知圆 C 的圆心在直线 $x-y=0$ 上，过点 $(2,2)$ 且与直线 $x+y=0$ 相切，则圆 C 的方程是_____.

11. 已知 l 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的一条渐近线，其倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ ，且 C 的右焦点为 $(2,0)$ ，则 C 的右顶点为_____； C 的方程为_____.

12. 已知圆的方程为 $x^2+y^2+2x-8y+8=0$ ，过点 $P(1,0)$ 作该圆的一条切线，切点为 A ，那么线段 PA 的长度为_____.

13. 若圆 $O_1: x^2+y^2=5$ 与圆 $O_2: (x-m)^2+y^2=20(m \in \mathbb{R})$ 相交于 A, B 两点，且两圆在点 A 处的切线互相垂直，则线段 AB 的长度是_____.

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点. 若 $\overrightarrow{F_1A} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{F_1B} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 0$, 则双曲线 C 的离心率为_____.

三、解答题: (共 6 小题, 17、19 题每题 14 分, 其余每题 13 分, 共 80 分)

15. (本小题满分 13 分) 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2\cos^2 x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 图像的相邻两条对称轴的距离;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上的最大值与最小值, 以及此时 x 的取值.

16. (本小题满分 13 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2 + c^2 = b^2 + ac$.

(1) 求 $\cos B$ 的值;

(2) 若 $\cos A = \frac{1}{7}, a = 8$, 求 b 以及 $S_{\triangle ABC}$ 的值.

17. (本小题满分 14 分) 已知 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长 $2\sqrt{3}$, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 圆 $O: x^2 + y^2 = b^2$.

(1) 求椭圆 C 和圆 O 的方程;

(2) 过椭圆左焦点的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, $|AB| = \frac{16}{5}$, 若直线 l 于圆 O 交于 M, N 两点, 求直线 l 的方程及 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OMN$ 的面积之比.

18. (本小题满分 13 分) 已知函数 $f(x) = (ax + a)e^x$ (其中 $e = 2.71828 \dots$), $g(x) = x^2 + bx + 2$, 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处有相同的切线.

(1) 求函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-3, 3]$ 上的最大值和最小值;

(3) 判断函数 $F(x) = 2f(x) - g(x) + 2$ 的零点个数, 并说明理由.

19. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点到短轴的端点的距离为 $\sqrt{5}$, 离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $(1, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 过点 B 作平行于 x 轴的直线 BN , 交直线

$x = 5$ 于点 N , 求证: 直线 AN 恒过定点.

20. (本小题满分 13 分) 已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的无穷数列, 对每一个正整数 n , 该数列前 n 项的最大值记为 A_n , 第 n 项之后各项 a_{n+1}, a_{n+2}, \dots 的最小值记为 B_n , 记 $d_n = A_n - B_n$.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} 5-n, & 1 \leq n \leq 4 \\ 1, & n \geq 5 \end{cases}$, 求数列 $\{d_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: “数列 $\{a_n\}$ 单调递增” 是 “ $\forall n \in N^*, d_n < 0$ ” 的充要条件;

(3) 若 $d_n = a_n$ 对任意 $n \in N^*$ 恒成立, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 0$.

