2023 北京大兴高二（下）期末

数　　学

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）设 $f(x)=(x+1)^2$，则 $f'(1)=$

（A）2　　（B）4

（C）6　　（D）8

（2）$(a+b)^4$ 的展开式中二项式系数的最大值为

（A）1　　（B）4

（C）6　　（D）12

（3）设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，则 $P(X\leqslant 0)=$

（A）$\frac{2}{3}$　　（B）$\frac{1}{4}$

（C）$\frac{1}{3}$　　（D）$\frac{1}{2}$

（4）从 7 本不同的书中选 3 本送给 3 个人，每人 1 本，不同方法的种数是

（A）C_7^3　　（B）A_7^3

（C）3^7　　（D）7^3

（5）根据分类变量 x 与 y 的成对样本数据，计算得到 $\chi^2=7.52$．已知 $P(\chi^2\geqslant 6.635)=0.01$，则依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的 χ^2 独立性检验，可以推断变量 x 与 y

（A）独立，此推断犯错误的概率是 0.01

（B）不独立，此推断犯错误的概率是 0.01

（C）独立，此推断犯错误的概率不超过 0.01

（D）不独立，此推断犯错误的概率不超过 0.01

（6）两批同种规格的产品，第一批占 40%，次品率为 5%；第二批占 60%，次品率为 4%．将两批产品混合，从混合产品中任取 1 件，则这件产品不是次品的概率

（A）0.956　　（B）0.966

（C）0.044　　（D）0.036

（7）设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，则“$a^2>3b$”是“$f(x)$ 有 3 个零点”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）根据如下样本数据：

x	3	4	5	6	7	8
y	4.0	2.5	–0.5	0.5	–2.0	–3.0

由最小二乘法得到经验回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，则

（A） $\hat{a}<0,\hat{b}<0$　　（B） $\hat{a}>0,\hat{b}>0$

（C） $\hat{a}>0,\hat{b}<0$　　（D） $\hat{a}<0,\hat{b}>0$

（9）设 $a=13^{15},b=14^{14}$， $c=15^{13}$ ，则 a,b,c 的大小关系是

（A） $c<a<b$　　（B） $b<c<a$

（C） $a<c<b$　　（D） $c<b<a$

（10）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}+3x$ 有大于零的极值点，则实数 a 的取值范围是

（A） $a>\frac{1}{3}$　　（B） $a<-\frac{1}{3}$

（C） $a>3$　　（D） $a<-3$

第二部分 （非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{x}$ 的最小值为______.

（12）用数字 $1,2$ 可以组成的四位数的个数是___.

（13）若 $P(A)=0.6$， $P(B)=0.3$， $P(B|A)=0.2$，则 $P(AB)=$______； $P(A\cup B)=$______.

（14）已知随机变量 X_1 和 X_2 的分布列分别是

X_1	0	1
P	$1-p_1$	p_1

X_2	0	1
P	$1-p_2$	p_2

能说明 $D(X_1)\leqslant D(X_2)$ 不成立的一组 p_1,p_2 的值可以是 $p_1=$______； $p_2=$______.

（15）已知函数 $f(x)=\ln x$，且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

① $x_0=$______；

②令 $g(x)=\begin{cases} f(x),0<x\leqslant a, \\ \frac{a}{x},x>a. \end{cases}$ 若函数 $g(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{a}{\mathrm{e}}$ 有且只有一个公共点，则实数 a 的取值范围是___.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

已知 $(x+2)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.

（Ⅰ）求 $a_4+a_2+a_0$ 的值；

（Ⅱ）求 $(x-1)(x+2)^4$ 的展开式中含 x^4 项的系数.

（17）（本小题 14 分）

在 5 道试题中有 3 道代数题和 2 道几何题，每次从中不放回地随机抽出 1 道题.

（Ⅰ）求第 1 次抽到代数题且第 2 次也抽到代数题的概率；

（Ⅱ）求在第 1 次抽到代数题的条件下，第 2 次抽到代数题的概率；

（Ⅲ）判断事件“第 1 次抽到代数题”与“第 2 次抽到代数题”是否互相独立.

（18）（本小题 14 分）

已知 6 件产品中有 4 件合格品和 2 件次品，现从这 6 件产品中分别采用有放回和不放回的方式随机抽取 2 件，设采用有放回的方式抽取的 2 件产品中合格品数为 X，采用无放回的方式抽取的 2 件产品中合格品数为 Y.

（Ⅰ）求 $P(X\leqslant 1)$；

（Ⅱ）求 Y 的分布列及数学期望 $E(Y)$；

（Ⅲ）比较数学期望 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 的大小.

（19）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-a\ln x, a>0$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若对任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)>0$，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）直接写出一个 a 值使 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

（20）（本小题 14 分）

现有10 人要通过化验来确定是否患有某种疾病，化验结果阳性视为患有该疾病．化验方案 A：先将这10 人化验样本混在一起化验一次，若呈阳性，则还要对每个人再做一次化验；否则化验结束．已知这10 人未患该疾病的概率均为 p，是否患有该疾病相互独立．

（Ⅰ）按照方案 A 化验，求这10 人的总化验次数 X 的分布列；

（Ⅱ）化验方案 B：先将这10 人随机分成两组，每组5 人，将每组的5 人的样本混在一起化验一次，若呈阳性，则还需要对这5 人再各做一次化验；否则化验结束．若每种方案每次化验的费用都相同，且 $p^5=0.5$，问方案 A 和 B 中哪个化验总费用的数学期望更小？

（21）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $g(x)=xf'(x)-f(x)$，讨论函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性；

（Ⅲ）对任意的 $s,t\in(1,+\infty)$，且 $s<t$，判断 $s\,f(\frac{1}{s})$ 与 $t\,f(\frac{1}{t})$ 的大小关系，并证明结论．

大兴区 2022~2023 学年度第二学期期末检测

高二数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	D	B	D	A	B	C	D	D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$-\frac{1}{e}$　　（12）16　　（13）0.12 ；0.78

（14）0.3，0.2（答案不唯一）　　（15）e；$(0,e]$

注：第（13）（15）题第一空 3 分，第二空 2 分。

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 14 分）

解：（Ⅰ）令 $x=1$ 得 $3^4=a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$．① ………1 分

令 $x=-1$ 得 $1=a_4-a_3+a_2-a_1+a_0$．② ………1分

①+②得 $3^4+1=2(a_4+a_2+a_0)$．………2分

即 $a_4+a_2+a_0=\frac{3^4+1}{2}$ ………2分

$=41$．………1分

（Ⅱ）由二项式定理知 $a_3=2C_4^1=8$，………2分

$a_4=C_4^0=1$．………2分

所以 $(x-1)(x+2)^4$ 的展开式中含 x^4 项的系数

$a_3-a_4=7$ ．………3分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）设 $A=$ “第1次抽到代数题”，$B=$ “第 2 次抽到代数题”.

第1次抽到代数题且第 2 次也抽到代数题的概率

$P(AB)=\frac{n(AB)}{n(\Omega)}=\frac{3\times2}{5\times4}=\frac{3}{10}$． ………4分

（Ⅱ）在第1次抽到代数题的条件下，第 2 次抽到代数题的概率

$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{3\times2}{3\times4}=\frac{1}{2}$ ． ………5分

（Ⅲ）第1次抽到代数题的概率 $P(A)=\frac{3}{5}$． ………1分

第 2 次抽到代数题的概率 $P(B)=\frac{4\times3}{5\times4}=\frac{3}{5}$． ………1分

所以 $P(A)P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$ ． ………1分

由（Ⅰ）知 $P(AB)=\frac{3}{10}$，

所以 $P(AB)\neq P(A)P(B)$． ………1分

事件“第1次抽到代数题”与“第2次抽到代数题”不是独立事件． …1分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ） 采用有放回的方式，每次抽到正品的概率都是 $\frac{2}{3}$．

所以 $P(X\leqslant 1)=1-P(X=2)=1-(\frac{2}{3})^2=\frac{5}{9}$． ………4分

（Ⅱ）采用无放回的方式，Y 的可能取值为 $0,1,2$． ………1分

$P(Y=0)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$， ………1分

$P(Y=1)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$， ………1分

$P(Y=2)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$． ………1分

Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{3}$

………1分

所以 $E(Y)=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{6}{15}=\frac{4}{3}$． ………2分

（Ⅲ）当采用有放回的方式时，

$X\sim B(2,\frac{2}{3})$． ………1分

则 $E(X)=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$． ………1分

所以 $E(X)=E(Y)$． ………1分

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=\sqrt{x}-\ln x$．

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$． ………1分

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$． ………1分

令 $f'(x)=0$，即 $\sqrt{x}-2=0$，

解得 $x=4$． ………1 分

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的情况如下： ………1分

x	$(0,4)$	4	$(4,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	$f(4)$	单调递增

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(4)=2-\ln 4$． ………2 分

（Ⅱ）当 $a>0$ 时，由题意知，

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{a}{x}=\frac{\sqrt{x}-2a}{2x}.$$ ………1 分

令 $f'(x)=0$，即 $\sqrt{x}-2a=0$，

解得 $x=4a^2$． ………1 分

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的情况如下：

x	$(0,4a^2)$	$4a^2$	$(4a^2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(4a^2)=2a(1-\ln 2a)$． ………2 分

对任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)>0$，

需满足 $f(4a^2)=2a(1-\ln 2a)>0$． ………1 分

又因为 $a>0$，所以需满足 $1-\ln 2a>0$．

所以 $0<a<\frac{\mathrm{e}}{2}$． ………1 分

综上，当 a 的取值范围为 $(0,\frac{\mathrm{e}}{2})$ 时，对任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)>0$．

（Ⅲ）$a=\frac{1}{3}$． ………2 分

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）按照方案 A 化验，这10人的总化验次数 X 的可能取值为$1,11$． ……1 分

$P(X=1)=p^{10}$， ………1分

$P(X=11)=1-p^{10}$． ………1分

X 的分布列为：

X	1	11
P	p^{10}	$1-p^{10}$

………1 分

（Ⅱ）设按照方案 B 化验，这10人的总化验次数为 Y，

Y 的可能取值为 $2,7,12$． ………1 分

$P(Y=2)=p^{10}$， ………1 分

$P(Y=7)=2p^{5}(1-p^{5})$， ………1 分

$P(Y=12)=(1-p^{5})^{2}$． ………1 分

$E(Y)=2p^{10}+7\times 2p^{5}(1-p^{5})+12(1-p^{5})^{2}=12-10p^{5}$． ………2 分

由（Ⅰ）知， $E(X)=p^{10}+11(1-p^{10})=11-10p^{10}$． ………1 分

$E(Y)-E(X)=12-10p^{5}-(11-10p^{10})=10p^{10}-10p^{5}+1$． ………1 分

因为当 $p^{5}=0.5$ 时， $10p^{10}-10p^{5}+1<0$， ………1 分

所以 $E(Y)<E(X)$．

所以方案 B 的化验总费用的数学期望更小． ………1 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ） 由 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+\sin x$，

得 $f'(x)=\mathrm{e}^{x}+\cos x$． ………1 分

因为 $f(0)=1$， ………1 分

$f'(0)=2$． ………1 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=2x+1$． ………1 分

（Ⅱ） 由 $g(x)=xf'(x)-f(x)$ 知，

$g(x)=x\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}+x\cos x-\sin x$． ………1 分

所以 $g'(x)=x(\mathrm{e}^{x}-\sin x)$． ………1 分

因为当 $x>0$ 时， $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$， $\mathrm{e}^{x}>1$， ………1 分

所以 $g'(x)=x(\mathrm{e}^{x}-\sin x)>0$． ………1 分

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增． ………1 分

（Ⅲ）令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$， $x\in(0,1)$． ………1 分

所以 $h'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^{2}}=\dfrac{g(x)}{x^{2}}$． ………1 分

因为 $g(1)=\cos 1-\sin 1<0$，

且由（Ⅱ）知， $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $0<x<1$ 时， $g(x)<0$． ………1 分

故当 $x\in(0,1)$ 时， $h'(x)=\dfrac{g(x)}{x^{2}}<0$．

所以 $h(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减． ………1 分

因为 $s,t\in(1,+\infty)$， $s<t$，

所以$\frac{1}{s},\frac{1}{t}\in(0,1)$，且$\frac{1}{s}>\frac{1}{t}$.

所以$h(\frac{1}{s})<h(\frac{1}{t})$. ………1分

即$\dfrac{f(\frac{1}{s})}{\frac{1}{s}}<\dfrac{f(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}}$.

所以$sf(\frac{1}{s})<tf(\frac{1}{t})$. ………1 分