顺义区 2024 届高三第一次统练

数学试卷

考生须知	
	1. 本试卷共 5 页，共两部分，第一部分共 10 道小题，共 40 分，第二部分共 11 道小题，共 110 分，满分 150 分。考试时间 120 分钟。 2. 在答题卡上准确填写学校、姓名、班级和教育 ID 号。 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。 4. 在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

(1) 在复平面内，复数 $\frac{1}{1-i}$ 对应的点位于

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

(2) 已知集合 $A=\{-1,0,2\}$，$B=\{x\,|\,x^2\leqslant 1\}$，则下列结论正确的是

(A) $A=B$　　(B) $A\subseteq B$

(C) $A\cup B=B$　　(D) $A\cap B=\{-1,0\}$

(3) 已知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $x_0>0$，则下列结论中一定成立的是

(A) $f(x_0+1)>f(x_0)$　　(B) $f(x_0+1)<f(x_0)$

(C) $f(x_0-1)>f(x_0)$　　(D) $f(x_0-1)<f(x_0)$

(4) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda+1,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,3)$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线，则实数 $\lambda=$

(A) -2　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

(5) 已知双曲线 $C: y^2-\frac{x^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的离心率 $e<\sqrt{2}$，则 b 的取值范围是

(A) $(0,1)$　　(B) $(1,\sqrt{2})$　　(C) $(1,+\infty)$　　(D) $(\sqrt{2},+\infty)$

(6) 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.若 $a_1=2$，公差 $d=1$，$S_{k+3}-S_k=18$，则 $k=$

(A) 5　　(B) 4　　(C) 3　　(D) 2

(7)已知 $a>0,b>0$,则“$a+b>1$”是“$ab>\frac{1}{4}$”

(A)充分不必要条件 (B)必要不充分条件

(C)充要条件 (D)既不充分也不必要条件

(8)设 $a=\frac{\ln 2}{2},b=\frac{\ln 6}{6},c=\frac{1}{e}$,则

(A)$b<a<c$ (B)$a<b<c$ (C)$b<c<a$ (D)$a<c<b$

(9)地铁某换乘站设有编号为 S_1,S_2,S_3,S_4,S_5 的五个安全出口.若同时开放其中的两个安全出口,疏散 1000 名乘客所需的时间如下:

安全出口编号	S_1,S_2	S_2,S_3	S_3,S_4	S_4,S_5	S_1,S_5
疏散乘客时间(s)	120	220	160	140	200

用 $\mu(S_k)(1\leqslant k\leqslant 5)$ 表示安全出口 S_k 的疏散效率(疏散时间越短,疏散效率越高),给出下列四个说法:① $\mu(S_1)>\mu(S_3)$;② $\mu(S_4)>\mu(S_2)$;③ $\mu(S_5)>\mu(S_3)$;④ $\mu(S_4)<\mu(S_5)$.其中,正确说法的个数有

(A)4 个 (B)3 个 (C)2 个 (D)1 个

(10)《九章算术》中将底面为矩形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称为“阳马”.现有一“阳马”$P-ABCD$,$PA\perp$平面 $ABCD$,$PA=AB=AD=2$,M 为底面 $ABCD$ 及其内部的一个动点且满足 $|PM|=\sqrt{5}$,则$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{BM}$的取值范围是

(A) $[1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}]$ (B) $[-1,1+2\sqrt{2}]$

(C) $[-1-\sqrt{2},-1]$ (D) $[1-2\sqrt{2},-1]$

第二部分(非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 道小题,每题 5 分,共 25 分,把答案填在答题卡上.

(11)在$(x-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中,x 的系数为________.(用数字作答)

(12)已知 $f(x)$是奇函数,当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=2^x-1$,则 $f(1)=$ ________.

(13) 在 $\triangle ABC$ 中，$\tan B=\tan C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$b=1$，则 $\tan(B+C)=$ ________；$a=$ ________.

(14) 已知 $f(x)=\sin\omega x$，若存在 $x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，使 $f(x_0)=-1$，则正整数 ω 的一个取值是________.

(15) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$，给出下列四个结论：

① 若 $a_1=\sqrt{2}$，则数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项等于 $\sqrt{2}$；

② 若 $a_1<-\sqrt{2}$，则对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_{n+1}>a_n$；

③ 若 $a_1>0$，则存在 $n_0\in\mathbf{N}^*$，当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $a_n-\sqrt{2}\leqslant\frac{1}{2024}$；

④ 若 $a_1>\sqrt{2}$，则对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_{n+1}-\sqrt{2}\geqslant\frac{1}{2}(a_n-\sqrt{2})$；

其中，所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 道题，共 85 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(16)（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间；

（Ⅱ）设函数 $h(x)=f(x)-2\cos^2 x$，求 $h(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值.

(17)(本小题 13 分)

某学生在上学路上要经过三个路口，在各个路口遇到红灯的概率及停留的时间如下：

路口	路口一	路口二	路口三
遇到红灯的概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
遇到红灯停留的时间	3 分钟	2 分钟	1 分钟

假设在各路口是否遇到红灯相互独立.

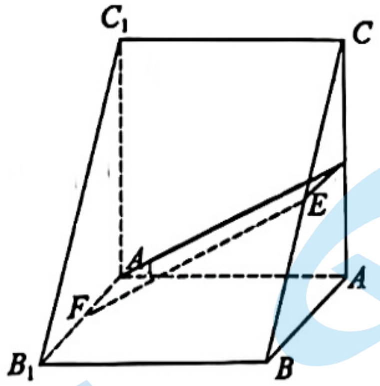
(Ⅰ)求这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯的概率；

(Ⅱ)求这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间大于 3 分钟的概率；

(Ⅲ)假设交管部门根据实际路况，5 月 1 日之后将上述三个路口遇到红灯停留的时间都变为 2 分钟.估计 5 月 1 日之后这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间的变化情况，是“增加，不变还是减少”.(结论不要求证明)

(18)(本小题 14 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E,F 分别为 BC,A_1B_1 的中点，$A_1B_1=A_1C_1=A_1A=2$.



(Ⅰ)求证：$EF//$平面 AA_1C_1C；

(Ⅱ)若 $A_1A\perp A_1B_1$，平面 $AA_1C_1C\perp$平面 A_1B_1BA，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，求 EF 与平面 A_1BC 所成角的正弦值.

条件①：$A_1A\perp A_1C_1$；条件②：$A_1A\perp B_1C_1$；条件③：$AB\perp AC$.

注：如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答记分.

(19)(本小题 15 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$,且 $\sqrt{3}a=2b$.

(Ⅰ)求椭圆 E 的方程;

(Ⅱ)设斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 与 E 交于 A,B 两点(异于点 P),直线 PA,PB 分别与 y 轴交于点 M,N,求 $\frac{|PM|}{|PN|}$ 的值.

(20)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=\frac{m}{(x-1)^2}+\ln(x-1)$,其中 $m\in R$.

(Ⅰ)当 $m=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程;

(Ⅱ)若 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上存在极值,求实数 m 的取值范围;

(Ⅲ)写出 $f(x)$ 的零点个数.(直接写出结论即可)

(21)(本小题 15 分)

给定正整数 $n\geqslant 3$,设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.若对任意 $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$,a_i+a_j,a_i-a_j 两数中至少有一个属于 A,则称集合 A 具有性质 P.

(Ⅰ)分别判断集合 $\{1,2,3\}$ 与 $\{-1,0,1,2\}$ 是否具有性质 P;

(Ⅱ)若集合 $A=\{1,a,b\}$ 具有性质 P,求 $a+b$ 的值;

(Ⅲ)若具有性质 P 的集合 B 中包含 6 个元素,且 $1\in B$,求集合 B.

顺义区 2024 届高三第一次统数学试卷参考答案

一、选择题　ADBCA　CBABD

二、填空题

（11）10　　（12）$\frac{1}{2}$　　（13）$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$　　（对一空三分）

（14）$\omega \geq 3$ 的整数即可

（15）①②③（有错不得分，对 1 个二分，对 2 个三分）

三、解答题

（16）（本小题 13 分）

（I）因为 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ ——————3 分

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2x+\frac{\pi}{6}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{6}$

所以单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in Z)$ ——————6 分

（II）$h(x)=f(x)-2\cos^2 x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-2\cos^2 x$

$=\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}-(1+\cos 2x)$ ——————8 分

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x-1-\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-1$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$ ——————10 分

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$

所以，当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 取得最大值为1

此时，$h(x)_{\max}=1-1=0$，此时 $x=\frac{\pi}{3}$ ——————13 分

（17）（本小题 13 分）

（I）设这名学生在上学路上到第 i 个路口时遇到红灯为事件 A_i，$i=1,2,3$

这名学生在上学路上到第三个路口首次遇到红灯为事件 B，　　——————2 分

则 $P(B)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=(1-P(A_1))(1-P(A_2))P(A_3)$　　——————4 分

$$=\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$　　——————6 分

(II) 设这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间大于三分钟为事件 C，

则 $P(C)=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(A_1A_2A_3)$　　——————9 分

$=P(A_1)P(A_2)(1-P(A_3))+P(A_1)(1-P(A_2))P(A_3)+P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

$=\dfrac{1}{6}$　　——————11 分

(III) 增加　　——————13 分

(18)（本小题 14 分）

(I) 取 A_1C_1 中点 G，连结 CG,FG

因为 F,G 为中点，所以 $FG//B_1C_1$ 且 $FG=\dfrac{1}{2}B_1C_1$　　——————2 分

又在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC//B_1C_1$ 且 $BC=B_1C_1$，且 E 为中点

所以 $FG//CE$，且 $FG=CE$　　——————4 分

又 $CG\subset$ 平面 ACC_1A_1，$EF\not\subset$ 平面 ACC_1A_1

所以 $EF//$ 平面 ACC_1A_1　　——————6 分

(II) 只能选择①②

因为平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 A_1B_1BA，平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $A_1B_1BA=A_1A$

$A_1A\perp A_1B_1$，$A_1B_1\subset$ 平面 A_1B_1BA，所以 $A_1B_1\perp$ 平面 AA_1C_1C

又 $A_1C_1\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $A_1B_1\perp A_1C_1$　　——————8 分

选择①：$A_1A\perp A_1C_1$，又 $A_1B_1\perp A_1C_1$，$A_1A\perp A_1B_1$

所以，以 A_1 为原点，以 A_1B_1,A_1A,A_1C_1 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系　　——————10 分

选择②：因为 $A_1A\perp A_1B_1$，又 $A_1A\perp B_1C_1$，$A_1B_1\cap B_1C_1=B_1$

所以 $A_1A\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，又 $A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $A_1A\perp A_1C_1$

又 $A_1B_1\perp A_1C_1$，$A_1A\perp A_1B_1$

所以，以 A_1 为原点，以 A_1B_1,A_1A,A_1C_1 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系——————10 分

选择③因为 $AB//A_1B_1$，$AC//A_1C_1$，所以由 $A_1B_1\perp A_1C_1$ 可以推出 $AB\perp AC$，

此时推不出 $A_1A\perp A_1C_1$，故选择③不能唯一确定三棱柱.

以 A_1 为原点，以 A_1B_1, A_1A, A_1C_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系

则 $A_1(0,0,0)$，$F(1,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,2)$，$E(1,2,1)$

所以，$\overrightarrow{EF}=(0,-2,-1)$，$\overrightarrow{A_1B}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,2)$

设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 是平面 A_1BC 的一个法向量.则 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0$，$\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

则 $\begin{cases}2x+2y=0\\-2x+2z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=1$

所以 $\vec{m}=(1,-1,1)$ ————12 分

设 EF 与平面 A_1BC 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\vec{m}||\overrightarrow{EF}|}\right|=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

所以 EF 与平面 A_1BC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ————14 分

(19)（本小题 15 分）

(I) 因为椭圆过点 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，所以 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{b^2}=1$， ————1 分

又 $\sqrt{3}a=2b$ 所以可解得 $a=2, b=\sqrt{3}$， ————3 分

即椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ————4 分

(II) 法一：猜想 $\dfrac{|PM|}{|PN|}=1$， ————6 分

只需证明 $|PM|=|PN|$，因为 M, N 都在 y 轴上，

即证明 $k_{PM}+k_{PN}=0$，即证 $k_{PA}+k_{PB}=0$ ————8 分

设直线 l 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+m$，因为点 P 不在直线 l 上，所以 $m\neq\dfrac{5}{4}$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1,x_2\neq 1$

联立方程组$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+m \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 y 可得 $x^2+mx+m^2-3=0$

所以 $x_1+x_2=-m$， $x_1\cdot x_2=m^2-3$， $\Delta=12-3m^2>0$ 即 $-2<m<2$

——10 分

所以 $k_{PA}=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}$， 同理 $k_{PB}=\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}$ ——12 分

所以 $k_{PA}+k_{PB}=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=\dfrac{\left(y_1-\frac{3}{2}\right)(x_2-1)+\left(y_2-\frac{3}{2}\right)(x_1-1)}{(x_2-1)(x_1-1)}$

$=\dfrac{\left(\frac{1}{2}x_1+m-\frac{3}{2}\right)(x_2-1)+\left(\frac{1}{2}x_2+m-\frac{3}{2}\right)(x_1-1)}{(x_2-1)(x_1-1)}$ ——13 分

$=\dfrac{x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)-(2m-3)}{(x_2-1)(x_1-1)}$ ——14 分

$=\dfrac{\left(\frac{1}{2}x_1+m-\frac{3}{2}\right)(x_2-1)+\left(\frac{1}{2}x_2+m-\frac{3}{2}\right)(x_1-1)}{(x_2-1)(x_1-1)}$

$=\dfrac{x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)-(2m-3)}{(x_2-1)(x_1-1)}$

代入 $x_1+x_2=-m$， $x_1\cdot x_2=m^2-3$ 可得 $k_{PA}+k_{PB}=0$ 得证. ——15 分

法二：猜想 $\dfrac{|PM|}{|PN|}=1$， ——6 分

只需证明 $|PM|=|PN|$，因为 M,N 都在 y 轴上，所以需证 $y_M+y_N=3$ ——8 分

设直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+m$， 因为点 P 不在直线 l 上，所以 $m\neq\frac{5}{4}$

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$， $x_1,x_2\neq1$

联立方程组$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+m \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 y 可得 $x^2+mx+m^2-3=0$

所以 $x_1+x_2=-m$， $x_1\cdot x_2=m^2-3$， $\Delta=12-3m^2>0$ 即 $-2<m<2$

————10 分

所以 $k_{PA}=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}$，直线 PA 方程为 $y-\frac{3}{2}=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}(x-1)$，

令 $x=0$ 可得 $y_M=\frac{3}{2}-\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}$，同理可得 $y_N=\frac{3}{2}-\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}$ ————12 分

所以，$y_M+y_N=3-\left(\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}\right)$

$$\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\frac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=\frac{\left(y_1-\frac{3}{2}\right)(x_2-1)+\left(y_2-\frac{3}{2}\right)(x_1-1)}{(x_2-1)(x_1-1)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}x_1+m-\frac{3}{2}\right)(x_2-1)+\left(\frac{1}{2}x_2+m-\frac{3}{2}\right)(x_1-1)}{(x_2-1)(x_1-1)}$$ ————13 分

$$=\frac{x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)-(2m-3)}{(x_2-1)(x_1-1)}$$ ————14 分

代入 $x_1+x_2=-m$， $x_1\cdot x_2=m^2-3$ 可得上式$=0$

所以 $y_M+y_N=3$，得证. ————15 分

法三：设直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+m$，因为点 P 不在直线 l 上，所以 $m\neq\frac{5}{4}$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1,x_2\neq1$

联立方程组$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+m \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 y 可得 $x^2+mx+m^2-3=0$

所以 $x_1+x_2=-m$， $x_1\cdot x_2=m^2-3$， $\Delta=12-3m^2>0$ 即 $-2<m<2$

——6 分

所以 $k_{PA}=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}$， 直线 PA 方程为 $y-\dfrac{3}{2}=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}(x-1)$，

令 $x=0$ 可得 $y_M=\dfrac{3}{2}-\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}$，同理可得 $y_N=\dfrac{3}{2}-\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}$ ——8 分

则 $|PM|=\sqrt{\left(\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}\right)^2+1}$， $|PN|=\sqrt{\left(\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}\right)^2+1}$ ——10 分

$$\frac{|PM|}{|PN|}=\sqrt{\frac{\left(\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}\right)^2+1}{\left(\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}\right)^2+1}}=\sqrt{\frac{\left(y_1-\frac{3}{2}\right)^2(x_2-1)^2+(x_1-1)^2(x_2-1)^2}{\left(y_2-\frac{3}{2}\right)^2(x_1-1)^2+(x_1-1)^2(x_2-1)^2}}$$

因为 $y_1=\dfrac{1}{2}x_1+m,y_2=\dfrac{1}{2}x_2+m$， 又 $x_1+x_2=-m$

所以 $y_1=-x_2-\dfrac{1}{2}x_1,y_2=-x_1-\dfrac{1}{2}x_2$， $y_1+y_2=-\dfrac{3}{2}(x_1+x_2)$ ——12 分

所以 $\left(y_1-\dfrac{3}{2}\right)(x_2-1)+\left(y_2-\dfrac{3}{2}\right)(x_1-1)=y_1x_2+y_2x_1+3-(y_1+y_2)-\dfrac{3}{2}(x_1+x_2)$

$=-\left(x_1^2+x_2^2\right)-x_1x_2+3=-(x_1+x_2)^2+x_1x_2+3=-m^2+m^2-3+3=0$

所以 $\left(y_1-\dfrac{3}{2}\right)^2(x_2-1)^2=\left(y_2-\dfrac{3}{2}\right)^2(x_1-1)^2$ 即 $\dfrac{|PM|}{|PN|}=1$ ——15 分

（20）（本小题 15 分）

（I）当 $m=1$ 时， $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\ln(x-1)$，所以 $f(2)=1$ ——2 分

$f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{x-1}$， ——4 分

所以 $f'(2)=-1$

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y-1=-(x-2)$ 即 $x+y-3=0$

——6 分

（II）法一：定义域 $x\in(1,+\infty)$， $f'(x)=\frac{-2m}{(x-1)^3}+\frac{1}{x-1}=\frac{(x-1)^2-2m}{(x-1)^3}$

讨论：(1) 当 $m\le 0$ 时，$(x-1)^2-2m>0$，此时 $f'(x)>0$， $y=f(x)$ 在 $x\in(2,+\infty)$ 上单调递增，此时不存在极值 ——7 分

（2）当 $m>0$ 时，令 $f'(x)>0$ 可解得 $x>1+\sqrt{2m}$， $x<1-\sqrt{2m}$ （舍）

所以 $f(x)$ 在 $(1,1+\sqrt{2m})$ 上单调递减，在 $(1+\sqrt{2m},+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)_{极小值}=f(1+\sqrt{2m})$ ——9 分

令 $1+\sqrt{2m}>2$，解得 $m>\frac{1}{2}$，所以实数 m 的取值范围是 $m\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ ——11 分

法二：定义域 $x\in(1,+\infty)$， $f'(x)=\frac{-2m}{(x-1)^3}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{2m}{(x-1)^2}\right)$

（1）当 $m\le 0$ 时， $-2m>0$，此时 $f'(x)>0$， $y=f(x)$ 在 $x\in(2,+\infty)$ 上单调递增，此时不存在极值 ——7 分

（2）当 $m>0$ 时，令 $g(x)=1-\frac{2m}{(x-1)^2}$，则由题意可知，存在 $x_0\in(2,+\infty)$ 使得 $g(x_0)=0$，

且当 $x_1\in(2,x_0)$， $x_2\in(x_0,+\infty)$ 时有 $f(x_1)f(x_2)<0$ ——9 分

又 $g'(x)=\frac{4m}{(x-1)^3}>0$ 所以 $g(x)=1-\frac{2m}{(x-1)^2}$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

即对任意 $x\in(2,+\infty)$ 有 $g(x)>g(2)=1-2m$， 令 $1-2m<0$ 解得 $m>\frac{1}{2}$

又 $g(1+2\sqrt{m})=\frac{1}{2}>0$，由零点存在性定理可知，存在存在 $x_0\in(2,+\infty)$ 使得 $g(x_0)=0$，

且当 $x<x_0$ 时 $g(x)<0$， $x>x_0$ 时 $g(x)>0$，此时 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上存在极值

综上可知，实数 m 的取值范围是 $m\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ ——11 分

(Ⅲ) 当 $m>\frac{1}{2e}$ 时， $y=f(x)$ 没有零点； ————12 分

当 $m=\frac{1}{2e}$ 或 $m\le 0$ 时， $y=f(x)$ 恰有一个零点； ————14 分

当 $0<m<\frac{1}{2e}$ 时， $y=f(x)$ 有两个零点. ————15 分

(21)（本小题 15 分）

（I）集合 $\{1,2,3\}$ 不满足性质 P， 集合 $\{-1,0,1,2\}$ 满足性质 P ————4 分

（II）若集合 $A=\{1,a,b\}$ 具有性质 P， 记 $\mathrm{m}=\max\{1,a,b\}$， 则 $\mathrm{m}\ge 1$

令 $a_i=a_j=m$， 则 $2m\notin\{1,a,b\}$，从而必有 $0\in\{1,a,b\}$，

不妨设 $a=0$， 则 $A=\{1,0,b\},b\ne 0,b\ne 1$.

令 $a_i=1,a_j=b$， 则 $\{1+b,1-b\}\cap\{1,0,b\}\ne\varnothing$ 且 $\{1+b,b-1\}\cap\{1,0,b\}\ne\varnothing,b\ne 0,b\ne 1$，

以下分类讨论：

1） 当 $1+b\in\{0,1,b\}$ 时，若 $1+b=0\Rightarrow b=-1$，此时 $A=\{1,0,-1\}$ 满足性质 P；

若 $1+b=1\Rightarrow b=0$，舍；若 $1+b=b$，无解；

2）当 $1+b\notin\{0,1,b\}$ 时，则 $\{1-b,b-1\}\subseteq\{0,1,b\}$，注意到 $b\ne 0,b\ne 1$，可知 b 无解；

经检验 $A=\{1,0,-1\}$ 符合题意，综上 $a+b=-1$； ————10 分

（III）首先（根据极端原理）容易知道集合 B 中有 0，有正数也有负数；

不妨 $B=\{-b_k,-b_{k-1},\cdots,-b_1,0,a_1,\cdots,a_l\}$，其中 $k+l=5,0<a_1<\cdots<a_l,0<b_1<\cdots<b_k$

根据题意，$\{a_1-a_l,\cdots,a_{l-1}-a_l\}\subseteq\{-b_k,-b_{k-1},\cdots,-b_1\}$，

且 $\{b_k-b_1,b_{k-1}-b_1,\cdots,b_2-b_1\}\subseteq\{a_1,\cdots,a_l\}$， 从而 $(k,l)=(2,3)$ 或 $(3,2)$.

1) 当 $(k,l)=(3,2)$ 时， $\{b_3-b_1,b_3-b_2\}=\{a_1,a_2\}$，

并且 $\{-b_3+b_1,-b_3+b_2\}=\{-b_1,-b_2\}\Rightarrow b_3=b_1+b_2$， $a_2-a_1\in\{a_1,a_2\}\Rightarrow a_2=2a_1$.

由上可得 $(b_2,b_1)=(b_3-b_1,b_3-b_2)=(a_2,a_1)=(2a_1,a_1)$ 并且 $b_3=b_1+b_2=3a_1$，

综上可知 $B=\{-3a_1,-2a_1,-a_1,0,a_1,2a_1\}$；

2） 当 $(k,l)=(2,3)$ 时, 同理可得 $B=\{-2a_1,-a_1,0,a_1,2a_1,3a_1\}$；

据此，当 B 中包含 6 个元素，且 $1\in B$ 时符合条件的集合 B 有 5 个，分别是：

$\{-2,-1,0,1,2,3\}$，$\left\{-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right\}$，$\left\{-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$，$\{-3,-2,-1,0,1,2\}$ 或 $\left\{-\frac{3}{2}-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\right\}$

——————15 分

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2024 年 1 月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！