

机密★启用前

华大新高考联盟 2020 届高三 1 月教学质量测评

文科数学

命题：

本试题卷共 4 页,23 题(含选考题)。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

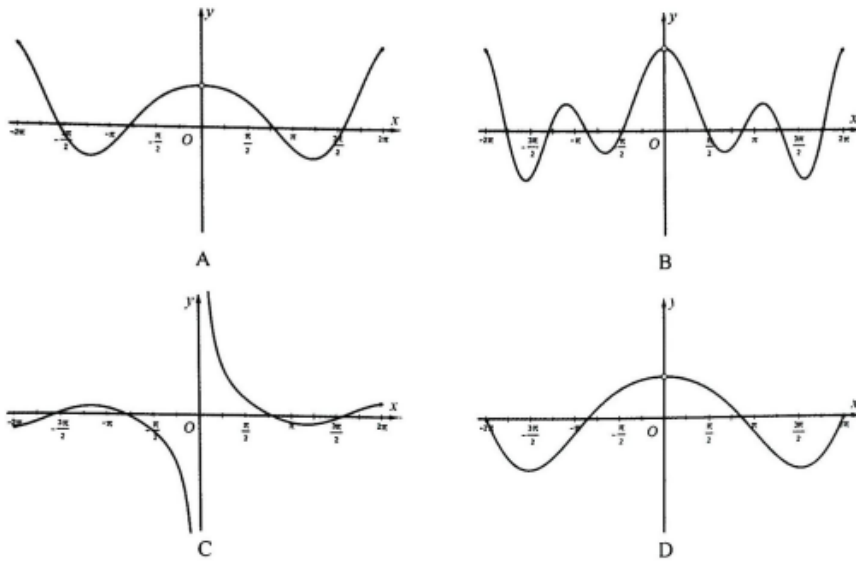
★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上, 并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答: 用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答: 先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后, 请将答题卡上交。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $z = (2+5i)(3-i)$, 则 $|z| =$
 A. $5\sqrt{29}$ B. $\sqrt{290}$ C. $2\sqrt{70}$ D. $4\sqrt{35}$
2. 已知集合 $U = \{x \in \mathbf{Z} \mid -3 < x < 8\}$, $\complement_U M = \{-2, 1, 3, 4, 7\}$, $N = \{-2, -1, 2, 4, 5, 7\}$, 则 $M \cap N$ 的元素个数为
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
3. 已知 $a = \sqrt[3]{6}$, $b = \log_2 \frac{4}{21}$, $c = \left(\frac{1}{3}\right)^{2.9}$, 则
 A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $c > a > b$
4. 2019 年 10 月 1 日, 为了庆祝中华人民共和国成立 70 周年, 小明、小红、小金三人以国庆为主题各自独立完成一幅十字绣赠送给当地的村委会, 这三幅十字绣分别命名为“鸿福齐天”、“国富民强”、“兴国之路”, 为了弄清“国富民强”这一作品是谁制作的, 村支书对三人进行了问话, 得到回复如下:
 小明说: “鸿福齐天”是我制作的;
 小红说: “国富民强”不是小明制作的, 就是我制作的;
 小金说: “兴国之路”不是我制作的.
 若三人的说法有且仅有一人是正确的, 则“鸿福齐天”的制作者是
 A. 小明 B. 小红 C. 小金 D. 小金或小明
5. 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{x^2 \cos x}{20}$ 在 $[-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi]$ 上的图像大致为



6. 为了解公司 800 名员工对公司食堂组建的需求程度, 将这些员工编号为 1, 2, 3, ..., 800, 对这些员工使用系统抽样的方法等距抽取 100 人征求意见, 有下述三个结论:

- ①若 25 号员工被抽到, 则 105 号员工也会被抽到;
- ②若 32 号员工被抽到, 则 1 到 100 号的员工中被抽取了 10 人;
- ③若 88 号员工未被抽到, 则 10 号员工一定未被抽到.

其中正确的结论个数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. 已知向量 $a = (m, 1)$, $b = (-1, 2)$, 若 $(a - 2b) \perp b$, 则 a 与 b 的夹角的余弦值为

- A. $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$ B. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ C. $-\frac{6\sqrt{13}}{65}$ D. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$

8. 若 $\tan(\alpha + \beta) = 3$, $\tan\beta = 2$, 则 $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{\sin(\pi + \alpha)} =$

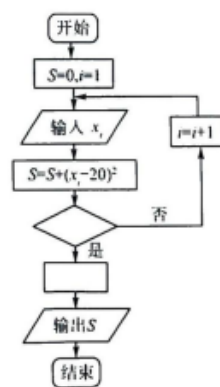
- A. $\frac{1}{7}$ B. 7 C. $-\frac{1}{7}$ D. -7

9. 框图与程序是解决数学问题的重要手段. 实际生活中的一些问题在抽象为数学模型之后, 可以制作框图, 编写程序, 得到解决. 例如, 为了计算一组数据的方差, 设计了如图所示的程序框图, 其中输入 $x_1 = 15, x_2 = 16, x_3 = 18, x_4 = 20, x_5 = 22, x_6 = 24, x_7 = 25$, 则图中空白框中应填入

- A. $i > 6, S = \frac{S}{7}$ B. $i \geq 6, S = \frac{S}{7}$
 C. $i > 6, S = 7S$ D. $i \geq 6, S = 7S$

10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $M(0, m)$. 若线段 F_2M 与双曲线 C 的一条渐近线垂直, 垂足为 N , 且 $\triangle NOF_2$ 的面积是 $\triangle MON$ 的 2 倍, 则双曲线 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$



11. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $\tan C = \sqrt{7}, c = 2a, b = 3\sqrt{2}$ 时,则 $\triangle ABC$ 的面积为
 A. $3\sqrt{7}$ B. $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{7}}{8}$
12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ,点 $P(x_1, y_1), Q(-x_1, -y_1)$ 在椭圆 C 上,其中 $x_1 > 0, y_1 > 0$. 若 $|PQ| = 2|OF_2|, \left| \frac{QF_1}{PF_1} \right| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$,则椭圆 C 的离心率的取值范围为
 A. $(0, \frac{\sqrt{6}-1}{2}]$ B. $(0, \sqrt{6}-2]$ C. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}-1]$ D. $(0, \sqrt{3}-1]$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

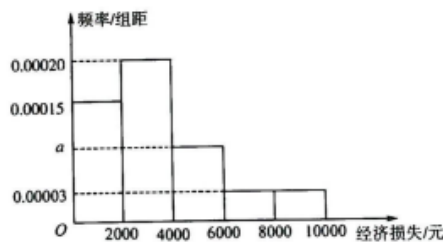
13. 曲线 $y = \frac{x^2+2x}{e^x}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.
14. 设 S_n 为正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $S_2=4, S_4=20$,则 $a_n =$ _____.
15. 函数 $f(x) = \tan 60^\circ \sin 2x + 2\sqrt{3} \sin^2 x$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上的值域为_____.
16. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中的外接球 O 的体积为 $36\pi, PA=3, PA \perp$ 平面 $ABCD$,四边形 $ABCD$ 为矩形,点 M 在球 O 的表面上运动,则四棱锥 $M-ABCD$ 体积的最大值为_____.

三、解答题:共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17. (12分)

由于受到网络电商的冲击,某品牌的洗衣机在线下的销售受到影响,承受了一定的经济损失,现将A地区200家实体店该品牌洗衣机的月经济损失统计如图所示.



- (1)求 a 的值;
 (2)求A地区200家实体店该品牌洗衣机的月经济损失的众数以及中位数;
 (3)不经过计算,直接给出A地区200家实体店经济损失的平均数 \bar{x} 与6000的大小关系.

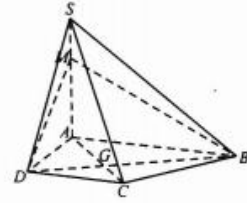
8. (12分)

记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且 $a_{10}=4, S_{15}=30$.

- (1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式以及前 n 项和 S_n ;
 (2)记数列 $\{2^{n+1} + a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,求满足 $T_n > 0$ 的最小正整数 n 的值.

19. (12分)

四棱锥 $S-ABCD$ 如图所示,其中四边形 $ABCD$ 是直角梯形, $AB \perp AD, AD \perp DC, SA \perp$ 平面 $ABCD, DA = DC = \frac{1}{2}AB, AC$ 与 BD 交于点 G , 直线 SC 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 点 M 在线段 SA 上.



- (1)若直线 $SC \parallel$ 平面 MBD , 求 $\frac{SM}{MA}$ 的值;
- (2)若 $DA=1$, 求点 A 到平面 SCD 的距离.

20. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{\pi - \sin x}{x}$.

- (1)判断函数 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上的单调性;
- (2)若 $0 < a < \pi$, 求证: 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x) > a \ln \frac{1}{x}$.

21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 M, N 在椭圆 C 上.

- (1)若线段 MN 的中点坐标为 $(2, \frac{1}{3})$, 求直线 MN 的斜率;
- (2)若 M, N, O 三点共线, 直线 NF_1 与椭圆 C 交于 N, P 两点, 求 $\triangle PMN$ 面积的最大值.

(二)选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta, \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 以原点为极点, x 轴的非

负半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{4}{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}$.

- (1)求曲线 C_1 的极坐标方程以及曲线 C_2 的直角坐标方程;
- (2)若直线 $l: y = kx$ 与曲线 C_1 、曲线 C_2 在第一象限交于 P, Q 两点, 且 $|OP| = 2|OQ|$, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$, 求 $\triangle MPQ$ 的面积.

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10分)

已知 $a > 0, b > 0, c > 0$.

- (1)求证: $a^4 - a^2b^2 + b^4 \geq \frac{ab(a^4 + b^4)}{a^2 + b^2}$;
- (2)若 $abc = 1$, 求证: $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ac$.

