2020 北京丰台高三（上）期中

数　　学

2020.11

注意事项：

1. 答题前，考生务必先将答题卡上的学校、年级、班级、姓名、准考证号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的准考证号、姓名，在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。

2. 本次考试所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。

3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试卷、草稿纸上答题无效。

4. 本试卷共 150 分。考试时间 120 分钟。

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-1,0,1,2\},B=\{x\,|\,x^2\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{-1,0,1\}$　　（B）$\{0,1\}$

（C）$\{-1,1\}$　　（D）$\{0,1,2\}$

（2）若 $z(1-\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，则在复平面内 z 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

（3）已知命题 $p:\forall x\in(0,+\infty),\ln x\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$，则 $\neg p$ 为

（A）$\exists x_0\in(0,+\infty),\ln x_0<1-\dfrac{1}{x_0}$　　（B）$\forall x\in(0,+\infty),\ln x<1-\dfrac{1}{x}$

（C） $\exists x_0 \in (0,+\infty), \ln x_0 \geqslant 1-\frac{1}{x_0}$

（D） $\forall x \notin (0,+\infty), \ln x \geqslant 1-\frac{1}{x}$

（4）下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

（A） $y=x^3$

（B） $y=\ln|x|$

（C） $y=2^{-x}$

（D） $y=x^2-2x$

（5）已知 $a=\ln 3$， $b=\log_{0.3}2$， $c=0.3^{0.2}$，则 a,b,c 的大小关系为

（A） $a<c<b$

（B） $a<b<c$

（C） $b<c<a$

（D） $c<a<b$

（6）在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，终边与单位圆交于点 $(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3})$，则 $\cos(\pi+\alpha)=$

（A） $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

（B） $\frac{\sqrt{3}}{3}$

（C） $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

（D） $\frac{\sqrt{6}}{3}$

（7）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增．若 $f(1)=1$，则不等式 $-1<f(x-1)<1$ 的解集为

（A） $(-1,1)$

（B） $(-2,2)$

（C） $(0,1)$

（D） $(0,2)$

（8）已知函数 $f(x)=\sin x$ 和直线 $l: y=x+a$，那么“$a=0$”是“直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切”的

（A）充分不必要条件

（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件

（D）既不充分也不必要条件

（9）先将函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，若方程 $f(x)=g(x)$ 有实根，则 ω 的值可以为

（A） $\frac{1}{2}$

（B） 1

（C） 2

（D） 4

（10）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, x>0,\\ -x, x<0.\end{cases}$ 若 $y=f(x)$ 的图象上存在两个点 A,B 关于原点对称，则实数 a 的取值范围是

（A）$[-1,+\infty)$　　（B）$(-1,+\infty)$

（C）$[1,+\infty)$　　（D）$(1,+\infty)$

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

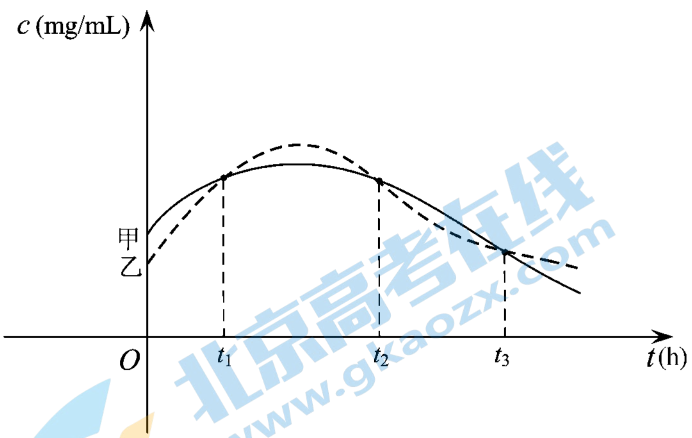
（11）已知函数 $f(x)=\log_2(x+a)$，若 $f(2)=2$，则 $a=$________.

（12）函数 $y=x+\dfrac{4}{x-1}(x>1)$ 的最小值为_______.

（13）$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．已知 $a=3c, b=\sqrt{2}, \cos B=\dfrac{2}{3}$，那么边 c 的长为_____.

（14）已知 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 这 n 个数中最大的数．能够说明“对任意 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，都有 $\max\{a,b\}+\max\{c,d\}\geqslant\max\{a,b,c,d\}$”是假命题的一组整数 a,b,c,d 的值依次可以为_____.

（15）为了评估某种治疗肺炎药物的疗效，现有关部门对该药物在人体血管中的药物浓度进行测量．设该药物在人体血管中药物浓度 c 与时间 t 的关系为 $c=f(t)$，甲、乙两人服用该药物后，血管中药物浓度随时间 t 变化的关系如下图所示．



给出下列四个结论：

①在 t_1 时刻，甲、乙两人血管中的药物浓度相同；

②在 t_2 时刻，甲、乙两人血管中药物浓度的瞬时变化率相同；

③在 $[t_2,t_3]$ 这个时间段内，甲、乙两人血管中药物浓度的平均变化率相同；

④在 $[t_1,t_2],[t_2,t_3]$ 两个时间段内，甲血管中药物浓度的平均变化率不相同.

其中所有正确结论的序号是______.

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求.全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

（16）（本小题 13 分）

设全集为 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x^2-2x-3<0\},B=\{x\,|\,x\geqslant a\}$.

（I）当 $a=1$ 时，求 $A\cap B$，$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)$；

（II）若 $A\cap B=A$，求实数 a 的取值范围.

（17）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 x_0 处取得极小值 $-\dfrac{3}{2}$，其导函数为 $f'(x)$. 当 x 变化时，$f'(x)$ 变化情况如下表：

x	$(-\infty,-\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+

（I）求 x_0 的值；

（II）求 a,b,c 的值.

（18）（本小题 14 分）

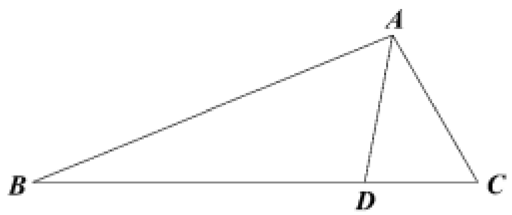
已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x+1$.

（I）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（II）若对任意 $x\in[\frac{\pi}{6},m]$，都有 $f(x)\geqslant f(\frac{\pi}{6})$，求 m 的最大值.

（19）（本小题 15 分）

如图，在△ABC 中，D 是 BC 上的点，$AB=3\sqrt{3},BD=4,C=\frac{\pi}{3}$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：



（I）角 B 的大小；

（II）△ACD 的面积.

条件①：$AD=\sqrt{7}$；条件②：$AC=3$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

（20）（本小题 15 分）

国家发展改革委、住房城乡建设部于 2017 年发布了《生活垃圾分类制度实施方案》，规定 46 个城市在 2020 年底实施生活垃圾强制分类，垃圾回收、利用率要达 35%以上．截至 2019 年底，这 46 个重点城市生活垃圾分类的居民小区覆盖率已经接近 70%．

某企业积极响应国家垃圾分类号召，在科研部门的支持下进行技术创新，新上一种把厨余垃圾加工处理为可重新利用的化工产品的项目．已知该企业日加工处理量 x（单位：吨）最少为 70 吨，最多为 100 吨．日加工处理总成本 y（单位：元）与日加工处理量 x 之间的函数关系可近似地表示为 $y=\frac{1}{2}x^2+40x+3200$，且每加工处理 1 吨厨余垃圾得到的化工产品的售价为 100 元．

（I）该企业日加工处理量为多少吨时，日加工处理每吨厨余垃圾的平均成本最低？此时该企业处理 1 吨厨余垃圾处于亏损还是盈利状态？

（II）为了该企业可持续发展，政府决定对该企业进行财政补贴，补贴方式共有两种．

①每日进行定额财政补贴，金额为 2300 元；

②根据日加工处理量进行财政补贴，金额为 $30x$．

如果你是企业的决策者，为了获得最大利润，你会选择哪种补贴方式进行补贴？为什么？

（21）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-a+\frac{a}{x}(a>0)$．

（I）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处与 x 轴相切，求 a 的值；

（II）求函数 $f(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上的零点个数；

（III）若 $\forall x_1,x_2\in(1,\mathrm{e})$，$(x_1-x_2)(|f(x_1)|-|f(x_2)|)>0$，试写出 a 的取值范围.（只需写出结论）

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

2020 北京丰台高三（上）期中数学

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	A	B	C	A	D	A	C	D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11．2 12．5 13．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

14．$-1,-2,1,2$（答案不唯一）15．①③④（全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分）

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本小题 13 分）

解：（I）由题可得 $A=\{x|-1<x<3\},B=\{x|x\geqslant 1\}$，

所以 $A\cap B=\{x|1\leqslant x<3\}$.

因为 $A\cup B=\{x|x>-1\}$，

所以 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x|x\leqslant -1\}$.

（II）因为 $A\cap B=A$，

所以 $A\subseteq B$.

所以 $a\leqslant -1$.

（17）（本小题 13 分）

解：（I）由题意可知，$f'(x)=3x^2+2ax+b$

当 $x\in(-\dfrac{2}{3},1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\dfrac{2}{3},1)$ 上单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

故 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 有极小值，所以 $x_0=1$.

（II）由（I）知 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点，得 $f'(1)=0$，

即 $3+2a+b=0$.①

因为函数 $f(x)$ 的极小值为 $-\frac{3}{2}$，所以 $f(1)=-\frac{3}{2}$，

即 $1+a+b+c=-\frac{3}{2}$，整理得：$a+b+c=-\frac{5}{2}$.②

由题可知 $x=-\frac{2}{3}$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点，所以 $f'(-\frac{2}{3})=0$，

即 $\frac{4}{3}-\frac{4}{3}a+b=0$.③

联立①②③得：$a=-\frac{1}{2}, b=-2, c=0$.

（18）（本小题 14 分）

解：（I）因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x+1$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$

$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x)$

$=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（II）由（I）知 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

令 $t=2x-\frac{\pi}{6}$，

当 $x\in[\frac{\pi}{6}, m]$ 时，$t\in[\frac{\pi}{6}, 2m-\frac{\pi}{6}]$.

若对任意 $x\in[\frac{\pi}{6},m]$，都有 $f(x)\geqslant f(\frac{\pi}{6})$，

即对任意 $t\in[\frac{\pi}{6},2m-\frac{\pi}{6}]$，都有 $\sin t\geqslant\frac{1}{2}$,

所以 $2m-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$.

即 $m\leqslant\frac{\pi}{2}$,

所以 m 的最大值为 $\frac{\pi}{2}$.

（19）（本小题 15 分）

选择条件①:

解：（I）在△ ABD 中 $AB=3\sqrt{3},BD=4,AD=\sqrt{7}$，

由余弦定理，得

$$\cos B=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}$$

$$=\frac{(3\sqrt{3})^2+4^2-\sqrt{7}^2}{2\times3\sqrt{3}\times4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因为 $0<B<\pi$，

所以 $B=\frac{\pi}{6}$.

（II）由（I）知，$B=\frac{\pi}{6}$，

因为 $C=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$.

所以△ ABC 为直角三角形.

所以 $AC=3$，$BC=6$.

又因为 $BD=4$，

所以 $CD=2$.

所以 $S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin C$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

选择条件②：

解：（I）在△ ABC 中, $AC=3, AB=3\sqrt{3}$， $C=\frac{\pi}{3}$.

由正弦定理 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$,

得 $\sin B=\frac{1}{2}$.

由题可知 $0<B<C=\frac{\pi}{3}$,

所以 $B=\frac{\pi}{6}$.

（II）由（I）知， $B=\frac{\pi}{6}$,

因为 $C=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$.

所以△ ABC 为直角三角形，

得 $BC=6$.

又因为 $BD=4$,

所以 $CD=2$.

所以 $S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin C$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

（20）（本小题 15 分）

解：（I）由题意可知，每吨厨余垃圾平均加工成本为

$\frac{y}{x}=\frac{x}{2}+\frac{3200}{x}+40\ x\in[70,100]$.

$\frac{x}{2}+\frac{3200}{x}+40$

$\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{3200}{x}}+40$

$=2\times 40+40$

$=120$.

当且仅当 $\frac{x}{2}=\frac{3200}{x}$，即 $x=80$ 吨时，每吨厨余垃圾的平均加工成本最低.

此时该企业处理 1 吨厨余垃圾处于亏损状态.

（II）若该企业采用第一种补贴方式，设该企业每日获利为 y_1，由题可得

$y_1=100x-(\frac{1}{2}x^2+40x+3200)+2300$

$=-\frac{1}{2}x^2+60x-900$

$=-\frac{1}{2}(x-60)^2+900$

因为 $x\in[70,100]$,所以当 $x=70$ 吨时，企业最大获利为 850 元.

若该企业采用第二种补贴方式，设该企业每日获利为 y_2，由题可得

$y_2=130x-(\frac{1}{2}x^2+40x+3200)$

$=-\frac{1}{2}x^2+90x-3200$

$=-\frac{1}{2}(x-90)^2+850$

因为 $x\in[70,100]$,所以当吨 $x=90$ 吨时,企业最大获利为 850 元.

结论：选择方案一，因为日加工处理量处理量为 70 吨时，可以获得最大利润；选择方案二，日加工处理量处理量为 90 吨时，获得最大利润，能够为社会做出更大贡献；由于最大利润相同，所以选择两种方案均可.

（21）（本小题 15 分）

解：（I） $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$，

因为 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处与 x 轴相切，

所以 $f'(1)=0$，

即 $1-a=0$，

所以 $a=1$.

经检验 $a=1$ 符合题意.

（II）由（I）知 $f'(x)=\frac{x-a}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=a$.

（i）当 $0<a\leqslant1$ 时，$x\in(1,\mathrm{e})$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递增，所以 $f(x)>f(1)=0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上无零点.

（ii）当 $1<a<\mathrm{e}$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(1,a)$ 上单调递减，在区间 (a,e) 上单调递增，

且 $f(1)=0, f(\mathrm{e})=1-a+\frac{a}{\mathrm{e}}$.

当 $f(\mathrm{e})=1-a+\frac{a}{\mathrm{e}}>0$，即 $1<a<\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上有一个零点.

当 $f(\mathrm{e})=1-a+\frac{a}{\mathrm{e}}\leqslant0$，即 $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\leqslant a<\mathrm{e}$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上无零点.

（iii）当 $a\geqslant\mathrm{e}$ 时，$x\in(1,\mathrm{e})$，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递减，

所以 $f(x)<f(1)=0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上无零点.

综上：当 $0<a\leqslant1$ 或 $a\geqslant\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上无零点；

当$1<a<\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$时，函数$f(x)$在区间$(1,\mathrm{e})$上有一个零点.

（III）$0<a\leqslant 1$或$a\geqslant \mathrm{e}$.