

2021 北京北师大附实验高二（下）期中

数 学

一卷

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{5}, 2\sqrt{2}, \sqrt{11} \dots$ 的一个通项公式为（ ）

- A. $\sqrt{3n-3}$ B. $\sqrt{3n-1}$ C. $\sqrt{3n+1}$ D. $\sqrt{3n+3}$

2. 函数 $f(x) = \sin x + \cos x$ 的导数为（ ）

- A. 0 B. $\cos x + \sin x$ C. $\cos x - \sin x$ D. $-\sin x$

3. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$, 则 a_{2021} 等于（ ）

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 3

4. 函数 $y = x - \ln x$ 的单调递增区间是（ ）

- A. (0, 1) B. (0, 2) C. (0, +∞) D. (1, +∞)

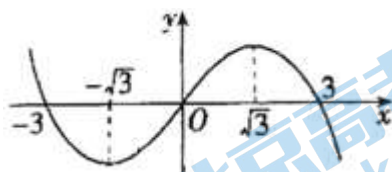
5. 用数学归纳法证明 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n (n \in N^*, n \geq 2)$ 时，第一步需要验证的不等式是（ ）

- A. $1 + \frac{1}{2} < 2$ B. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2$
C. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 3$ D. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < 3$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n^2 - 9n - 10$, 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若使 S_n 取得最小值, 则 $n =$ （ ）

- A. 5 B. 5 或 6 C. 10 D. 9 或 10

7. 设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 函数 $y = xf'(x)$ 的图像如图所示, 则（ ）



- A. $f(x)$ 的极大值为 $f(\sqrt{3})$, 极小值为 $f(-\sqrt{3})$
B. $f(x)$ 的极大值为 $f(-\sqrt{3})$, 极小值为 $f(\sqrt{3})$
C. $f(x)$ 的极大值为 $f(-3)$, 极小值为 $f(3)$
D. $f(x)$ 的极大值为 $f(3)$, 极小值为 $f(-3)$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - ax, x \in (0, +\infty)$, 当 $0 < x_1 < x_2$ 时, 不等式 $x_1 f(x_1) < x_2 f(x_2)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为

()

- A. $(-\infty, \frac{e}{2})$ B. $(-\infty, \frac{e}{2}]$ C. $(-\infty, e)$ D. $(-\infty, e]$

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 2, a_4 = 4$, 则 $a_6 =$ _____.

10. 已知函数 $y = -x^3 + 3x^2 + m$ 的最大值为 5, 则实数 $m =$ _____.

11. 各项都为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $2a_3 - a_7^2 + 2a_{11} = 0$, 则 $a_5 + a_9 =$ _____.

12. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2$, 则 $a_n =$ _____.

13. 若曲线 $f(x) = (ax-1)e^{x-2}$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线过点 $(3, 3)$, 则实数 $a =$ _____.

14. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{k + a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 实数 k 为常数.

① 数列 $\{a_n\}$ 有可能是常数列;

② $k = 1$ 时, 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为等差数列;

③ 若 $a_3 > a_1$, 则 k 的取值范围是 $(-2, 0)$;

④ $k > 0$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 单调递减.

则以上判断正确的序号是_____. (写出符合条件的所有序号)

三、解答题 (本大题共 3 小题, 共 30 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

15. (本题满分 10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 2$, 且 a_1, a_2, a_5 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 是否存在正整数 n , 使得 $S_n > 60n + 800$? 若存在, 求 n 的最小值; 若不存在, 说明理由.

16. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = 2x^3 + 3ax^2 + 3bx + 1$ 且在 $x = 1$ 及 $x = 2$ 处取得极值.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求函数 $y = f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上的最大值与最小值的差.

17. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2a \ln x - (a+2)x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 是否存在实数 a , 使函数 $g(x) = f(x) + ax + \frac{4}{9}x^3$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增? 若存在, 求出 a 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

四、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

18. 已知函数 $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$, $x \in (0, \pi)$, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为_____.

19. 数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $a_n =$ _____.

20. 已知实数 a, b, c, d 成等比数列, 对于函数 $y = \frac{\ln x}{x}$, 当 $x = b$ 时取到极大值 c , 则 $ad =$ _____.

21. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_2, a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数, 且 a_1, a_2, a_3 中的任何两个数不在下表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行	3	2	10
第二行	6	4	14
第三行	9	8	18

则 $a_n =$ _____.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = 2^n$, $b_n = 3n + 2$, 令 $c_n = a_n \cdot b_n$, 则 $c_1 =$ _____, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____.

23. 记 $f'(x), g'(x)$ 分别为函数 $f(x), g(x)$ 的导函数. 若存在 $x_0 \in \mathbb{R}$, 满足 $f(x_0) = g(x_0)$ 且 $f'(x_0) = g'(x_0)$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个“S 点”.

(1) 以下函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 存在“S 点”的是

① 函数 $f(x) = x$ 与 $g(x) = x^2 + 2x - 2$;

② 函数 $f(x) = x + 1$ 与 $g(x) = e^x$;

③ 函数 $f(x) = \sin x$ 与 $g(x) = \cos x$.

(2) 已知: $m, n \in \mathbb{R}$, 若函数 $f(x) = mx^2 + nx$ 与 $g(x) = \ln x$ 存在“S 点”, 则实数 m 的取值范围为_____.

五、解答题（本大题共 2 小题，共 20 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

24. (本题满分 10 分)

已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_8 = 1$, $S_{16} = 24$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{b_n\}$ 是单调递增的等比数列, 且 $b_1 + b_4 = 9$, $b_2 b_3 = 8$, 求 $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \cdots + (a_n - b_n)$.

25. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = x - \ln(1+x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极小值;

(2) 若对任意的 $x \in [0, +\infty)$, 有 $kx^2 \geq f(x)$ 成立, 求实数 k 的取值范围;

(3) 证明: $\sum_{i=1}^n \frac{2}{2i-1} - \ln(2n+1) < 2 (n \in \mathbb{N}^*)$.

