数学试题参考答案(非官方版)

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题4分，满分40分。

1. D　2. B　3. B　4. A　5. C　6. D　7. C　8. A　9. D　10. B

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。多空题每题6分，单空题每题4分，共36分。

11. $\dfrac{\sqrt{23}}{4}$　　12. $8;-2$　　13. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10};\dfrac{4}{5}$　　14. $\dfrac{37}{28};3+\sqrt{3}$

15. $\dfrac{16}{35};\dfrac{12}{7}$　　16. $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$　　17. $\left[12+2\sqrt{2},16\right]$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。（数海漫游微信公众号）

18．本题主要考查三角函数的基本性质，正弦定理，同时考查运算求解能力。满分14分。

（Ⅰ）由于 $\cos C=\dfrac{3}{5}$，$\sin C>0$，则 $\sin C=\dfrac{4}{5}$.

由正弦定理知 $4\sin A=\sqrt{5}\sin C$，则 $\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

（Ⅱ）由 $\sin C=\dfrac{4}{5}>\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $A<C<\dfrac{\pi}{2}$.

故 $b=a\cos C+c\cos A=\dfrac{3}{5}a+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}c=\dfrac{11}{5}a=11$，则 $a=5$，

ΔABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=22$.

19．本题主要考查空间点、线、面位置关系，直线与平面所成的角等基础知识，同时考查空间想象能力和运算求解能力。满分15分。

（Ⅰ）由于 $CD\perp CB, CD\perp CF$，则 $\angle FCB=60^\circ$，$CD\perp$ 平面 CBF，则 $CD\perp FN$.

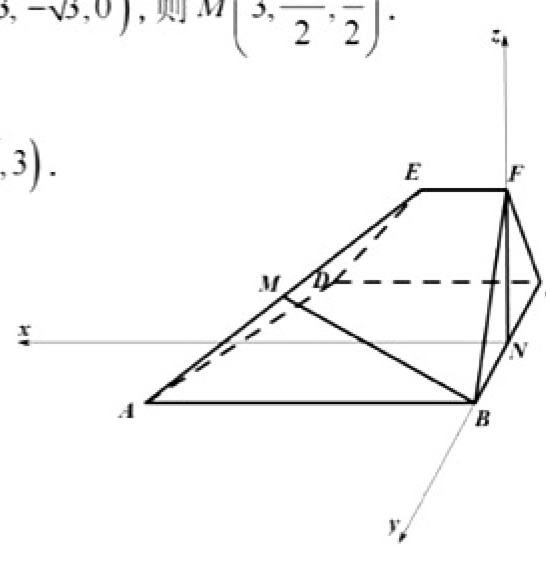
又 $CF=\sqrt{3}(CD-EF)=2\sqrt{3}$，$CB=\sqrt{3}(AB-CD)=2\sqrt{3}$，

则 ΔBCF 时等边三角形，则 $CB\perp FN$，

于是 $FN\perp$ 平面 $ABCD$，故 $FN\perp AD$.

（Ⅱ）由于 $FN\perp$ 平面 $ABCD$，如图建系.

于是 $B\left(0,\sqrt{3},0\right), A\left(5,\sqrt{3},0\right), F\left(0,0,3\right), E\left(1,0,3\right), D\left(3,-\sqrt{3},0\right)$，则 $M\left(3,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.



$\overrightarrow{BM}=\left(3,-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{DA}=\left(2,2\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{DE}=\left(-2,\sqrt{3},3\right)$.

平面 ADE 的法向量 $\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3},-1,\sqrt{3}\right)$.

设 BM 与平面 ADE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BM}\right|\left|\boldsymbol{n}\right|}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

20．**本题主要考查计算等差数列的通项公式，等比数列的性质等基础知识，同时考查运算求解能力和综合应用能力。满分15分。**

（Ⅰ）设 $a_n=(n-1)d-1$，依题意得，$6d-4-2(d-1)(2d-1)+6=0$．

解得 $d=3$，则 $a_n=3n-4, n\in\mathbf{N}^*$，

于是 $S_n=3(1+2+\cdots+n)-4n=\dfrac{3n(n+1)-8n}{2}=\dfrac{n(3n-5)}{2}, n\in\mathbf{N}^*$．

（Ⅱ）设 $a_n=(n-1)d-1$，依题意得，

$$\left[c_n+(n-1)d-1\right]\left[15c_n+(n+1)d-1\right]=\left[4c_n+nd-1\right]^2,$$

$$15c_n^2+\left[(16n-14)d-16\right]c_n+(n^2-1)d^2-2nd+1=16c_n^2+8(nd-1)c_n+n^2d^2-2nd+1$$

$$c_n^2+\left[(14-8n)d+8\right]c_n+d^2=0.$$

故 $\Delta=\left[(14-8n)d+8\right]^2-4d^2=\left[(12-8n)d+8\right]\left[(16-8n)d+8\right]\geq 0$

$\left[(3-2n)d+2\right]\left[(2-n)d+1\right]\geq 0$ 对任意正整数n成立.

$n=1$时，显然成立；

$n=2$时，$-d+2\geq 0$，则 $d\leq 2$；

$n\geq 3$时，$\left[(2n-3)d-2\right]\left[(n-2)d-1\right]>(2n-5)(n-3)\geq 0$．

综上所述，$1<d\leq 2$．

21．**本题主要考查椭圆方程，直线与椭圆的联立，直线与直线的联立等基础知识，同时考查运算求解能力和综合应用能力。满分15分。**

（Ⅰ）设 $Q\left(2\sqrt{3}\cos\theta,\sin\theta\right)$ 是椭圆上一点，$P(0,1)$，则

$$|PQ|^2=12\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2=13-11\sin^2\theta-2\sin\theta=\frac{144}{11}-11\left(\sin\theta+\frac{1}{11}\right)^2\leq\frac{144}{11},$$

故 $|PQ|$ 的最大值是 $\dfrac{12\sqrt{11}}{11}$.

（Ⅱ）设直线 $AB: y=kx+\dfrac{1}{2}$，直线与椭圆联立，得 $\left(k^2+\dfrac{1}{12}\right)x^2+kx-\dfrac{3}{4}=0$，

设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，故 $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{k}{k^2+\dfrac{1}{12}} \\ x_1x_2=-\dfrac{3}{4\left(k^2+\dfrac{1}{12}\right)} \end{cases}$.

$PA: y=\dfrac{y_1-1}{x_1}x+1$，与 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ 交于 C，则 $x_C=\dfrac{4x_1}{x_1+2y_1-2}=\dfrac{4x_1}{(2k+1)x_1-1}$，

同理可得，$x_D=\dfrac{4x_2}{x_2+2y_2-2}=\dfrac{4x_2}{(2k+1)x_2-1}$．则

$$|CD|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\left|x_C-x_D\right|=\frac{\sqrt5}{2}\left|\frac{4x_1}{(2k+1)x_1-1}-\frac{4x_2}{(2k+1)x_2-1}\right|$$

$$=2\sqrt5\left|\frac{x_1-x_2}{\left[(2k+1)x_1-1\right]\left[(2k+1)x_2-1\right]}\right|$$

$$=2\sqrt5\left|\frac{x_1-x_2}{(2k+1)^2x_1x_2-(2k+1)(x_1+x_2)+1}\right|$$

$$=2\sqrt5\left|\frac{\sqrt{\left(\dfrac{k}{k^2+\frac{1}{12}}\right)^2+\dfrac{3}{k^2+\frac{1}{12}}}}{-(2k+1)^2\dfrac{3}{4\left(k^2+\frac{1}{12}\right)}+(2k+1)\dfrac{k}{k^2+\frac{1}{12}}+1}\right|$$

数海漫游

$$=\frac{3\sqrt5}{2}\cdot\frac{\sqrt{16k^2+1}}{3k+1}=\frac{6\sqrt5}{5}\cdot\frac{\sqrt{16k^2+1}\sqrt{\frac{9}{16}+1}}{3k+1}\geq\frac{6\sqrt5}{5}.$$

等号在 $k=\dfrac{3}{16}$ 时取到.

22．本题主要考查函数的单调性，导数的运算及零点存在定理，导数不等式的运用，同时考查逻辑思维能力和综合应用能力。满分15分。（数海漫游微信公众号）

（Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{e}{2x^2}=\dfrac{2x-e}{2x^2}$，

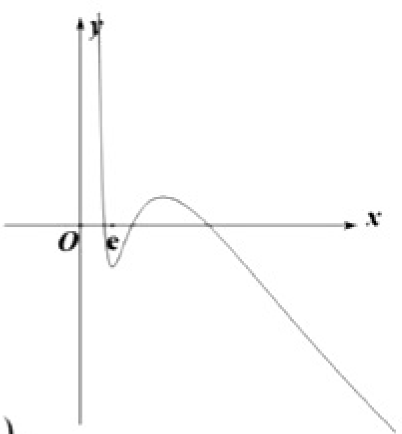
故 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{e}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{e}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

（Ⅱ）（ⅰ）不妨设 $x_1<x_2<x_3$，则 x_1,x_2,x_3 满足：$y=f'(x_i)(x-x_i)+f(x_i)$.

则 x_1,x_2,x_3 是 $f'(x)(x-a)-f(x)+b=0$ 的三个正实数根，

即

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{2e}{x^2}\right)(x-a)-\frac{e}{2x}-\ln x+b=0.$$



记 $g(x)=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{e}{2x^2}\right)(x-a)-\dfrac{e}{2x}-\ln x+b$，$a>e$，

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{e}{2x^2}+\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{e}{x^3}\right)(x-a)+\dfrac{e}{2x^2}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{x^3}(x-e)(x-a)$，

则 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递减，(e,a) 上单调递增，$(a,+\infty)$ 上单调递减，

由于 x_1,x_2,x_3 是 $f'(x)(x-a)-f(x)+b=0$ 的三个正实数根，

则 $0<x_1<\mathrm{e}$，$\mathrm{e}<x_2<a$，$x_3>a$．

又由于 $x\to 0$ 时，$g(x)\to -\ln x\to +\infty$，$g(\mathrm{e})=b-\dfrac{a}{2\mathrm{e}}-1$，

$g(a)=-\dfrac{\mathrm{e}}{2a}-\ln a+b$，$x\to +\infty$ 时，$g(x)\to -\ln x\to -\infty$，

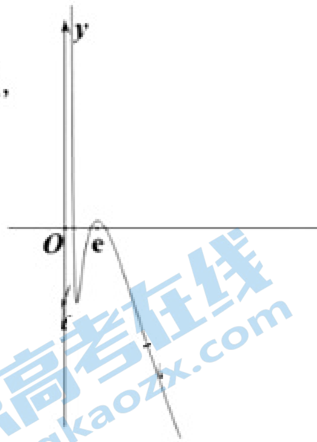
于是 $g(\mathrm{e})=b-\dfrac{a}{2\mathrm{e}}-1<0$，$g(a)=-\dfrac{\mathrm{e}}{2a}-\ln a+b=b-f(a)>0$．

由于 $b<\dfrac{a}{2\mathrm{e}}+1$，要证 $b<f(a)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\mathrm{e}}-1\right)$，只需证 $\dfrac{a}{2\mathrm{e}}+1<f(a)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\mathrm{e}}-1\right)$．

即 $\dfrac{\mathrm{e}}{2a}+\ln a>\dfrac{3}{2}$，由（Ⅰ）知，$a>\mathrm{e}$ 时，$f(a)>f(\mathrm{e})=\dfrac{3}{2}$．

综上所述，$0<b-f(a)<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\mathrm{e}}-1\right)$，得证！

（ii）由于 $g'(x)=-\dfrac{1}{x^3}(x-\mathrm{e})(x-a)$，$0<a<\mathrm{e}$，



则 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，(a,e) 上单调递增，$(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，

则 $0<x_1<a$，$a<x_2<\mathrm{e}$，$x_3>\mathrm{e}$．

又由于 $x\to 0$ 时，$g(x)\to -\ln x\to +\infty$，$g(\mathrm{e})=b-\dfrac{a}{2\mathrm{e}}-1$，

$g(a)=-\dfrac{\mathrm{e}}{2a}-\ln a+b$，$x\to +\infty$ 时，$g(x)\to -\ln x\to -\infty$，

于是 $g(\mathrm{e})=b-\dfrac{a}{2\mathrm{e}}-1>0$，$g(a)=-\dfrac{\mathrm{e}}{2a}-\ln a+b<0$，故 $\dfrac{a}{2\mathrm{e}}+1<b<\dfrac{\mathrm{e}}{2a}+\ln a$．

由于 $g(x)=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\mathrm{e}}{2x^2}\right)(x-a)-\dfrac{\mathrm{e}}{2x}-\ln x+b=1-\dfrac{a+\mathrm{e}}{x}+\dfrac{\mathrm{e}a}{2x^2}-\ln x+b$，

记 $x=\dfrac{\mathrm{e}}{t}$，$\dfrac{a}{\mathrm{e}}=m\in(0,1)$，则 $-\dfrac{a+\mathrm{e}}{\mathrm{e}}t+\dfrac{a}{2\mathrm{e}}t^2+\ln t+b=\ln t+\dfrac{m}{2}t^2-(m+1)t+b=0$．

要证明：$\dfrac{2}{\mathrm{e}}+\dfrac{\mathrm{e}-a}{6\mathrm{e}^2}<\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_3}<\dfrac{2}{a}-\dfrac{\mathrm{e}-a}{6\mathrm{e}^2}$，记 $t_1=\dfrac{\mathrm{e}}{x_1}$，$t_3=\dfrac{\mathrm{e}}{x_3}$，$k=\dfrac{t_1}{t_3}=\dfrac{x_3}{x_1}>\dfrac{\mathrm{e}}{a}=\dfrac{1}{m}>1$．

只需证明：$\dfrac{13-m}{6}=2+\dfrac{\mathrm{e}-a}{6\mathrm{e}}<t_1+t_3<\dfrac{2\mathrm{e}}{a}-\dfrac{\mathrm{e}-a}{6\mathrm{e}}=\dfrac{2}{m}-\dfrac{1-m}{6}$．

即证：

$$\left(t_1+t_3-\frac{13-m}{6}\right)\left(t_1+t_3-\frac{2}{m}+\frac{1-m}{6}\right)<0\Leftrightarrow t_1+t_3-2-\frac{2}{m}<\frac{(m-13)(m^2-m+12)}{36m(t_1+t_3)}.$$

由 $\ln t_1+\dfrac{m}{2}t_1^2-(m+1)t_1=\ln t_3+\dfrac{m}{2}t_3^2-(m+1)t_3$，$t_1>t_3$，

则 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递减，(e,a) 上单调递增，$(a,+\infty)$ 上单调递减，

由于 x_1,x_2,x_3 是 $f'(x)(x-a)-f(x)+b=0$ 的三个正实数根，

则 $0<x_1<e$，$e<x_2<a$，$x_3>a$.

又由于 $x\to 0$ 时，$g(x)\to -\ln x\to +\infty$，$g(e)=b-\frac{a}{2e}-1$，

$g(a)=-\frac{e}{2a}-\ln a+b$，$x\to +\infty$ 时，$g(x)\to -\ln x\to -\infty$，

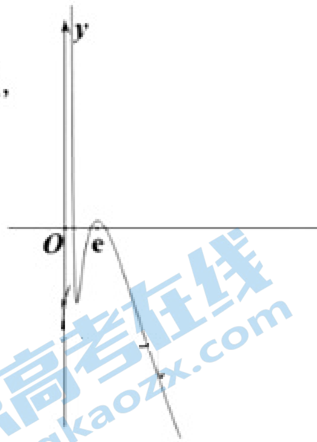
于是 $g(e)=b-\frac{a}{2e}-1<0$，$g(a)=-\frac{e}{2a}-\ln a+b=b-f(a)>0$.

由于 $b<\frac{a}{2e}+1$，要证 $b<f(a)+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{e}-1\right)$，只需证 $\frac{a}{2e}+1<f(a)+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{e}-1\right)$.

即 $\frac{e}{2a}+\ln a>\frac{3}{2}$，由（Ⅰ）知，$a>e$ 时，$f(a)>f(e)=\frac{3}{2}$.

综上所述，$0<b-f(a)<\frac{1}{2}\left(\frac{a}{e}-1\right)$，得证！

（ii）由于 $g'(x)=-\frac{1}{x^3}(x-e)(x-a)$，$0<a<e$，



则 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，(a,e) 上单调递增，$(e,+\infty)$ 上单调递减，

则 $0<x_1<a$，$a<x_2<e$，$x_3>e$.

又由于 $x\to 0$ 时，$g(x)\to -\ln x\to +\infty$，$g(e)=b-\frac{a}{2e}-1$，

$g(a)=-\frac{e}{2a}-\ln a+b$，$x\to +\infty$ 时，$g(x)\to -\ln x\to -\infty$，

于是 $g(e)=b-\frac{a}{2e}-1>0$，$g(a)=-\frac{e}{2a}-\ln a+b<0$，故 $\frac{a}{2e}+1<b<\frac{e}{2a}+\ln a$.

由于 $g(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{e}{2x^2}\right)(x-a)-\frac{e}{2x}-\ln x+b=1-\frac{a+e}{x}+\frac{ea}{2x^2}-\ln x+b$，

记 $x=\frac{e}{t}$，$\frac{a}{e}=m\in(0,1)$，则 $-\frac{a+e}{e}t+\frac{a}{2e}t^2+\ln t+b=\ln t+\frac{m}{2}t^2-(m+1)t+b=0$.

要证明：$\frac{2}{e}+\frac{e-a}{6e^2}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}<\frac{2}{a}-\frac{e-a}{6e^2}$，记 $t_1=\frac{e}{x_1}$，$t_3=\frac{e}{x_3}$，$k=\frac{t_1}{t_3}=\frac{x_3}{x_1}>\frac{e}{a}=\frac{1}{m}>1$.

只需证明：$\frac{13-m}{6}=2+\frac{e-a}{6e}<t_1+t_3<\frac{2e}{a}-\frac{e-a}{6e}=\frac{2}{m}-\frac{1-m}{6}$.

即证：

$$\left(t_1+t_3-\frac{13-m}{6}\right)\left(t_1+t_3-\frac{2}{m}+\frac{1-m}{6}\right)<0\Leftrightarrow t_1+t_3-2-\frac{2}{m}<\frac{(m-13)(m^2-m+12)}{36m(t_1+t_3)}.$$

由 $\ln t_1+\frac{m}{2}t_1^2-(m+1)t_1=\ln t_3+\frac{m}{2}t_3^2-(m+1)t_3$，$t_1>t_3$，

故

$$\ln t_1 - \ln t_3 + \frac{m}{2}\left(t_1^2 - t_3^2\right) - (m+1)\left(t_1 - t_3\right) = 0 \Rightarrow t_1 + t_3 - 2 - \frac{2}{m} = -\frac{2}{m} \cdot \frac{\ln t_1 - \ln t_3}{t_1 - t_3},$$

只需证:

$$-\frac{2}{m} \cdot \frac{\ln t_1 - \ln t_3}{t_1 - t_3} < \frac{(m-13)\left(m^2 - m + 12\right)}{36m\left(t_1 + t_3\right)} \Leftrightarrow \frac{t_1 + t_3}{t_1 - t_3} \ln \frac{t_1}{t_3} + \frac{(m-13)\left(m^2 - m + 12\right)}{72} > 0.$$

由于 $t_1 = kt_3$, 即证:

$$\frac{(k+1)\ln k}{k-1} + \frac{(m-13)\left(m^2 - m + 12\right)}{72} > 0.$$

记 $\varphi(x) = \frac{(x+1)\ln x}{x-1}(x > 1)$, $\varphi'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2\ln x\right) > 0$, 则

$\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调增, 于是

$$\frac{(k+1)\ln k}{k-1} + \frac{(m-13)\left(m^2 - m + 12\right)}{72} > \frac{m+1}{m-1}\ln m + \frac{(m-13)\left(m^2 - m + 12\right)}{72}(m < 1),$$

记 $w(x) = \ln x + \frac{(x-1)(x-13)\left(x^2 - x + 12\right)}{72(x+1)}(0 < x < 1)$, 只需证 $w(x) < 0$.

由 $w'(x) = \frac{(x-1)^2}{72x(x+1)^2}\left(3x^3 - 20x^2 - 49x + 72\right) > \frac{(x-1)^2}{72x(x+1)^2}\left(3x^3 + 3\right) > 0$,

知 $w(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

故 $w(x) < w(1) = 0$, 得证!

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。