

2021 北京清华附中高一（上）期中

数 学

2021.11

（清华附中高 21 级）

一、选择题（共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 < 4\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{0, 1\}$

B. $\{0, 1, 2\}$

C. $\{-1, 0, 1\}$

D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 设命题 $p: \exists x \in R, x^2 < 1$, 则 $\neg p$ 为 ()

A. $\forall x \in R, x^2 < 1$

B. $\exists x \in R, x^2 \geq 1$

C. $\forall x \in R, x^2 \geq 1$

D. $\exists x \in R, x^2 = 1$

3. 下列函数中，值域为 R 且为奇函数的是 ()

A. $y = x^2$

B. $y = 2x - 1$

C. $y = |x| \cdot x$

D. $y = \frac{1}{x}$

4. 已知函数 $f(x) = x^2 + 1$, 那么 $f(x-1) =$ ()

A. x^2

B. $x^2 + 1$

C. $x^2 - 2x + 1$

D. $x^2 - 2x + 2$

5. 若偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上是增函数，则 ()

A. $f(-1.5) < f(-1) < f(2)$

B. $f(-1) < f(-1.5) < f(2)$

C. $f(2) < f(-1) < f(-1.5)$

D. $f(2) < f(-1.5) < f(-1)$

12. 若集合 $\{x+1, x^2, -1\}$ 与集合 $\{1, x, x-1\}$ 相等, 则实数 $x =$ _____

13. 函数 $f(x) = x + \frac{7}{x}$ ($x \in [1, 6]$) 的值域是 _____

14. 已知 $f(x) = \begin{cases} -2x+2, & x \geq 1 \\ 1-|x|, & x < 1 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - ax + a$ 恰有一个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

15. 对于实数集合 A, B , 定义 $A+B = \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$, 给出下列 4 个命题:

① $A+B = B+A$

② $(A+B)+C = A+(B+C)$

③ 若 $A+A = B+B$, 则 $A=B$

④ 若 $A+C = B+C$, 则 $A=B$

其中, 所有正确命题的序号是 _____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 85 分)

16. (本小题 14 分) 已知集合 $A = \{x \mid x > 3a+1\}$, 集合 $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 > 0\}$

(I) 当 $a = -3$ 时, 求 $A \cap B$;

(II) 若 $A \cup B = B$, 求实数 a 的取值范围.

17. (本小题 14 分) 求下列关于 x 的不等式的解集.

(I) $\frac{x+1}{2x-1} \geq 0$;

(II) $x^2 - 2ax < 3a^2$

18. (本小题 14 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx - 5$, 对于任意 $x \in R$, 有 $f(2-x) = f(2+x)$, $f(-2) = 7$.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的最小值为 -8, 求 t 的值;

19. (本小题 14 分) 已知函数 $f(x) = 2x|x-a| + x$.

(I) 若 $f(x)$ 为奇函数, 求 a 的值;

(II) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上的最大值;

(III) 若 $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 函数 $f(x)$ 的图像恒在 $g(x) = 2x$ 图像下方, 求实数 a 的取值范围.

20. (本小题 14 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的函数, 满足下列两个条件:

① 当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$ 恒成立;

② 对任意的 $x, y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 都有 $f(x)f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right)$.

(I) 求 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 的值;

(II) 证明: $f(x)$ 为奇函数, 并且 $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$;

(III) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递减, 直接写出关于 x 的不等式 $f(x^2 + x + 1) + f\left(-\frac{1}{3}\right) \leq 0$ 的解集

21. (本小题 15 分) 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 集合 $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$, 若 k 个互不相同的非空集合, A_1, A_2, \dots, A_k 同时满足下面两个条件, 则称 A_1, A_2, \dots, A_k 是集合 E_n 的“规范 k -子集组”

① $A_i \subseteq E_n (i=1, 2, \dots, k)$;

② 对任意的 $A_i, A_j (1 \leq i < j \leq k)$, 要么 $A_i \cap A_j = \emptyset$, 要么 A_i, A_j 中的一个另一个的子集.

(I) 直接写出集合 E_2 的一个“规范 2-子集组”;

(II) 若 A_1, A_2, \dots, A_k 是集合 E_n 的“规范 k -子集组”,

(i) 求证: A_1, A_2, \dots, A_k 中至多有 1 个集合对 $\{A_i, A_j\}$, 满足 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 且 $A_i \cup A_j = E_n$;

(ii) 求 k 的最大值