

# 2021 北京清华附中高一（上）期中

## 数 学

2021.11

（清华附中高 21 级）

一、选择题（共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 < 4\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

A.  $\{0, 1\}$

B.  $\{0, 1, 2\}$

C.  $\{-1, 0, 1\}$

D.  $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 设命题  $p: \exists x \in R, x^2 < 1$ , 则  $\neg p$  为 ( )

A.  $\forall x \in R, x^2 < 1$

B.  $\exists x \in R, x^2 \geq 1$

C.  $\forall x \in R, x^2 \geq 1$

D.  $\exists x \in R, x^2 = 1$

3. 下列函数中，值域为  $R$  且为奇函数的是 ( )

A.  $y = x^2$

B.  $y = 2x - 1$

C.  $y = |x| \cdot x$

D.  $y = \frac{1}{x}$

4. 已知函数  $f(x) = x^2 + 1$ , 那么  $f(x-1) =$  ( )

A.  $x^2$

B.  $x^2 + 1$

C.  $x^2 - 2x + 1$

D.  $x^2 - 2x + 2$

5. 若偶函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -1]$  上是增函数，则 ( )

A.  $f(-1.5) < f(-1) < f(2)$

B.  $f(-1) < f(-1.5) < f(2)$

C.  $f(2) < f(-1) < f(-1.5)$

D.  $f(2) < f(-1.5) < f(-1)$

6. 已知函数  $y = f(x)$  满足  $f(x+1) = 2f(x)$ , 且  $f(5) = 3f(3) + 4$ , 则  $f(4) = ( \quad )$

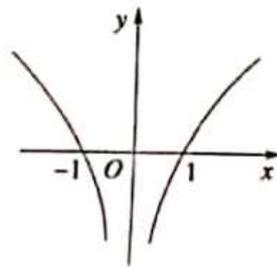
- A. 16
- B. 8
- C. 4
- D. 2

7. 下列函数中, 能说明“若函数  $f(x)$  满足  $f(0) \cdot f(2) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $f(0, 2)$  内不存在零点”为假命题的函数是 ( )

- A.  $y = (x-1)^2$
- B.  $y = x-1$
- C.  $y = -x^2 + 2x + 1$
- D.  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

8. 已知函数  $f(x)$  的图像如图所示, 则不等式  $\frac{f(x)}{x^2} > 0$  的解集是 ( )

- A.  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
- B.  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
- C.  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- D.  $(-1, 0) \cup (0, 1)$



9. “ $x < 1$ ”是“ $x^2 < 1$ ”的 ( ) 条件

- A. 充分不必要
- B. 必要不充分
- C. 充要
- D. 即不充分也不必要

10. 设  $a \in \mathbb{R}$ , 集合  $A = \{(x, y) \mid ax + y > 3, x - ay \leq 4\}$ , 则 ( )

- A. 对任意实数  $a$ ,  $(2, 2) \notin A$
- B. 对任意实数  $a$ ,  $(2, 2) \in A$
- C. 当且仅当  $a < -1$  时,  $(2, 2) \notin A$
- D. 当且仅当  $a \leq \frac{1}{2}$  时,  $(2, 2) \notin A$

二、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

11. 函数  $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{2}{x-1}$  的定义域是 \_\_\_\_\_.

12. 若集合  $\{x+1, x^2, -1\}$  与集合  $\{1, x, x-1\}$  相等, 则实数  $x =$  \_\_\_\_\_

13. 函数  $f(x) = x + \frac{7}{x}$  ( $x \in [1, 6]$ ) 的值域是 \_\_\_\_\_

14. 已知  $f(x) = \begin{cases} -2x+2, & x \geq 1 \\ 1-|x|, & x < 1 \end{cases}$ , 若函数  $g(x) = f(x) - ax + a$  恰有一个零点, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

15. 对于实数集合  $A, B$ , 定义  $A+B = \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$ , 给出下列 4 个命题:

①  $A+B = B+A$

②  $(A+B)+C = A+(B+C)$

③ 若  $A+A = B+B$ , 则  $A=B$

④ 若  $A+C = B+C$ , 则  $A=B$

其中, 所有正确命题的序号是 \_\_\_\_\_.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 85 分)

16. (本小题 14 分) 已知集合  $A = \{x \mid x > 3a+1\}$ , 集合  $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 > 0\}$

(I) 当  $a = -3$  时, 求  $A \cap B$ ;

(II) 若  $A \cup B = B$ , 求实数  $a$  的取值范围.

17. (本小题 14 分) 求下列关于  $x$  的不等式的解集.

(I)  $\frac{x+1}{2x-1} \geq 0$ ;

(II)  $x^2 - 2ax < 3a^2$

18. (本小题 14 分) 已知函数  $f(x) = ax^2 + bx - 5$ , 对于任意  $x \in \mathbb{R}$ , 有  $f(2-x) = f(2+x), f(-2) = 7$ .

(I) 求  $f(x)$  的解析式;

(II) 若函数  $f(x)$  在区间  $[t, t+3]$  上的最小值为 -8, 求  $t$  的值;

19. (本小题 14 分) 已知函数  $f(x) = 2x|x-a| + x$ .

(I) 若  $f(x)$  为奇函数, 求  $a$  的值;

(II) 当  $a=1$  时, 求函数  $f(x)$  在区间  $[0, 4]$  上的最大值;

(III) 若  $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , 函数  $f(x)$  的图像恒在  $g(x) = 2x$  图像下方, 求实数  $a$  的取值范围.

20. (本小题 14 分) 已知  $f(x)$  是定义在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上的函数, 满足下列两个条件:

① 当  $x < 0$  时,  $f(x) < 0$  恒成立;

② 对任意的  $x, y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 都有  $f(x)f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right)$ .

(I) 求  $f(1)$  和  $f(-1)$  的值;

(II) 证明:  $f(x)$  为奇函数, 并且  $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ;

(III) 若  $f(x)$  在区间  $(0, 1]$  上单调递减, 直接写出关于  $x$  的不等式  $f(x^2 + x + 1) + f\left(-\frac{1}{3}\right) \leq 0$  的解集

21. (本小题 15 分) 设  $n \in \mathbb{N}^*$ , 集合  $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ , 若  $k$  个互不相同的非空集合,  $A_1, A_2, \dots, A_k$  同时满足下面两个条件, 则称  $A_1, A_2, \dots, A_k$  是集合  $E_n$  的“规范  $k$ -子集组”

①  $A_i \subseteq E_n (i=1, 2, \dots, k)$ ;

② 对任意的  $A_i, A_j (1 \leq i < j \leq k)$ , 要么  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , 要么  $A_i, A_j$  中的一个另一个的子集.

(I) 直接写出集合  $E_2$  的一个“规范 2-子集组”;

(II) 若  $A_1, A_2, \dots, A_k$  是集合  $E_n$  的“规范  $k$ -子集组”,

(i) 求证:  $A_1, A_2, \dots, A_k$  中至多有 1 个集合对  $\{A_i, A_j\}$ , 满足  $A_i \cap A_j = \emptyset$  且  $A_i \cup A_j = E_n$ ;

(ii) 求  $k$  的最大值