绝密★启用前

茂名市五校联盟2022届高三第一次联考试题

数学试卷

本试卷共4页，22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足：$z(2+i)=\frac{1}{2}-i$，则 $|z|=$ C

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-6x-16<0\}$，$B=\{y|y-2\leqslant 0\}$，则 $A\cap B=$ D

A. $\varnothing$　　B. $[2,8)$　　C. $(-\infty,2]$　　D. $(-2,2]$

3. 抛物线 $x=\frac{4}{3}y^2$ 的焦点坐标为 C

A. $\left(\frac{1}{3},0\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$　　C. $\left(\frac{3}{16},0\right)$　　D. $\left(0,\frac{2}{3}\right)$

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=5$，$a_t=7$，$a_{t+3}=10$，则其前 t 项的和为 B

A. 12　　B. 22　　C. 23　　D. 25

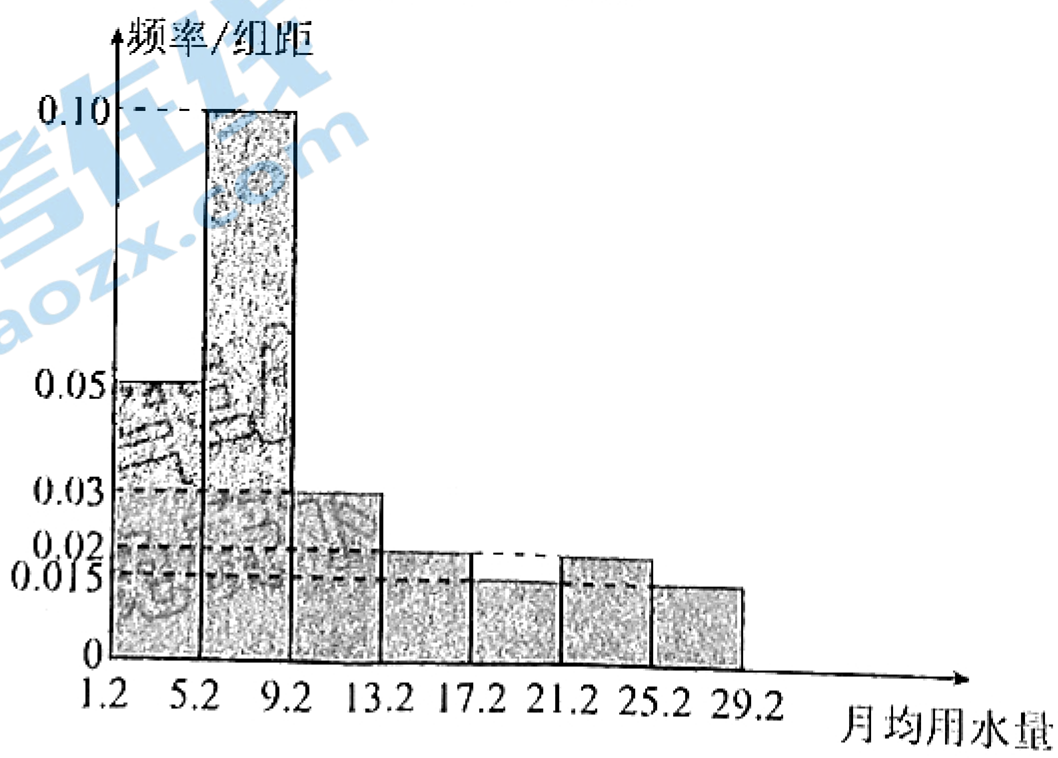
5. 已知 A 是 $\triangle ABC$ 的内角，且 $\sin A+3\cos A=-\sqrt{2}$，则 $\tan A$ 的值为 C

A. -1 或 7　　B. $-\frac{2}{3}$ 或 1　　C. -1　　D. $-\frac{2}{3}$

6. 已知圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=4$，过直线 $l:y=m(m>0)$ 上一点 P 作圆 C 的切线，切点依次为 A,B，若直线 l 上有且只有一点 P 使得 $|\overrightarrow{PC}|=2|\overrightarrow{AC}|$，$O$ 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PC}=$ C

A. -20　　B. 20 或 12　　C. -20 或 -12　　D. 12

7. 某市居民月均用水量的频率分布直方图如图所示：



其众数、中位数、平均数的估计值分别为 x_0，x_e，$\bar{x}$，则下列结论正确的是

A. $\bar{x}>x_e>x_0$　　B. $x_e>\bar{x}>x_0$　　C. $\bar{x}>x_0>x_e$　　D. $x_e>x_0>\bar{x}$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且对于任意的 $x_1<x_2<0$ 都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立. 若 $f(m)+f(-n)>0(mn<0)$，则下列结论成立的是

A. $m>n$　　B. $m<n$

C. $e^{m+n}>\dfrac{|m|+|n|-\ln|mn|}{2}$　　D. $e^{m+n}<\dfrac{|m|+|n|-\ln|mn|}{2}$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 在二项式 $(1-4x)^8$ 的展开式中，下列结论正确的是

A. 第 5 项的系数最大　　B. 所有项的系数和为 3^8

C. 所有奇数项的二项式系数和为 -2^7　　D. 所有偶数项的二项式系数和为 2^7

10. 在同一平面上，A，B 是直线 l 上两点，O，P 是位于直线 l 同侧的两点（O，P 不在直线 l 上），且 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，$\lambda$，$\mu\in\mathbf{R}$，则 $\lambda+\mu$ 的值可能是

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

11. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是线段 A_1C_1 上的点，则下列结论正确的是

A. 直线 DP 与直线 B_1C 不垂直

B. 直线 DP 与直线 BD_1 垂直

C. 当 P 为 A_1C_1 的中点时，$DP\,/\!/\,BC_1$

D. 当 P 为 A_1C_1 的中点时，三棱锥 $P-ABC_1$ 的体积为 $\dfrac{1}{12}$

12. 已知曲线 C：$x|x|+y|y|=1$，则下列结论正确的是

A. 直线 $x+y=0$ 与曲线 C 没有公共点

B. 直线 $x+y=m$ 与曲线 C 最多有三个公共点

C. 当直线 $x+y=m$ 与曲线 C 有且只有两个不同公共点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 时，x_1x_2 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$

D. 当直线 $x+y=m$ 与曲线 C 有公共点时，记公共点为 $P_i(x_i,y_i)(i\in\mathbf{N}^*)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 的取值范围为 $(0,\sqrt{2})$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，则其渐近线的斜率是________.

14. 把函数 $y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $m(m>0)$ 个单位后，得到的函数图象关于 y 轴对称，则实数 m 的最小值为________.

15. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln^2x+4\ln x-4}{x}$，则其极大值与极小值的和为________.

16. 田忌赛马的故事出自司马迁的《史记》. 话说齐王、田忌分别有上、中、下等马各一匹. 赛马规则是：一场比赛需要比赛三局，每匹马都要参赛，且只能参赛一局. 最后以获胜局数多者为胜. 记齐王、田忌的马匹分别为 A_1，A_2，A_3 和 B_1，B_2，B_3. 每局比赛之间都是相互独立的，而且不会出现平局. 用 $P_{A_iB_j}(i,j\in\{1,2,3\})$ 表示马匹 A_i 与 B_j 比赛时齐王获胜的概率. 若 $P_{A_1B_1}=0.8$，$P_{A_1B_2}=0.9$，$P_{A_1B_3}=0.95$；$P_{A_2B_1}=0.1$，$P_{A_2B_2}=0.6$，$P_{A_2B_3}=0.9$；$P_{A_3B_1}=0.09$，$P_{A_3B_2}=0.1$，$P_{A_3B_3}=0.6$. 则一场比赛共有________种不同的比赛方案；在上述所有的方案中，有一种方案田忌获胜的概率最大，此概率的值为________.（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分10分）

接种新冠疫苗，可以有效降低感染新冠肺炎的几率. 某地区有 A,B,C 三种新冠疫苗可供居民接种. 假设在某个时间段该地区集中接种第一针疫苗，而且这三种疫苗的供应都很充足. 为了节省时间和维持良好的接种秩序，接种点设置了号码机，号码机可以随机地产生 A,B,C 三种号码（产生每个号码的可能性都相等）. 前去接种第一针疫苗的居民先从号码机上取一张号码，然后去接种与号码相对应的疫苗（例如：取到号码 A，就接种 A 种疫苗，以此类推）. 若甲，乙，丙，丁四个人各自独立的去接种第一针新冠疫苗.

(1)求这四个人中恰有一个人接种 A 种疫苗的概率；

(2)记甲，乙，丙，丁四个人中接种 A 种疫苗的人数为 X. 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

18.（本小题满分12分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=a+3c^n$（$a,c\in\mathbf{R},c\neq0,c\neq1$）.

(1)求 a 的值；

(2)若 $c=\frac{5}{4}$ 且 $b_n=\frac{1}{n}a_n$，问 n 取何值时，b_n 取得最小值，并求此最小值.

19.（本小题满分12分）

在矩形 $ABCD$ 所在平面内，E 为矩形 $ABCD$ 外一点，且 $AB=2AD$，$ED=\sqrt{3}$，$AE=3$.

(1)若 $\angle ADE=60°$，求 AD 的长度；

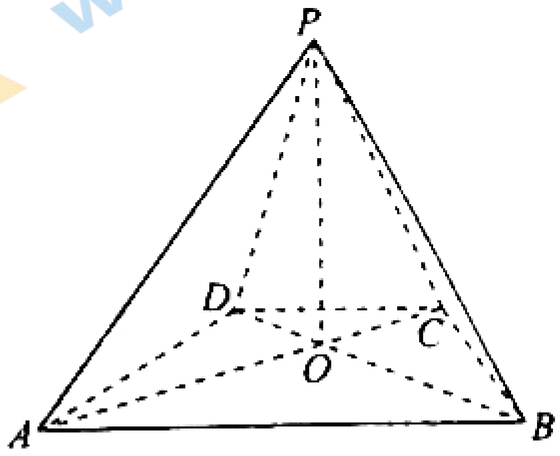
(2)若 $\angle DEA=\theta$（θ 为钝角）. 当多边形 $ABCDE$ 的面积最大时，求 $\tan\theta$ 的值.

20.(本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是等腰梯形，$AB/\!/CD$，AC 与 BD 交点为 O，且 $PO\perp BD$，$PA=PB$.

(1)证明：$PO\perp$平面 $ABCD$；

(2)若 $AC\perp BD$ 且 $AO=2OC=6$，$PO=3$，则在线段 PC 上是否存在一点 E，使得二面角 $P-AD-E$ 的余弦值为 $\frac{8\sqrt{69}}{69}$，若存在，求出点 E 的位置；若不存在，请说明理由.



21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+\frac{2y^2}{3}=1$，过点 $P(1,1)$的直线 l_1，l_2 与椭圆 C 分别交于点 P，M 和 P，N，记直线 l_1 斜率为 $k(k\neq0)$，直线 l_2 的斜率为 k'.

(1)若直线 l_1，l_2 关于直线 $y=x$ 对称，证明：kk'为定值；

(2)已知点 $A(2,0)$，当 $0<k<1$ 时，求$\triangle APM$ 面积的最大值.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+x^2-ax$.

(1)当 $a=3$ 时，求曲线 $y=f(x)$在点 $P(1,f(1))$处的切线方程；

(2)若 x_1，$x_2(x_1<x_2)$是函数 $f(x)$的两个极值点，证明：$f(x_1)-f(x_2)>\ln\frac{a^2}{8}+\frac{64-a^4}{16a^2}$.

茂名市五校联盟 2022 届高三第一次联考试题

数学参考答案

一、单选题

1. C 【解析】$z=\dfrac{\frac{1}{2}-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$，$\therefore |z|=\dfrac{\left|\frac{1}{2}-\mathrm{i}\right|}{|2+\mathrm{i}|}=\dfrac{1}{2}$. 故选 C.

2. D 【解析】由 $x^2-6x-16<0\Rightarrow A=(-2,8)$，$B=(-\infty,2]$，$\therefore A\cap B=(-2,2]$. 故选 D.

3. C 【解析】$x=\dfrac{4}{3}y^2\Rightarrow y^2=\dfrac{3}{4}x\Rightarrow$ 焦点坐标为 $\left(\dfrac{3}{16},0\right)$. 故选 C.

4. B 【解析】$d=\dfrac{a_{t+5}-a_t}{3}=1=\dfrac{2}{t-2}$，$\therefore t=4,d=1$. $S_t=S_4=22$. 故选 B.

5. C 【解析】$\because \sin A+3\cos A=-\sqrt{2}$，$\therefore \sin^2 A+6\sin A\cos A+9\cos^2 A=2\Rightarrow 8\cos^2 A+6\sin A\cos A=1\Rightarrow \dfrac{8\cos^2 A+6\sin A\cos A}{\sin^2 A+\cos^2 A}=1\Rightarrow \dfrac{8+6\tan A}{\tan^2 A+1}=1\Rightarrow \tan^2 A-6\tan A-7=0\Rightarrow \tan A=-1$ 或 $\tan A=7$. $\because 0<A<\pi$，且 $\sin A+3\cos A=-\sqrt{2}$，故 $\tan A<0$. 故选 C.

6. A 【解析】$\because$这样的点 P 是唯一的，$\therefore x_P=1$，又$\because m>0$，则 $P(1,5)$，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PC}=(1,5)\cdot(0,-4)=-20$. 故选 A.

7. A 【解析】由直方图可知，$x_{中}>x_0$，又因为直方图是右边拖尾型的，所以 $x>x_{中}$. 故选 A.

8. D 【解析】若函数 $f(x)$ 是连续的，则 $m<n$，若函数 $f(x)$ 是不连续的，$m>n$，也可能 $m<n$. 故 A，B 都不正确. $\because mn<0$，$\therefore e^{mn}<1$，$\dfrac{|m|+|n|-\ln|mn|}{2}=\dfrac{|m|-\ln|m|+|n|-\ln|n|}{2}$，$\because x-\ln x\geqslant 1$，$\therefore \dfrac{|m|+|n|-\ln|mn|}{2}=\dfrac{|m|-\ln|m|+|n|-\ln|n|}{2}\geqslant\dfrac{1+1}{2}=1$. 故选 D.

二、多选题

9. BD 【解析】因为第 9 项系数大于第 5 项系数，所以 A 错误. 令 $x=1$，可知 B 正确. 因为求的是二项式系数和，所以 C 错误，D 正确. 故选 BD.

10. AB 【解析】$\because$当且仅当点 P 在直线 l 上时，则 $\lambda+\mu=1$. 而当 O,P 两点在 l 的异侧时，才会有 $\lambda+\mu>1$. 因为 O,P 在直线 l 同侧，所以 C，D 错误；当 $OP\,/\!/\,l$ 时，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，此时 $\lambda+\mu=0$，所以 B 正确. 当 P 在 l 关于点 O 对称的直线 l' 上时，$\lambda+\mu=-1$，所以 A 正确. 故选 AB.

11. ABD 【解析】$\because B_1C\,/\!/\,A_1D$，$\because A_1D$ 与 DP 成的最大角为 60°，不可能垂直，$\therefore$ A 正确. $\because BD_1\perp$平面 A_1DC_1，故 B 正确，$\because BC_1\,/\!/\,AD_1$，由图易知，选项 C 错误；$\because V_{P-ABC_1}=V_{B-APC_1}=\dfrac{1}{12}$，故 D 正确. 故选 ABD.

12. ACD 【解析】分类讨论可得 C：$\begin{cases}x^2+y^2=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)\\ x^2-y^2=1(x>0,y<0)\\ y^2-x^2=1(x<0,y>0)\end{cases}$，因为 $x+y=0$ 是 $x^2-y^2=1$ 和 $y^2-x^2=1$ 的渐近线，且 $x+y=0$ 与 $x^2+y^2=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 没有公共点，所以 A 正确；因为 $x+y=0$ 是 $x^2-y^2=1$ 和 $y^2-x^2=1$ 的渐近线，所以 $x+y=m$ 与曲线 C 最多有两个公共点，所以 B 错误；由图可知若 $x+y=m$ 与曲线 C 有两个公共

点或一个公共点，当 $0<m<\sqrt{2}$ 时，$x+y=m$ 与曲线 C 有两个公共点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，由对称性可知，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 关于直线 $y=x$ 对称，则 $y_1=x_2$，$\therefore x_1x_2=x_1y_1$，(1) 当 $0<m<1$ 时，$-\infty<x_1x_2<0$. (2) 当 $1\leqslant m<\sqrt{2}$ 时，$\because x_1\neq x_2$，$\therefore x_1x_2=x_1y_1<\frac{x_1^2+y_1^2}{2}=\frac{1}{2}$. (3) 当 $m=\sqrt{2}$ 时，直线 l 与曲线 C 只有一个公共点，不合题意. (4) 当 $m>\sqrt{2}$ 或 $m\leqslant 0$ 时，直线 l 与曲线 C 无公共点，所以 C 正确；由上述可知当 $0<m<\sqrt{2}$ 时，直线 $x+y=m$ 与曲线 C 有且只有两个不同公共点，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2=x_1+y_1=m$，所以 $0<\sum\limits_{i=1}^{n}x_i<\sqrt{2}$. 当 $m=\sqrt{2}$ 时，$x+y=m$ 与曲线 C 只有一个公共点，此点为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，此时 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\in(0,\sqrt{2})$. 所以 D 正确. 故选 ACD.

三、填空题

13. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$　【解析】$\because e=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$\therefore 4c^2=10a^2$，$4a^2+4b^2=10a^2$，$k=\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

14. $\frac{\pi}{3}$　【解析】设向左平移 m 个单位，则 $y=3\sin\left(2x+2m-\frac{\pi}{6}\right)$，于是 $2m-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. $m=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\because m>0$，$\therefore k=0$ 时，m 有最小值 $\frac{\pi}{3}$，所以答案为 $\frac{\pi}{3}$.

15. $\frac{8}{e^2}$　$-4e^4$　【解析】$f(x)=\frac{\ln^2x+4\ln x-4}{x}$，$f'(x)=-\frac{(\ln x+4)(\ln x-2)}{x^2}(x>0)$，$f'(x)>0\Rightarrow e^{-4}<x<e^2$，$f'(x)<0\Rightarrow 0<x<e^{-4}$ 或 $x>e^2$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,e^{-4})$ 上单调递减，(e^{-4},e^2) 上单调递增，$(e^2,+\infty)$ 上单调递减，$f(x)_{极大值}=f(e^2)=\frac{8}{e^2}$，$f(x)_{极小值}=f(e^{-4})=-4e^4$.

16. 6　0.819　【解析】所有的比赛方案有 6 种，即 (A_1B_1,A_2B_2,A_3B_3)，(A_1B_1,A_2B_3,A_3B_2)，(A_1B_2,A_2B_1,A_3B_3)，(A_1B_2,A_2B_3,A_3B_1)，(A_1B_3,A_2B_2,A_3B_1)，(A_1B_3,A_2B_1,A_3B_2). 其中采用方案 (A_1B_3,A_2B_1,A_3B_2)，田忌获胜的概率最大. 记田忌三局全胜和恰胜两局的概率分别为 P_1，P_2，$P_1=0.05\times0.9\times0.9=0.040\ 5$，$P_2=0.05\times0.9\times0.1\times2+0.95\times0.9\times0.9=0.778\ 5$. 所以概率值为 $P_1+P_2=0.819$.

四、解答题

17. 解：(1) 记四个人中恰有一个人接种 A 疫苗的事件为 M，

则 $P(M)=C_4^1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$，

所以四个人中恰有一个人接种 A 疫苗的概率为 $\frac{32}{81}$.　(4 分)

(2) 由题意可知，X 的取值依次为 0，1，2，3，4.　(5 分)

且 $X\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，$P(X=k)=C_4^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}(k=0,1,2,3,4)$.　(7 分)

故随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

(9 分)

$E(X)=np=\frac{4}{3}$.　(10 分)

18. 解:(1)当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=a+3c^n-a-3c^{n-1}=3(c-1)c^{n-1}$,(1) (2 分)

$\therefore a_{n+1}=3(c-1)c^n$. (*)

则 $a_{n+1}=ca_n$, (4 分)

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=a+3c$,

因为$\{a_n\}$为等比数列,

所以 $a_2=ca_1$.

由(*)式可知,$a_2=3(c-1)c$,

$\therefore 3c(c-1)=c(a+3c)$,解得 $a=-3$. (6 分)

(2)$c=\frac{5}{4}$时,$a_n=\frac{3}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$,

$\because b_n=\frac{1}{n}a_n$,

$\therefore b_n=\frac{3}{4n}\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$,$b_{n+1}=\frac{3}{4(n+1)}\left(\frac{5}{4}\right)^{n}$. (8 分)

$b_{n+1}\geqslant b_n$,即$\frac{3}{4(n+1)}\left(\frac{5}{4}\right)^{n}\geqslant\frac{3}{4n}\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}\Rightarrow n\geqslant 4$.

$b_{n+1}<b_n\Rightarrow n<4$. (10 分)

于是 $b_1>b_2>b_3>b_4=b_5<b_6<b_7<b_8<\cdots$,

所以 $n=4$ 或 5 时,b_n 取得最小值,最小值为 $b_4=b_5$

$=\frac{375}{1\ 024}$. (12 分)

19. 解:(1)在三角形 ADE 中,根据正弦定理得,

$$\frac{AE}{\sin\angle ADE}=\frac{DE}{\sin\angle DAE}\Rightarrow\frac{3}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\angle DAE}$$

$\Rightarrow\sin\angle DAE=\frac{1}{2}$. (2 分)

$\because AE>DE$,

$\therefore\angle EAD<60^\circ$,

$\therefore\angle EAD=30^\circ$,

则$\angle AED=90^\circ$,

$\therefore AD=2\sqrt{3}$. (4 分)

(2)因为 θ 是钝角,

所以点 E 在以 AD 为直径的圆内且在矩形 $ABCD$ 外,

所以多边形 $ABCDE$ 是凸五边形. (6 分)

则 $S_{ABCDE}=S_{\triangle ADE}+S_{矩形ABCD}$,$S_{\triangle ADE}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\theta$,

$S_{ABCD}=AD\cdot AB=2AD^2$,

在$\triangle ADE$中,由余弦定理,$AD^2=9+3-6\sqrt{3}\cos\theta$,

$S_{ABCD}=2AD^2=24-12\sqrt{3}\cos\theta$,

所以 $S_{ABCDE}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\theta-12\sqrt{3}\cos\theta+24$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}(\sin\theta-8\cos\theta)+24$ (8 分)

$=\frac{3\sqrt{195}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{65}}\sin\theta-\frac{8}{\sqrt{65}}\cos\theta\right)+24$

$=\frac{3\sqrt{195}}{2}\sin(\theta-\varphi)+24$,$\begin{cases}\sin\varphi=\frac{8}{\sqrt{65}},\\ \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{65}},\end{cases}$ (10 分)

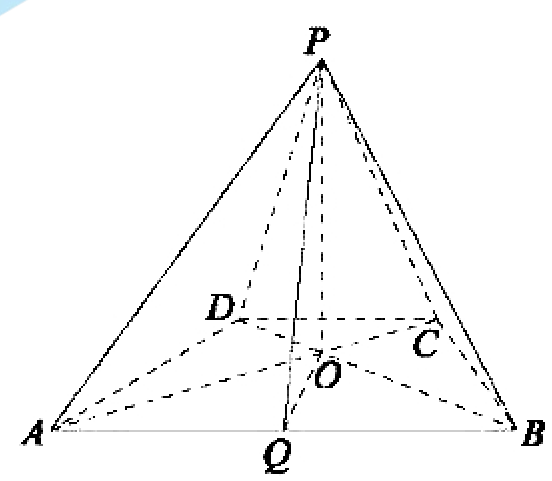
当且仅当 $\theta-\varphi=\frac{\pi}{2}$,即 $\theta=\frac{\pi}{2}+\varphi$ 时,S_{ABCDE} 取得最大值,

此时 $\sin\theta=\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{65}}$,$\cos\theta=-\sin\varphi=-\frac{8}{\sqrt{65}}$,

所以 $\tan\theta=-\frac{1}{8}$. (12 分)

20. 解:(1)因为 $ABCD$ 为等腰梯形,所以 $AO=BO$,

取 AB 的中点 Q,连接 OQ,PQ,



则 $AB\perp OQ$,又$\because PA=PB$,$\therefore AB\perp PQ$,

$\therefore AB\perp$平面 POQ,

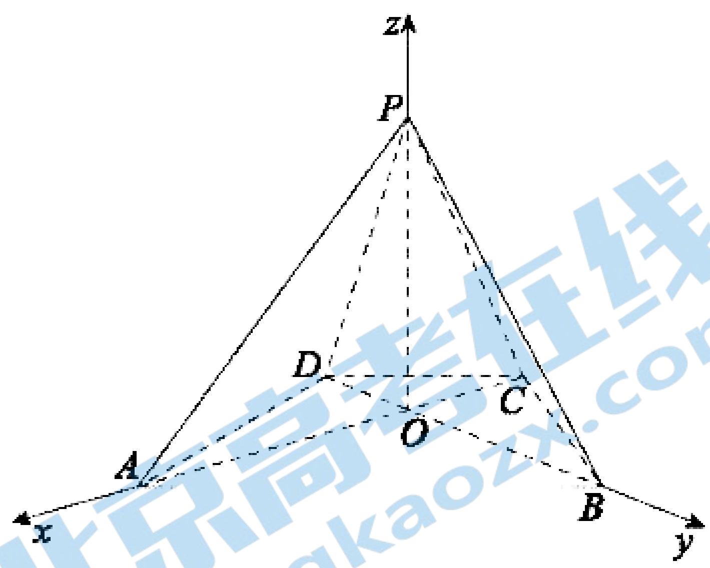
$\therefore AB\perp PO$,

又∵$PO\perp BD$，

$AB\cap BD=B$，

∴$PO\perp$平面 $ABCD$.　　　　（4 分）

（2）如图，建立空间直角坐标系 $Oxyz$，



则 $A(6,0,0)$，$D(0,-3,0)$，$C(-3,0,0)$，$P(0,0,3)$.

（5 分）

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{AD}=(-6,-3,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-6,0,3)$，

所以 $\begin{cases}2x_1+y_1=0\\-2x_1+z_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=1$，得 $y_1=-2$，$z_1=2$，

∴$\boldsymbol{m}=(1,-2,2)$.　　　　（8 分）

设点 $E(x,y,z)$，$\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{EP}\Rightarrow(x+3,y,z)=\lambda(-x,-y,3-z)$，

解得 $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{1+\lambda}\\y=0\\z=\dfrac{3\lambda}{\lambda+1}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\left(-\dfrac{6\lambda+9}{\lambda+1},0,\dfrac{3\lambda}{\lambda+1}\right)$，

设平面 ADE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}2x_2+y_2=0\\-\dfrac{6\lambda+9}{\lambda+1}x_2+\dfrac{3\lambda}{\lambda+1}z_2=0\end{cases}\Rightarrow x_2=\lambda,y_2=-2\lambda,z_2=2\lambda+3\Rightarrow\boldsymbol{n}=(\lambda,-2\lambda,2\lambda+3)$.　　　　（10 分）

若这样的点 E 存在，

则 $\dfrac{3}{\sqrt{69}}=\left|\dfrac{9\lambda+6}{3\sqrt{\lambda^2+4\lambda^2+(2\lambda+3)^2}}\right|\Rightarrow 3\lambda^2+4\lambda-20=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=-\dfrac{10}{3}$（舍去）.

所以存在符合题意的点 E，E 为线段 PC 上靠近点 P 的三等分点.　　　　（12 分）

21. **解**：（1）设 l_1 与 y 轴的交点为 $(0,m)$，

因为 $k\neq0$，所以 $m\neq1$，

因为 l_1，l_2 关于直线 $y=x$ 对称，

所以 l_2 与 x 轴的交点为 $(m,0)$，

于是 $k=\dfrac{m-1}{-1}$，$k'=\dfrac{-1}{m-1}\Rightarrow kk'=\dfrac{m-1}{-1}\times\dfrac{-1}{m-1}=1$，

所以 kk' 为定值 1.　　　　（4 分）

（2）设直线 l_1 的方程为：$y=kx+1-k(0<k<1)$，

联立方程组 $\begin{cases}y=kx+1-k\\x^2+2y^2-3=0\end{cases}$，

得 $(2k^2+1)x^2+4k(1-k)x+2k^2-4k-1=0$，

$\Delta=16k^2(1-k)^2-4(2k^2+1)(2k^2-4k-1)=4(2k+1)^2>0$.　　　　（6 分）

$|PM|=\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{4(2k+1)^2}}{2k^2+1}=\sqrt{1+k^2}\dfrac{2(2k+1)}{2k^2+1}$，

点 $A(2,0)$ 到直线 l_1 的距离 $d=\dfrac{k+1}{\sqrt{1+k^2}}$，

$S_{\triangle APM}=\dfrac{1}{2}|PM|d=\dfrac{(2k+1)(k+1)}{2k^2+1}=\dfrac{2k^2+3k+1}{2k^2+1}$

$=1+\dfrac{3k}{2k^2+1}$

$=1+\dfrac{3}{2k+\dfrac{1}{k}}\leqslant1+\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$，　　　　（10 分）

因为 $0<k<1$，所以当且仅当 $2k=\dfrac{1}{k}$，即 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，

上式取等号.

所以 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\triangle APM$ 面积的最大值为 $\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4}$.

（12 分）

22. 解：(1)$a=3$ 时，$f(x)=\ln x+x^2-3x$，

$f(1)=-2$，

所以切点坐标为 $P(1,-2)$.

$f'(x)=\frac{1}{x}+2x-3$，　　(2 分)

$f'(1)=0$，于是所求切线的斜率 $k=0$.

又因为所求切线过点 $P(1,-2)$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-2$.　　(4 分)

(2)$f'(x)=\frac{2x^2-ax+1}{x}$，

$\because x_1,x_2$ 是函数 $f(x)$ 的两个极值点，

$\therefore x_1,x_2$ 是函数 $f'(x)$ 两个大于 0 的零点，

$\therefore x_1,x_2$ 是方程 $2x^2-ax+1=0$ 的两个不同正解，

则 $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{a}{2} & ① \\ x_1x_2=\frac{1}{2} & ② \end{cases}$，且 $\begin{cases} \frac{a}{2}>0 \\ \Delta=a^2-8>0 \end{cases} \Rightarrow a>2\sqrt{2}$.

(6 分)

由①，②可得 $x_1-x_2=x_1-\frac{1}{2x_1}$，$x_1+x_2-a=x_1+x_2-2(x_1+x_2)=-(x_1+x_2)=-\left(x_1+\frac{1}{2x_1}\right)$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)=\ln x_1+x_1^2-ax_1-\ln x_2-x_2^2+ax_2=\ln\frac{x_1}{x_2}+(x_1-x_2)(x_1+x_2-a)=\ln(2x_1^2)-\left(x_1-\frac{1}{2x_1}\right)\left(x_1+\frac{1}{2x_1}\right)=\ln(2x_1^2)-\left(x_1^2-\frac{1}{4x_1^2}\right)$

$=\ln(2x_1^2)+\frac{1-4x_1^4}{4x_1^2}$.

又 $\because x_1<x_2$ 且 $x_1+x_2=\frac{a}{2}$，

$\therefore 0<x_1<\frac{a}{4}$.　　(8 分)

令 $2x_1^2=t\left(0<t<\frac{a^2}{8}\right)$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\ln t+\frac{1-t^2}{2t}$.

构造函数 $h(t)=\ln t+\frac{1-t^2}{2t}\left(0<t<\frac{a^2}{8}\right)$，

$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1+t^2}{2t^2}=\frac{-(t-1)^2}{2t^2}\leqslant 0$，

$\therefore h(t)$ 是 $\left(0,\frac{a^2}{8}\right)$ 上的减函数.　　(10 分)

$\therefore h(t)>h\left(\frac{a^2}{8}\right)$，且 $t\to\frac{a^2}{8}$ 时，$h(t)\to h\left(\frac{a^2}{8}\right)$，

$h\left(\frac{a^2}{8}\right)=\ln\frac{a^2}{8}+\frac{64-a^4}{16a^2}$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>\ln\frac{a^2}{8}+\frac{64-a^4}{16a^2}$.　　(12 分)