高三数学 10 月月考试卷

一、选择题（共 8 小题；共 40 分）

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x<2\}$，$B=\{x|\lg(x-1)>0\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$ (　　)

A. $\{x|1<x<2\}$　　B. $\{x|1\le x<2\}$

C. $\{x|x<2\}$　　D. $\{x|x\le 1\}$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0,\\ \cos x, & x\le 0,\end{cases}$ 则下列结论正确的是 (　　)

A. $f(x)$ 是偶函数　　B. $f(x)$ 是增函数

C. $f(x)$ 是周期函数　　D. $f(x)$ 的值域为 $[-1,+\infty)$

3. 若 $a<0$，$b<0$，则 $p=\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}$ 与 $q=a+b$ 的大小关系为 (　　)

A. $p<q$　　B. $p\le q$　　C. $p>q$　　D. $p\ge q$

4.一元二次方程 $ax^2+2x+1=0(a\ne 0)$ 有一个正根和一个负根的一个充分不必要条件是(　　)

A.$a<0$　　B.$a>0$

C.$a<-1$　　D.$a>1$

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，则其前 3 项的和 S_3 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

C. $[3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

6. $\triangle ABC$ 中，$a=1$，$b=\sqrt{3}$，$A=30^\circ$，则 B 等于 (　　)

A. 60°　　B. 60° 或 120°　　C. 30° 或 150°　　D. 120°

7. 将函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\varphi\left(0<\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位长度，所得的图象关于 y 轴对称，则 $\varphi=$ (　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x\ln(1+x)+x^2, & x\ge 0\\ -x\ln(1-x)+x^2, & x<0\end{cases}$，若 $f(-a)+f(a)\le 2f(1)$，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　B. $[-1,0]$

C. $[0,1]$　　D. $[-1,1]$

二、填空题（共 6 小题；共 30 分）

9. 集合 $M=\{(x,y)|2x-y=1\}$，$N=\{(x,y)|3x+y=0\}$，则 $M\cap N=$________

10. 能够说明“设 a，b 是任意实数，若 $a^2<b^2$，则 $a<b$”是假命题的一组整数 a，b 的值依次为________.

11. 已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，且满足 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$____________，$|\vec{a}+2\vec{b}|=$________.

12. 设命题 p：实数 x 满足 $x^2-4ax+3a^2<0$，其中 $a<0$；命题 q：实数 x 满足 $x^2+2x-8>0$，且 q 是 p 的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是________.

13. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n>0$，$n=1,2,\cdots$，且 $a_5\cdot a_{2n-5}=2^{2n}(n\geq 3)$，则当 $n\geq 1$ 时，$\log_2 a_1+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{2n-1}=$ ________.

14. 若曲线 $C_1: y=ax^2(a>0)$ 与曲线 $C_2: y=\mathrm{e}^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在公共点，则 a 的取值范围为________.

三、解答题（共 6 小题；共 80 分）

15. 已知在 $\triangle ABC$ 中，三边长 a，b，c 依次成等差数列.

（1）若 $\sin A:\sin B=3:5$，求三个内角中最大角的度数；

（2）若 $b=1$ 且 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=b^2-(a-c)^2$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 已知集合 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|(x-2)(x-3)<0\}$，函数 $y=\lg\frac{x-(a^2+2)}{a-x}$ 的定义域为集合 B.

（1）若 $a=\frac{1}{2}$，求集合 $A\cap(\complement_U B)$；

（2）设 $p: x\in A$，$q: x\in B$，若 q 是 p 的必要条件，求实数 a 的取值范围.

17. 某租赁公司拥有汽车 100 辆．当每辆车的月租金为 3000 元时，可全部租出．当每辆车的月租金每增加 50 元时，未租出的车将会增加一辆．租出的车每辆每月需要维护费 150 元，未租出的车每辆每月需要维护费 50 元.

（1）当每辆车的月租金定为 3600 元时，能租出多少辆车?

（2）当每辆车的月租金定为多少元时，租赁公司的月收益最大?最大月收益是多少?

18. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=3$，前 3 项和 $S_3=\frac{13}{3}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)(A>0,0<\varphi<\pi)$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 处取得最大值，且最大值为 a_3，求函数 $f(x)$ 的解析式.

19. 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{(x-1)^2}{2}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）证明：当 $x>1$ 时，$f(x)<x-1$；

（3）确定实数 k 的所有可能取值，使得存在 $x_0>1$，当 $x\in(1,x_0)$，恒有 $f(x)>k(x-1)$.

20. 给定无穷数列 $\{a_n\}$，若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $|b_n-a_n|\leq 1$，则称 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$“接近”.

（1）设 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，$b_n=a_{n+1}+1$，$n\in\mathbf{N}^*$，判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近，并说明理由；

（2）设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，$a_4=8$，$\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列，记集合 $M=\{x|x=b_i,i=1,2,3,4\}$，求 M 中元素的个数 m；

（3）已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列．若存在数列 $\{b_n\}$ 满足：$\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近，且在 b_2-b_1，b_3-b_2，$\cdots$，$b_{201}-b_{200}$ 中至少有 100 个为正数，求 d 的取值范围.

答案

第一部分

1. C　【解析】$B=\{x|x>2\}$，

所以 $\complement_U B=\{x|x\le 2\}$，

所以 $A\cap(\complement_U B)=\{x|x<2\}$.

2. D

3. B　【解析】由题意得

$$\begin{aligned} p-q&=\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}-a-b\\ &=\frac{b^2-a^2}{a}+\frac{a^2-b^2}{b}\\ &=(a^2-b^2)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\\ &=\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}, \end{aligned}$$

因为 $a<0$，$b<0$，所以 $a+b<0$，$ab>0$，

又 $(a-b)^2\ge 0$，所以 $p-q\le 0$，当 $a=b$ 时取等号.

4. C　【解析】设 $f(x)=ax^2+2x+1$，注意到 $f(0)=1>0$ 且方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$ 有两个不相等实数根的条件为 $\Delta>0$，即 $a<1$，所以方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充要条件为 $a<0$.

5. D

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

因为等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$.

所以 $S_3=a_1+a_2+a_3=a_2\left(1+q+\frac{1}{q}\right)=1+q+\frac{1}{q}$.

所以当公比 $q>0$ 时，$S_3=1+q+\frac{1}{q}\ge 1+2\sqrt{q\cdot\frac{1}{q}}=3$；

当公比 $q<0$ 时，

$$\begin{aligned} S_3&=1-\left(-q-\frac{1}{q}\right)\\ &=1-\left[(-q)+\left(-\frac{1}{q}\right)\right]\\ &\le 1-2\sqrt{(-q)\cdot\left(-\frac{1}{q}\right)}\\ &=-1. \end{aligned}$$

所以 $S_3\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

6. B　【解析】由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

所以 $\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sin B}$，

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $0<B<\pi$，

所以 $B=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

7. A 【解析】$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\to$[得到]向左平移$\varphi$个单位$f(x+\varphi)=2\sin\left(2x+2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$,

因为 $f(x+\varphi)$ 关于 y 轴对称，所以 $2\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{2k+1}{2}\pi$，$(k\in\mathbf{Z})$，

因为 $0<\varphi\le\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

8. D 【解析】函数 $f(x)=\begin{cases}x\ln(1+x)+x^2, & x\ge 0\\ -x\ln(1-x)+x^2, & x<0\end{cases}$,

将 x 换为 $-x$，函数值不变，即有 $f(x)$ 图象关于 y 轴对称，

即 $f(x)$ 为偶函数，有 $f(-x)=f(x)$，

当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=x\ln(1+x)+x^2$ 的导数为 $f'(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}+2x\ge 0$，

则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 递增，

$f(-a)+f(a)\le 2f(1)$，即为 $2f(a)\le 2f(1)$，

可得 $f(|a|)\le f(1)$，可得 $|a|\le 1$，解得 $-1\le a\le 1$.

第二部分

9. $\left\{\left(\frac{1}{5},-\frac{3}{5}\right)\right\}$

【解析】联立 M 与 N 中两方程得：$\begin{cases}2x-y=1,\\ 3x+y=0.\end{cases}$,

解得：$\begin{cases}x=\frac{1}{5}\\ y=-\frac{3}{5},\end{cases}$,

则 $M\cap N=\left\{\left(\frac{1}{5},-\frac{3}{5}\right)\right\}$.

10. -1，-2

【解析】$a^2<b^2\Leftrightarrow |a|<|b|$，

令 $a=-1$，$b=-2$，则 $a^2<b^2$，但 $a>b$，

故 $a=-1$，$b=-2$ 能说明“若 $a^2<b^2$，则 $a<b$”是假命题.

11. 1，$2\sqrt{3}$

【解析】$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=2\times 1\times\frac{1}{2}=1$；

$$\begin{aligned}|\vec{a}+2\vec{b}| &=\sqrt{(\vec{a}+2\vec{b})^2}\\ &=\sqrt{|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}\\ &=\sqrt{4+4\times 1+4\times 1}\\ &=2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

12. $(-\infty,-4]$

【解析】不等式 $x^2-4ax+3a^2<0$ 的解集为 $A=(3a,a)(a<0)$，不等式 $x^2+2x-8>0$ 的解集为 $B=\{x|\,x<-4$ 或$x>2\}$，因为 q 是 p 的必要不充分条件，则 $A\subsetneqq B$，故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-4]$.

13. n^2

【解析】由等比数列的性质可得 $a_n^2=a_5\cdot a_{2n-5}=2^{2n}=(2^n)^2$，

因为 $a_n > 0$，

所以 $a_n = 2^n$，

故数列首项 $a_1 = 2$，公比 $q = 2$，

故

$$
\begin{aligned}
& \log_2 a_1 + \log_2 a_3 + \cdots + \log_2 a_{2n-1} \\
= & \log_2 a_1 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_{2n-1} \\
= & \log_2 (a_1)^n q^{0+2+4+\cdots+2n-2} \\
= & \log_2 2^n \cdot 2^{\frac{n(0+2n-2)}{2}} \\
= & \log_2 2^{n+n^2-n} \\
= & \log_2 2^{n^2} = n^2.
\end{aligned}
$$

14. $\left[\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$

【解析】由题意知方程 $ax^2 = e^x (a > 0)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解，则 $a = \frac{e^x}{x^2}$，$x \in (0, +\infty)$，令 $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$，$x \in (0, +\infty)$，则 $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$，$x \in (0, +\infty)$.

当 $0 < x < 2$ 时，$f'(x) < 0$，函数 $f(x)$ 是减函数；当 $x > 2$ 时，$f'(x) > 0$，函数 $f(x)$ 是增函数，所以当 $x = 2$ 时，函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上取得最小值，最小值为 $f(2) = \frac{e^2}{4}$，所以 $a \geq \frac{e^2}{4}$.

第三部分

15.（1） a, b, c 依次成等差数列，得 $2b = a + c$

又 $\sin A : \sin B = 3 : 5$，$\therefore a : b = 3 : 5$

设 $\therefore a = 3k, b = 5k$，则 $\therefore c = 7k \therefore$ 最大角为 C

由 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = -\frac{1}{2}$，得 $C = 120^\circ$

（2） 由 $b = 1, a + c = 2$

又由 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - (a-c)^2$ 得 $ac \cdot \cos B = b^2 - (a-c)^2$

$\because b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B, \therefore \cos B = \frac{2}{3}$

$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 从而 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{5}}{20}$

16.（1） 由题知集合 $A = \{x | 2 < x < 3\}$.

因为 $a = \frac{1}{2}$,

所以 $y = \lg \frac{x-(a^2+2)}{a-x} = \lg \frac{x-\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}-x}$,

由 $\frac{x-\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}-x} > 0$，可得集合 $B = \left\{x \middle| \frac{1}{2} < x < \frac{9}{4}\right\}$,

所以 $\complement_U B = \left\{x \middle| x \leq \frac{1}{2} \text{或} x \geq \frac{9}{4}\right\}$,

故 $A \cap (\complement_U B) = \left\{x \middle| \frac{9}{4} \leq x < 3\right\}$.

（2） 因为 q 是 p 的必要条件等价于 p 是 q 的充分条件，

所以 $A \subseteq B$.

因为集合 B 应满足 $\frac{x-(a^2+2)}{a-x} > 0$，$a^2 + 2 - a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$,

所以集合 $B=\{x|\,a<x<a^2+2\}$．又集合 $A=\{x|\,2<x<3\}$，所以 $\begin{cases}a\le 2,\\ a^2+2\ge 3,\end{cases}$ 即 $a\le -1$ 或 $1\le a\le 2$，

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[1,2]$．

17.（1）当每辆车的月租金定为 3600 元时，未租出的车辆数为 $\frac{3600-3000}{50}=12$，所以这时租出了 88 辆车．

（2）设每辆车的月租金定为 x 元，则租赁公司的月收益为 $f(x)=\left(100-\frac{x-3000}{50}\right)(x-150)-\frac{x-3000}{50}\times 50$，整理得 $f(x)\ =-\frac{x^2}{50}+162x-21000=-\frac{1}{50}(x-4050)^2+307050$. 所以，当 $x=4050$ 时，$f(x)$ 最大，最大值为 $f(4050)=307050$，

即当每辆车的月租金定为 4050 元时，租赁公司的月收益最大，最大月收益为 307050 元．

18.（1）由 $q=3$，$S_3=\frac{13}{3}$ 得

$$\frac{a_1(1-3^3)}{1-3}=\frac{13}{3},$$

解得

$$a_1=\frac{1}{3}.$$

所以

$$a_n=\frac{1}{3}\times 3^{n-1}=3^{n-2}.$$

（2）由（1）可知 $a_n=3^{n-2}$ ，所以

$$a_3=3;$$

因为函数 $f(x)$ 的最大值为 3 ，所以

$$A=3;$$

因为当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时 $f(x)$ 取最大值，所以

$$\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1.$$

又 $0<\varphi<\pi$ ，故

$$\varphi=\frac{\pi}{6}.$$

所以函数 $f(x)$ 的解析式为

$$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right).$$

19.（1）$f'(x)=\frac{1}{x}-x+1=\frac{-x^2+x+1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$．

由 $f'(x)>0$，得 $\begin{cases}x>0,\\ -x^2+x+1>0,\end{cases}$ 解得 $0<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

（2）令 $F(x)=f(x)-(x-1)$，$x\in(0,+\infty)$，则有 $F'(x)=\frac{1-x^2}{x}$.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，

所以 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，故当 $x>1$ 时，$F(x)<F(1)=0$，即当 $x>1$ 时，$f(x)<x-1$.

（3）由（2）知，当 $k=1$ 时，不存在 $x_0>1$ 满足题意.

当 $k>1$ 时，对于 $x>1$，有 $f(x)<x-1<k(x-1)$，则 $f(x)<k(x-1)$，从而不存在 $x_0>1$ 满足题意.

当 $k<1$ 时，令 $G(x)=f(x)-k(x-1)$，$x\in(0,+\infty)$，则有 $G'(x)=\frac{1}{x}-x+1-k=\frac{-x^2+(1-k)x+1}{x}$.

由 $G'(x)=0$，得 $-x^2+(1-k)x+1=0$，解得

$$x_1=\frac{1-k-\sqrt{(1-k)^2+4}}{2}<0, x_2=\frac{1-k+\sqrt{(1-k)^2+4}}{2}>1.$$

当 $x\in(1,x_2)$ 时，$G'(x)>0$，故 $G(x)$ 在 $[1,x_2)$ 内单调递增.

从而当 $x\in(1,x_2)$ 时，$G(x)>G(1)=0$，即 $f(x)>k(x-1)$.

综上，k 的取值范围是 $(-\infty,1)$.

20.（1）$a_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$，$b_n=\frac{1}{2^n}+1$，$|b_n-a_n|=\left|\frac{1}{2^n}+1-\frac{1}{2^{n-1}}\right|=\left|1-\frac{1}{2^n}\right|$，

所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 有 $|b_n-a_n|=1-\frac{1}{2^n}<1$，所以 $\{b_n\}$ 与 a_n 接近.

（2）由“接近”定义知，$a_n-1\le b_n\le a_n+1$，

故 $b_1\in[0,2]$，$b_2\in[1,3]$，$b_3\in[3,5]$，$b_4\in[7,9]$，

所以 b_1 与 b_2 可能相等，b_2 与 b_3 可能相等，但 b_1，b_2，b_3 不能全相等，

所以 $m=3$ 或 4.

（3）$a_n=a_1+(n-1)d$.

若 $d>0$，取 $b_n=a_n$，则 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 有 $b_{n+1}-b_n=a_{n+1}-a_n=d>0$，

所以 b_2-b_1，…，$b_{201}-b_{200}$ 中有 200 个正数，符合题意；

若 $d=0$，取 $b_n=a_n-\frac{1}{n}$，则 $|b_n-a_n|=\left|\left(a_n-\frac{1}{n}\right)-a_n\right|=\frac{1}{n}\le 1$，

且 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 有 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}>0$，符合题意；

若 $d<0$ 且 $d>-2$，令 $b_{2n-1}=a_{2n-1}-1$，$b_{2n}=a_{2n}+1$，

则 $b_{2n}-b_{2n-1}=(a_{2n}+1)-(a_{2n-1}-1)=2+d>0$，

故 b_2-b_1，…，$b_{201}-b_{200}$ 中恰有 100 个正数，符合题意；

若 $d\le -2$，则若存在 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近，有 $a_n-1\le b_n\le a_n+1$，

且 $a_{n+1}-1\le b_{n+1}\le a_{n+1}+1$，所以 $b_{n+1}-b_n\le(a_{n+1}+1)-(a_n-1)$，

所以 $b_{n+1}-b_n\le 2+d\le 0$，故 b_2-b_1，…，$b_{201}-b_{200}$ 中无正数.

综上，d 的取值范围为 $(-2,+\infty)$.