

第 36 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题及参考解答

2019 年 10 月 26 日, 浙江杭州

说明: 所有解答必须写在答题纸上, 写在试题纸上的无效

一、(40 分) 新型号汽车在出厂前都要通过破坏性试验。在某次汽车试验中, 一个汽车轮子的三根辐条被抽掉了其中一根。轮子的横截面如图 1.1 所示。该轮子可视为内、外半径分别为  $R_1=4R_0/5$ ,  $R_0$  的轮盘和两根辐条组成 (假设轮盘可视为均匀环形圆盘, 辐条可视为均匀细杆), 每根辐条的质量为  $m$ , 轮盘的质量为  $M=8m$ 。轮子从图示位置由静止开始释放, 释放时轮子上两根辐条所张角的平分线恰好水平, 此后该轮子在水平地面上做纯滚动。试求:

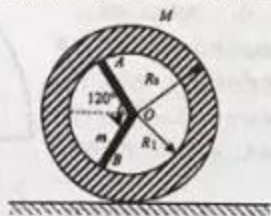


图 1.1

- (1) 刚释放时轮子的角加速度;
- (2) 释放后辐条  $OB$  首次转到竖直位置时, 轮子的角加速度、地面对轮子的摩擦力和支持力。

参考解答:

轮盘对通过  $O$  且与轮面垂直的轴的转动惯量为

$$J_{O_0} = \int_A^B \sigma \cdot 2\pi r dr \cdot r^2 = \frac{1}{2} \sigma \pi (R_0^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} M (R_0^2 + R_1^2)$$

两根辐条对该  $O$  轴的转动惯量为

$$J_{O_1} = \frac{1}{3} m R_0^2 \times 2$$

轮子对  $O$  轴的总转动惯量为

$$J_O = J_{O_0} + J_{O_1} = \frac{1}{6} (3M + 4m) R_0^2 + \frac{1}{2} M R_0^2 = \frac{524}{75} m R_0^2 \quad (1.1) \quad 4 \text{分}$$

以轮子中心  $O$  为坐标原点, 建立如解图 1.1 所示的坐标系, 则轮子质心  $C$  的位置为

$$x_C = \frac{(M+3m) \cdot 0 + (-m) \cdot \left(-\frac{R_0}{2}\right)}{M+2m} = \frac{m}{2(M+2m)} R_0 = \frac{R_0}{25}$$

令  $M' = M + 2m = 10m$

$$x_C = \frac{(M'+m) \cdot 0 + (-m) \cdot \left(-\frac{R_0}{2}\right)}{M'} = \frac{m}{2M'} R_0 = \frac{R_0}{25} \quad (1.2) \quad 2 \text{分}$$

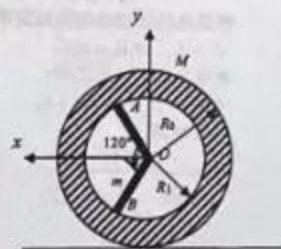
利用平行轴定理, 可求得轮子对质心  $C$  且与轮面垂直轴的转动惯量为

$$J_C = J_O - M' x_C^2 = \frac{2614}{375} m R_0^2 \quad (1.3) \quad 2 \text{分}$$

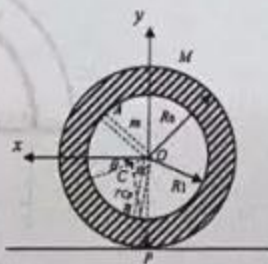
当辐条  $OB$  从初始位置转到竖直位置的过程中, 任一位置对轮子在地面做纯滚动的瞬时轴  $P$  的转动惯量为

$$J_P = J_C + M' x_C^2 = J_C + M' \left( R_0^2 + x_C^2 - 2R_0 x_C \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right) = J_C + M' (R_0^2 + x_C^2 - 2R_0 x_C \sin\theta) \quad (1.4) \quad 2 \text{分}$$

其中  $\theta$  为质心从起始位置到当前位置所转过的角度, 具体



解图 1.1



解图 1.2

见解图 1.2 所示

根据机械能守恒定律

$$\frac{1}{2} J_P \omega^2 = M' g \cdot x_C \sin\theta \quad (1.5) \quad 2 \text{分}$$

$$\omega^2 = \frac{2M' g \cdot x_C \sin\theta}{J_P}$$

将相对于瞬时轴  $P$  点的转动惯量代入上述的转动方程, 再对方程两边求导数, 可以求出角加速度

$$\frac{1}{2} \omega^2 (-M' 2R_0 x_C \cos\theta \cdot \omega) + J_P \omega \alpha = M' g \cdot x_C \cos\theta \cdot \omega$$

$$\alpha = \frac{M' x_C \cos\theta (g + \omega^2 R_0)}{J_P} \quad (1.6) \quad 4 \text{分}$$

(1) 刚释放时轮子时,  $\theta = 0^\circ$ , 则轮子对瞬时轴  $P$  的转动惯量

$$J_P = J_C + M' R_0^2 = \frac{2614}{375} m R_0^2 + 10m (R_0^2 + x_C^2) = \frac{1274}{75} m R_0^2$$

$$\alpha = \frac{M' g \cdot x_C}{J_P} = \frac{15g}{637R_0} \quad (1.7) \quad 2 \text{分}$$

或者直接用对任意瞬时轴  $P$  点的转动定律求解

$$\frac{dL_P}{dt} = \vec{M}_P + \vec{r}_{PC} \times (-M' \vec{a}_P)$$

但此时轮子刚开始转动, 角速度为零, 对与地面接触点加速度  $\vec{a}_P$  为零, 故有

$$J_P \alpha = M' g \cdot x_C$$

则此时的转动角加速度

$$\alpha = \frac{M' g \cdot x_C}{J_P} = \frac{15g}{637R_0}$$

(2) 当辐条  $OB$  转到竖直位置时,  $\theta = 30^\circ$ , 代入上述表达式得

$$J_P = J_C + M' (R_0^2 + x_C^2 - 2R_0 x_C \sin\theta) = \frac{1244}{75} m R_0^2$$

$$\omega^2 = \frac{2M' g \cdot x_C \sin\theta}{J_P} = \frac{15g}{622R_0} \quad (1.8) \quad 2 \text{分}$$

$$\alpha = \frac{M' x_C \cos\theta (g + \omega^2 R_0)}{J_P} = \frac{9555\sqrt{3}g}{773768R_0} \quad (1.9) \quad 2 \text{分}$$

根据题意, 轮子中心相对地面的加速度和质心相对轮子中心的加速度分别为

$$a_O = \alpha R_0, \quad a'_{CO} = \alpha x_C, \quad a''_{CO} = \omega^2 x_C \quad (1.10) \quad 6 \text{分}$$

质心相对地面参考系的加速度, 具体见解图 1.3

$$a_C = a_O - a'_{CO} \sin\theta - a''_{CO} \cos\theta \quad (1.11) \quad 4 \text{分}$$

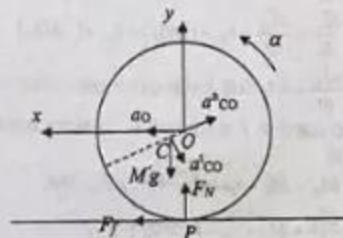
$$a_C = a''_{CO} \sin\theta - a'_{CO} \cos\theta$$

根据质心运动定律可求此时的摩擦力和支持力

$$M' a_C = F_f \quad (1.12) \quad 4 \text{分}$$

$$M' a_O = F_N - M' g$$

联合以上各式可解得:



解图 1.3

$$F_f = \frac{89907\sqrt{3}}{773768} mg$$

(1.13) 4分

$$F_N = \frac{7735679}{773768} mg$$

上述结果可以用另一种解法： $J_C \alpha = F_N \cdot x_C \cos \theta - F_f \cdot (R_0 - x_C \sin \theta)$ 来检查验证？

【附件】： $\frac{dL_P}{dt} = \vec{M}_P + \vec{r}_{PC} \times (-M\vec{a}_P)$ 的证明

相对质心的角动量可写为

$$\vec{L}_C = \sum \vec{r}_{Ci} \times m_i \vec{v}_{Ci} = \sum (\vec{r}_{CP} + \vec{r}_{Pi}) \times m_i \vec{v}_{Ci}$$

$$\vec{L}_C = \vec{r}_{CP} \times \sum m_i \vec{v}_{Ci} + \sum \vec{r}_{Pi} \times m_i \vec{v}_{Ci}$$

相对质心，质点系的总动量始终有

$$\sum m_i \vec{v}_{Ci} = 0$$

同时  $\vec{v}_{Ci} = \vec{v}_{CP} + \vec{v}_{Pi}$

$$\vec{L}_C = \sum \vec{r}_{Pi} \times m_i \vec{v}_{CP} + \sum \vec{r}_{Pi} \times m_i \vec{v}_{Pi}$$

第二项即为质点系相对任意瞬时轴 P 点的角动量

$$\vec{L}_P = \sum \vec{r}_{Pi} \times m_i \vec{v}_{Pi}$$

$$\text{而 } \sum \vec{r}_{Pi} \times m_i \vec{v}_{CP} = \left( \sum m_i \vec{r}_{Pi} \right) \times \vec{v}_{CP}$$

$$\vec{r}_{Pi} = \vec{r}_{Ci} - \vec{r}_{CP} = \vec{r}_{Ci} + \vec{r}_{PC}$$

$$\sum m_i \vec{r}_{Pi} = \sum m_i (\vec{r}_{Ci} + \vec{r}_{PC}) = \vec{r}_{PC} \sum m_i + \sum m_i \vec{r}_{Ci}$$

$$\sum m_i \vec{r}_{Ci} = 0, \quad \sum m_i = M, \quad \text{因此有}$$

$$\vec{L}_C = \vec{L}_P + M \vec{r}_{PC} \times \vec{v}_{CP}$$

$$\text{即 } \vec{L}_P = \vec{L}_C - M \vec{r}_{PC} \times \vec{v}_{CP}$$

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \frac{d\vec{L}_C}{dt} - M \frac{d\vec{r}_{PC}}{dt} \times \vec{v}_{CP} - M \vec{r}_{PC} \times \frac{d(\vec{v}_{CP} - \vec{v}_{C})}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}_{PC}}{dt} = \vec{v}_{PC} = -\vec{v}_{CP}, \quad \frac{d\vec{v}_{CP}}{dt} = \vec{a}_P, \quad \frac{d\vec{v}_{C}}{dt} = \vec{a}_C$$

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \frac{d\vec{L}_C}{dt} + \vec{r}_{PC} \times (M\vec{a}_C) + \vec{r}_{PC} \times (-M\vec{a}_P)$$

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \vec{M}_C \text{ 为外力对质心的合力矩, } M\vec{a}_C = \vec{F}, \text{ 为合外力, } \vec{r}_{PC} \times \vec{F} \text{ 相当于将 } \vec{F} \text{ 的作用点从}$$

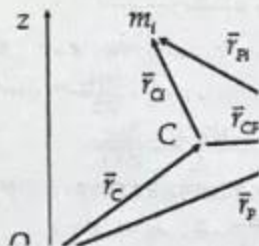
C 点移动到 P 点的附加力矩, 这两项之和就等于外力对任意瞬时轴 P 点的合力矩  $\vec{M}_P$ ,

即

$$\vec{M}_P = \vec{M}_C + \vec{r}_{PC} \times \vec{F}, \text{ 代入上式, 得到}$$

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \vec{M}_P + \vec{r}_{PC} \times (-M\vec{a}_P)$$

这就是对任意瞬时轴 P 点的转动定律, 证毕。



二、(40分) 一个长为  $l$ 、内外半径分别为  $a$  和  $b$  的半圆柱体由两种不同的耗损电介质构成, 它们的相对介电常数和电导率分别

为:  $\epsilon_1$  和  $\sigma_1$  ( $0 \leq \varphi < \theta_0$  区域),  $\epsilon_2$  和  $\sigma_2$

( $\theta_0 < \varphi \leq \pi$  区域), 其横截面如图 2.1

所示。在半圆柱两侧底部镀有金属膜, 两

金属膜间加有直流电压  $V_0$ , 并达到稳

定。已知真空介电常量为  $\epsilon_0$ , 两种介质的

相对介电常数大, 电导率小, 忽略边缘效

应。

(1) 求介质内电场强度和电势的分布;

(2) 求  $\varphi = \theta_0$  界面处的总电荷;

(3) 分别计算  $0 \leq \varphi < \theta_0$  和  $\theta_0 < \varphi \leq \pi$  两

介质区域的电阻和电容;

(4) 在  $t=0$  时刻断开电源, 求随后的

两金属膜间电压随时间的变化 (此过程可视为似稳过程), 并画出相应的等效电路图。

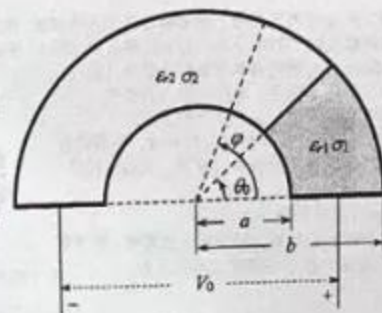


图 2.1

参考解答:

(1) 考虑某一半径为  $r$  的半圆周。

设两介质区域沿角向的电场强度和电位移矢量大小分别为:

$$0 \leq \varphi < \theta_0: E_1 \text{ 和 } D_1,$$

$$\theta_0 < \varphi \leq \pi: E_2 \text{ 和 } D_2,$$

根据电流连续性和欧姆定律微分形式有:

$$J_1 = J_2, \quad \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \quad (2.1) \quad 2 \text{分}$$

两电介质上电压之和:

$$E_1 r \theta_0 + E_2 r (\pi - \theta_0) = V_0 \quad (2.2) \quad 2 \text{分}$$

联立解得:

$$E_1 = \frac{V_0}{\left[ \theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\pi - \theta_0) \right] r} \quad (2.3) \quad 2 \text{分}$$

$$E_2 = \frac{V_0}{\left[ \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \theta_0 + (\pi - \theta_0) \right] r} \quad (2.4) \quad 2 \text{分}$$

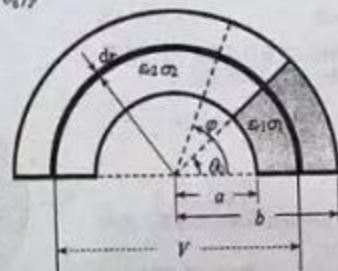


图 2.2

在  $0 \leq \varphi < \theta_0$  区域的电势 (假设负极板电势为 0):

$$V_\varphi = V_0 - E_1 r \varphi = \frac{(\theta_0 - \varphi) + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\pi - \theta_0)}{\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\pi - \theta_0)} V_0 \quad (2.5) \quad 2 \text{分}$$

在  $\theta_0 < \varphi \leq \pi$  区域的电势

$$V_\varphi = V_0 - E_1 r \theta_0 - E_2 r (\varphi - \theta_0) = \left[ 1 - \frac{\theta_0}{\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\pi - \theta_0)} - \frac{(\varphi - \theta_0)}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \theta_0 + (\pi - \theta_0)} \right] V_0 = \frac{\pi - \varphi}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \theta_0 + (\pi - \theta_0)} V_0 \quad (2.6) \quad 2 \text{分}$$

(2) 在  $\varphi = \theta_0$  的界面上的总电荷密度:

$$\sigma_s = \epsilon_0 (E_2 - E_1)$$

$$= \frac{\epsilon_0 V_0}{[\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \theta_0 + (\pi - \theta_0)] r} - \frac{\epsilon_0 V_0}{[\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\pi - \theta_0)] r} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} \frac{\epsilon_0 V_0}{r} \quad (2.7) \quad 4 \text{分}$$

在  $\varphi = \theta_0$  的界面上的总电荷:

$$Q = \int_a^b \sigma_s l dr = \frac{\epsilon_0 (\sigma_1 - \sigma_2) l \ln \frac{b}{a}}{[\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\pi - \theta_0)]} V_0 \quad (2.8) \quad 4 \text{分}$$

(3)  $0 \leq \varphi < \theta_0$  区域的电容  $C_1$ : 设右极板上  $r$  处的自由电荷密度为  $\sigma_{01}$ , 则有:

$$\sigma_{01} = D_1 = \epsilon_0 \epsilon_1 E_1 = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 V_0}{[\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\pi - \theta_0)] r} \quad (2.9)$$

则右极板上总的自由电荷:

$$Q_{01} = \int_a^b \sigma_{01} l dr = \int_a^b \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 V_0}{[\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\pi - \theta_0)] r} dr = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 V_0 l}{[\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\pi - \theta_0)]} \ln \frac{b}{a} \quad (2.10)$$

$\varphi = 0 - \theta_0$  之间电势差:

$$V_{10} = E_1 \theta_0 r = \frac{\theta_0 V_0}{[\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\pi - \theta_0)]} \quad (2.11)$$

所以  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{Q_{01}}{V_{10}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 l}{\theta_0} \ln \frac{b}{a} \quad (2.12) \quad 3 \text{分}$$

$\theta_0 < \varphi \leq \pi$  区域的电容  $C_2$ : 设左极板上  $r$  处的自由电荷密度为  $\sigma_{02}$ , 则有:

$$\sigma_{02} = D_2 = \epsilon_0 \epsilon_2 E_2 = \frac{\epsilon_2 \epsilon_0 V_0}{[\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \theta_0 + (\pi - \theta_0)] r} \quad (2.13)$$

则左极板上的自由电荷:

$$Q_{02} = \int_a^b \sigma_{02} l dr = \frac{\epsilon_2 \epsilon_0 V_0 l}{[\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \theta_0 + (\pi - \theta_0)]} \ln \frac{b}{a} \quad (2.14)$$

$\varphi = \theta_0 - \pi$  之间电势差:

$$V_{20} = E_2 (\pi - \theta_0) r = \frac{(\pi - \theta_0) V_0}{[\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \theta_0 + (\pi - \theta_0)]} \quad (2.15)$$

所以  $C_2$ :

$$C_2 = \frac{Q_{02}}{V_{20}} = \frac{\epsilon_2 \epsilon_0 l}{(\pi - \theta_0)} \ln \frac{b}{a} \quad (2.16) \quad 3 \text{分}$$

$0 \leq \varphi < \theta_0$  区域的电阻  $R_1$ : 同样考虑  $r$  处厚度为  $dr$  的半圆壳

$$\text{其电导为: } dG_1 = \sigma_1 \frac{l dr}{\theta_0 r}, \quad G_1 = \int_a^b \sigma_1 \frac{l dr}{\theta_0 r} = \frac{\sigma_1 l}{\theta_0} \ln \frac{b}{a} \quad (2.17)$$

$$\text{电阻: } R_1 = \frac{1}{G_1} = \frac{\theta_0}{\sigma_1 l \ln \frac{b}{a}} \quad (2.18) \quad 3 \text{分}$$

$\theta_0 < \varphi \leq \pi$  区域的电阻  $R_2$ : 同样考虑  $r$  处厚度为  $dr$  的半圆壳

$$\text{其电导为: } dG_2 = \sigma_2 \frac{l dr}{(\pi - \theta_0) r}; \quad G_2 = \int_a^b \sigma_2 \frac{l dr}{(\pi - \theta_0) r} = \frac{\sigma_2 l}{(\pi - \theta_0)} \ln \frac{b}{a} \quad (2.19)$$

$$R_2 = \frac{1}{G_2} = \frac{(\pi - \theta_0)}{\sigma_2 l \ln \frac{b}{a}} \quad (2.20) \quad 3 \text{分}$$

(4) 断开电源后, 电容对电阻放电, 其等效电路图为:

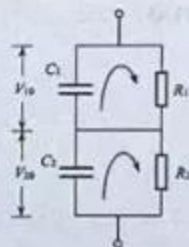


图 2.3

先考虑一个  $R_1 C_1$  电路的放电过程:

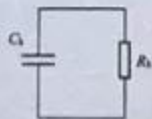


图 2.4

$$iR_1 + \frac{q}{C_1} = 0, \quad R_2 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_2} = 0, \quad \frac{dq}{q} = -\frac{1}{R_2 C_2} dt, \quad \ln q = -\frac{1}{R_2 C_2} t + c_0$$

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}, \quad V = \frac{q}{C_2} = \frac{q_0}{C_2} e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}$$

$$t=0, \quad V=V_0, \quad \therefore V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}$$

断开电源后, 形成两个独立的 RC 电路, 其电势差由  $V_{10}$  和  $V_{20}$  分别衰减到零。

对于  $R_1 C_1$  电路有:

$$R_1 C_1 = \frac{\theta_0}{\sigma_1 \ln \frac{b}{a}} \times \frac{\epsilon_{11} \epsilon_0 \int \ln \frac{b}{a} = \frac{\epsilon_{11} \epsilon_0}{\sigma_1}, \quad \frac{1}{R_1 C_1} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_{11} \epsilon_0} \quad (2.21)$$

$$V_1(t) = \frac{\theta_0 V_0}{[\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\pi - \theta_0)]} e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} \quad (2.22) \quad 2 \text{分}$$

对于  $R_2 C_2$  电路有:

$$R_2 C_2 = \frac{(\pi - \theta_0)}{\sigma_2 \ln \frac{b}{a}} \times \frac{\epsilon_{22} \epsilon_0 \int \ln \frac{b}{a} = \frac{\epsilon_{22} \epsilon_0}{\sigma_2}, \quad \frac{1}{R_2 C_2} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_{22} \epsilon_0} \quad (2.23)$$

$$V_2(t) = \frac{(\pi - \theta_0) V_0}{[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \theta_0 + (\pi - \theta_0)]} e^{-\frac{t}{R_2 C_2}} \quad (2.24) \quad 2 \text{分}$$

总电压:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = \frac{\theta_0 V_0}{[\theta_0 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\pi - \theta_0)]} e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} + \frac{(\pi - \theta_0) V_0}{[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \theta_0 + (\pi - \theta_0)]} e^{-\frac{t}{R_2 C_2}} \quad (2.25) \quad 2 \text{分}$$

三、(40分) 用超导重力仪对地球表面重力加速度的微小变化及其分布进行长时间、高精度观测, 不仅可以获得有关地幔运动、质量分布、固体潮汐、地下水和矿产分布等地球内部结构信息, 还可以获得海洋潮汐、气候变化等外部数据。超导重力仪灵敏度高 (可达地球表面重力加速度的  $10^{-8}$ )、稳定性强, 是目前地球科学领域广泛采用的重力观测装置。随着分布全球超导重力仪数目的增加、观测网络的建立和数据的共享, 为地球科学的发展和万有引力规律的精确检验等等提供了新的机遇。试就下列有关地下水分布引起的重力变化、超导重力仪原理等问题给出回答。

1. 假设地球可看成是一个半径为 6370 km 的均匀球体, 其表面重力加速度  $g_0 = 9.80 \text{ m/s}^2$  (不考虑地球自转)。现某处地下有一个直径为 20 km 充满水的球形地下湖, 其球心离地面 15 km。求地下湖正上方地表处重力加速度的微小变化  $\Delta g$ 。已知万有引力常量  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ , 水的密度  $\rho_w = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。

2. 超导重力仪的核心部件是悬浮在磁场中, 由金属铌 (Nb) 制成的超导球壳, 为计算方便, 这里简化为超导细环 (见图 3.1)。悬浮磁场由固定的亥姆霍兹 (Helmholtz) 线圈提供, 它由匝数分别为  $\alpha N$  和  $N$  的上、下两个同轴细超导线圈 ( $\alpha < 1$ ) 串联而成, 它们的半径及其中心之间的距离均为  $R$ 。超导重力仪调试前, 亥姆霍兹线圈和超导细环中的电流均为零。超导细环处在下线圈平面内 ( $z=0$ ), 且与线圈同轴。开始调试时, 外电源对亥姆霍兹线圈缓慢加上电流  $i_0$ , 在此过程中超导细环内会产生感应电流。调节  $i_0$  的大小, 使超导细环正好悬浮在上线圈平面内 ( $z=R$ ), 如图 3.1 所示。由于超导线圈和超导细环的电阻均为零 (其所在处的温度为 4.2 K), 超导环被稳定悬浮后, 移去提供超导线圈电流的电源, 超导线圈中的电流  $i_0$  以及由此产生的磁场均能长期保持稳定。已知超导细环的质量为  $m$ 、直径为  $D$  ( $D \ll 2R$ )、自感系数为  $L$ ; 在上线圈平面附近, 由亥姆霍兹线圈产生的磁感应强度  $B$  的  $z$  方向分量和径向分量分别可近似表示为:

$$\begin{cases} B_z = B_0 [1 - \beta(z-R)] \\ B_r = \frac{1}{2} \beta B_0 r \end{cases}$$

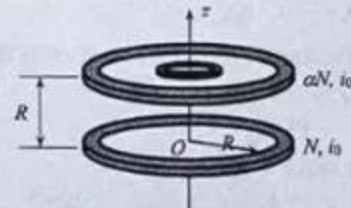


图 3.1

其中  $B_0$  为上线圈中心处的磁感应强度,  $\beta$  为径向系数,  $r$  为到轴线的距离。利用上述线圈和超导细环的已知参数, 以及线圈中的外加电流  $i_0$ , 求:

- (1)  $B_0$  和  $\beta$  的表达式;
- (2) 超导细环在平衡处 ( $z=R$ ) 的感应电流  $i_0$  的表达式;
- (3) 超导重力仪放置地的重力加速度  $g$  的表达式。

3. 为了精确测量重力加速度的微小变化, 在超导重力仪中采用了交流电桥平衡法。为了理解其原理并便于计算, 将超导细环视为面积为  $A$  的薄“平板”, 并在其上、下对称位置, 即在  $R+d/2$ 、 $R-d/2$  处, 分别固定两个形状相同、面积也为  $A$  的铝平板, 构成上极板与超导“平板”、下极板与超导“平板”两个电容器  $C_1$  和  $C_2$ , 如图 3.2 所示。再将  $C_1$  和  $C_2$  与两根完全相同的电感  $L_0$  和电容  $C_0$  连接成电桥, 并接在交流电源上 (其频率远高于重力加速度的变化快慢), 如图 3.3 所示。假设某时刻, 超导重力仪所在地的重力加速度为  $g$ , 超导细环 (超导“平板”) 处在平衡位置  $z=R$  处, 交流电桥处于平衡, 同时在  $C_1$  和  $C_2$  上加上相同的直流电压  $V_{C1}$ 。当重力加速度改变  $\Delta g$ , 导致交流电桥失衡, 将  $C_1$  上的直流电压增加  $\Delta V$ 、 $C_2$  上的直流电压减少  $\Delta V$  后, 电桥又重新达到平衡。试给出  $\Delta g$  与  $\Delta V$  的关系式 (忽

电容器的边缘效应)。

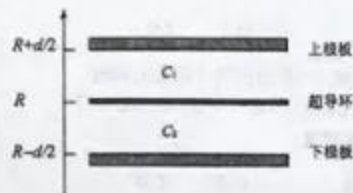


图 3.2

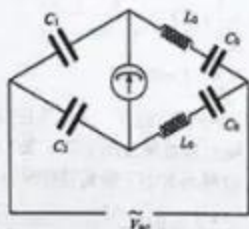
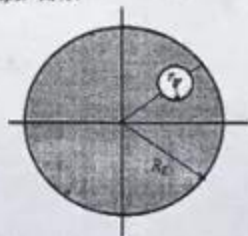


图 3.3

参考解答:

1. (8分) 设地球的平均密度为  $\rho_0$ , 则有:



$$M_E = \frac{4}{3} \pi R_e^3 \rho_0, \quad M_w = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_w$$

$$m(g_0 - \Delta g) = G \left[ \frac{M_E m}{R_e^2} - \frac{m_e m}{d^2} + \frac{M_w m}{d^2} \right] \quad (3.1) \quad 2 \text{分}$$

$$m(g_0 - \Delta g) = G \left[ \frac{4}{3} \frac{\pi R_e^3 \rho_0 m}{R_e^2} - \frac{4}{3} \frac{\pi r^3 \rho_w m}{d^2} + \frac{4}{3} \frac{\pi r^3 \rho_w m}{d^2} \right] \quad (3.2) \quad 2 \text{分}$$

$$m g_0 = G \frac{4}{3} \frac{\pi R_e^3 \rho_0 m}{R_e^2}, \quad g_0 = \frac{4}{3} \pi R_e G \rho_0,$$

$$\rho_0 = \frac{3 g_0}{4 \pi R_e G} = \frac{3 \times 9.80}{4 \pi \times 6.37 \times 10^6 \times 6.67 \times 10^{-11}} = 5.51 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad (3.3) \quad 2 \text{分}$$

$$\Delta g = G \frac{4}{3} \frac{\pi r^3 (\rho_0 - \rho_w)}{d^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{4 \pi \times (1.0 \times 10^4)^3 \times (5.51 - 1) \times 10^3}{3 \times (1.5 \times 10^4)^2} \\ = 5.60 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2 = 5.71 \times 10^{-4} g_0 \quad (3.4) \quad 2 \text{分}$$

由此可见地下水球的存在对重力加速度的影响很小。

2. (24分) (1) 我们知道单匝线圈在轴上产生的磁场:



$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.5)$$

在上线圈平面中心处磁场的  $z$  分量为上、下两线圈产生磁场的叠加:

$$B_z = B_{1z} + B_{2z} = \frac{\mu_0 \alpha N_1 I_1 R^2}{2[R^2 + (z-R)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 N_2 I_2 R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \\ = \frac{\mu_0 N_1 I_1 R^2}{2} \left\{ \frac{\alpha}{[R^2 + (z-R)^2]^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right\} \quad (3.6) \quad 4 \text{分}$$

上式中  $z-R$  是一个小量, 取一阶项近似:

当  $z-R$  很小时

$$f_1(z) = \frac{\alpha}{[R^2 + (z-R)^2]^{3/2}} \approx \frac{\alpha}{R^3}$$

(3.7) 2分

$$f_2(z) = \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \\ = \frac{1}{[(z-R)^2 + 2(z-R)R + 2R^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{(2R^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{2R}{(2R^2)^{5/2}} (z-R) + \dots$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}R^3} \left[ 1 - \frac{3}{2R} (z-R) \right]$$

(3.8) 2分

$$B_z = \frac{\mu_0 N_1 I_1 R^2}{2} \left( \frac{\alpha}{R^3} + \frac{1}{2\sqrt{2}R^3} \left[ 1 - \frac{3}{2R} (z-R) \right] \right)$$

$$= \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2R} \left( \alpha + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ 1 - \frac{3}{2R} (z-R) \right] \right)$$

$$= \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2R} \left[ \alpha + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ 1 - \frac{3}{2R(2\sqrt{2}\alpha + 1)} (z-R) \right] \right]$$

(3.9)

$$B_0 = \frac{\mu_0 N I_0}{2R} \left[ \alpha + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \quad (3.10) \quad 2 \text{分}$$

$$\beta = \frac{3}{2R(2\sqrt{2}\alpha + 1)} \quad (3.11) \quad 2 \text{分}$$

(2) 由于超导细环的电阻为零, 在其上悬浮过程中, 直至平衡在上线圈平面内, 通过其中的磁通量保持不变, 有:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0, \quad \Phi = \text{constant} \quad (3.12) \quad 2 \text{分}$$

初始条件:

$$t = 0, \quad z = 0, \quad I = 0, \quad \Phi = 0$$

上浮到  $z = R$  平衡位置附近时, 由题可知其  $B$  的  $z$  分量为:

$$B_z = B_0 [1 - \beta(z - R)]$$

超导细环在  $z = R$  处的感应电流为  $I_0$ , 有:

$$z = R, \quad LI_0 = -B_0 \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \quad (3.13) \quad 2 \text{分}$$

$$I_0 = -\frac{1}{4L} \pi D^2 B_0 = -\frac{\mu_0 N I_0 \pi D^2}{8RL} \left[ \alpha + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \quad (3.14) \quad 2 \text{分}$$

负号表示超导细环中电流与超导线圈电流方向相反。

(3) 超导细环在  $z = R$  处平衡时, 受径向磁场向上的安培力与重力平衡, 即:

$$mg = I_0 B_r \pi D \quad (3.15) \quad 3 \text{分}$$

$$mg = \frac{1}{4L} \pi D^2 B_0 \cdot \frac{1}{2} B_0 \beta r \cdot \pi D \quad (3.16)$$

$$g = \frac{\frac{1}{4L} \pi D^2 B_0 \cdot \frac{1}{2} B_0 \beta \frac{D}{2} \cdot \pi D}{m} = \frac{\beta \pi^2 D^4 B_0^2}{16Lm}$$

$$= \frac{3}{2R(2\sqrt{2}\alpha + 1)} \pi^2 D^4 \frac{\mu_0^2 N^2 I_0^2}{4R^2} \left( \alpha + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2$$

$$= \frac{3\pi^2 D^4 \mu_0^2 N^2 I_0^2}{1024LmR^2} (2\sqrt{2}\alpha + 1) \quad (3.17) \quad 3 \text{分}$$

由此可见, 已知 Helmholtz 超导线圈和悬浮的超导环参数, 通过测量  $I_0$  就可获得该地的重力加速度  $g$ 。

3. (8分) 当重力加速度为  $g$  时, 磁悬浮力与超导细环重力  $mg$  平衡, 超导细环处在上线圈平面内 ( $z = R$  处)。上极板对超导“平板”、下极板对超导“平板”的吸引力相等, 此时两电容上的电压均为  $V_C$ 。

假设上极板与下极板距离为  $d$ , 超导“平板”与下极板之间距离为  $x$ , 超导“平板”受到上下两极板之间的吸引力差为:

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A V_C^2 \left[ \frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{x^2} \right]$$

$$x = \frac{d}{2}, \quad F = 0 \quad (3.18) \quad 2 \text{分}$$

当重力加速度变化  $\Delta g$  后, 超导“平板”就会受到一个多余的向下的重力  $m\Delta g$ 。为了使其在其平衡位置重新达到平衡, 在  $C_1$  和  $C_2$  上反向加一电压  $\Delta V$ , 超导平板受到上极板的吸引力大于下极板的吸引力, 其差值:

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A \left[ \frac{(V_C + \Delta V)^2}{(d-x)^2} - \frac{(V_C - \Delta V)^2}{x^2} \right] \quad (3.19) \quad 2 \text{分}$$

达到新的平衡时:  $x = d/2$

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A 4V_C \Delta V = \frac{8\varepsilon_0 A}{d^2} V_C \Delta V = m\Delta g \quad (3.20) \quad 2 \text{分}$$

$$\Delta g = \frac{8\varepsilon_0 A}{md^2} V_C \Delta V \quad (3.21) \quad 2 \text{分}$$

通过测量  $V_C$  和  $\Delta V$  即可获得重力加速度的微小变化  $\Delta g$ 。

四、(40分) 汽车以发动机气缸中的空气与汽油发生燃烧产生动力, 发动机的输出功率与进入气缸中的空气质量成正比。为了提高动力, 很多汽车加装了涡轮增压器, 在空气进入发动机气缸之前对它进行压缩, 以增加空气密度; 为了进一步提高空气密度, 还通过一个中间冷却器, 使空气温度降低后再进入气缸。在一个典型的装置中, 进入涡轮增压器的初始空气压强为一个大气压  $p_0 = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 温度  $T_0 = 15^\circ\text{C}$ , 通过涡轮增压器后, 空气绝热压缩至  $p_1 = 1.45 \times 10^5 \text{ Pa}$ ; 然后又通过中间冷却器, 让空气等压地降至初始温度  $T_0$  并充满气缸。假设空气为理想气体, 已知气缸容积  $V_0 = 400 \text{ cm}^3$ , 空气摩尔质量  $M = 29.0 \text{ g mol}^{-1}$ , 摩尔热容比  $\gamma = 7/5$ ; 普适气体常量  $R = 8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ 。

- (1) 求此时气缸内的空气质量; 与未经增压和冷却情形相比, 发动机输出功率增加到多少倍?
- (2) 如果没有中间冷却器, 仅经过涡轮增压器把空气压缩后输入到气缸中, 相应的空气质量是多少? 与未经增压的情形相比, 发动机输出功率增加到多少倍?
- (3) 在经过涡轮增压器和中间冷却器的热力学过程中, 试求外界对进入气缸的气体所做的功, 及气缸中的气体在上述两个过程中各自的熵变。

参考解答: (1) 按题设, 假设空气为理想气体, 利用理想气体状态方程:

$$pV = \nu RT, \quad (\nu = \frac{m}{M}) \quad (4.1) \quad 2 \text{分}$$

其中,  $(p, V, T)$  为气体的状态参数, 分别表示压强、体积和温度;  $\nu$  为气体的摩尔数,  $m$  为气体质量,  $M$  为气体的摩尔质量, 导出气体的密度表达式:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}, \quad (4.2) \quad 2 \text{分}$$

由此计算得到空气的初始密度

$$\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0} = \frac{1.01 \times 10^5 \times 29.0 \times 10^{-3}}{8.31 \times 288.15} = 1.22 \text{ kg/m}^3 \quad (4.3)$$

经过涡轮增压器和中间冷却器后, 设其密度变为  $\rho_1$ , 压强为  $p_1$ , 相应的空气质量为

$$\begin{aligned} m_1 &= V_0 \cdot \rho_1 = V_0 \cdot \frac{p_1 M}{RT} = V_0 \frac{p_1}{p_0} \rho_0 \\ &= 400 \times 10^{-6} \times \frac{1.45 \times 10^5}{1.01 \times 10^5} \times 1.22 = 0.703 \times 10^{-3} \text{ kg} \quad (4.4) \quad 2 \text{分} \end{aligned}$$

若不经过涡轮增压器和中间冷却器两个步骤, 直接把外界空气压入气缸中,

$$m_0 = \rho_0 V_0 = 1.22 \times 400 \times 10^{-6} = 0.490 \times 10^{-3} \text{ kg} \quad (4.5)$$

所以, 气缸的输出功率增加的倍数为

$$R_1 = \frac{m_1}{m_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{0.703 \times 10^{-3}}{0.490 \times 10^{-3}} = 1.43 \quad (4.6) \quad 2 \text{分}$$

(2) 如果不经过中间冷却器, 直接使用经涡轮增压器压缩后的空气, 此时, 空气的温度已经升高至  $T_1$ , 相应的体积为  $V_1$ , 利用绝热过程方程,

$$PV^\gamma = \text{Const.} \quad (4.7) \quad 2 \text{分}$$

和理想气体方程(1)式, 可以求出此状态下的温度及体积,

$$T_1 = T_0 \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (4.8)$$

$$V_1 = \frac{\nu RT_1}{p_1} = \frac{\nu RT_0}{p_1} \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (4.9) \quad 2 \text{分}$$

再利用(2)式, 该状态下的空气密度  $\rho_2$  满足,

$$\rho_2 = \rho_0 \left( \frac{T_0}{T_1} \right) \left( \frac{p_1}{p_0} \right) = \rho_0 \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left( \frac{p_1}{p_0} \right) = \rho_0 \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4.10) \quad 2 \text{分}$$

相应地, 输入到气缸中的空气质量为

$$m_2 = \rho_2 V_0 = 1.22 \times \left( \frac{1.45 \times 10^5}{1.01 \times 10^5} \right)^{\frac{1}{1.4}} \times 400 \times 10^{-6} = 0.632 \times 10^{-3} \text{ kg.} \quad (4.11) \quad 2 \text{分}$$

此时, 气缸的输出功率增加的倍数为

$$R_2 = \frac{m_2}{m_0} = \frac{\rho_2}{\rho_0} = \left( \frac{1.45 \times 10^5}{1.01 \times 10^5} \right)^{\frac{1}{1.4}} = 1.295 = 1.30 \quad (4.12) \quad 2 \text{分}$$

(3) 经过涡轮增压器和中间冷却器两个过程, 外界对气体的做功也分成两步来计算。首先, 涡轮增压为绝热压缩过程, 从(4)式得, 进入涡轮增压器的空气摩尔数为,

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{0.703}{29.0} = 0.02424 \text{ mol} \quad (4.13) \quad 2 \text{分}$$

根据题设,  $\gamma = \frac{7}{5}$ , 故可以计算得到,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_p + R}{C_v} = \frac{7}{5}, \quad C_v = \frac{5}{2} R \quad (4.14) \quad 2 \text{分}$$

即空气为双原子分子混合物, 对于绝热过程, 利用热力学第一定律,

$$\Delta Q = \Delta U + A = 0, \quad (4.15) \quad 2 \text{分}$$

故此绝热压缩过程外界做功  $W_1$  为

$$W_1 = -A = \Delta U = \nu C_v (T_1 - T_0) \quad (4.16) \quad 2 \text{分}$$

其中,  $T_1$  由(8)式给出, 代入(8)和(14)相关数据, 计算得,

$$W_1 = 0.02424 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times 288.0 \times \left( \left( \frac{1.45 \times 10^5}{1.01 \times 10^5} \right)^{\frac{6}{5}} - 1 \right) = 15.78 \text{ J} \quad (4.17) \quad 2 \text{分}$$

计算  $W_1$  的另一种解法

或者, 直接通过定义  $\int p dV$  和绝热过程方程  $pV^\gamma = C$ , 通过积分来计算出做功:

$$W_1 = - \int_{V_0}^{V_1} p dV = - \frac{1}{\gamma} \int_{V_0}^{V_1} V dp = \frac{p_1 V_1}{\gamma} \int_{p_0}^{p_1} p^{-\frac{1}{\gamma}} dp$$

$$= \frac{p_1^{\frac{1}{\gamma}} V_1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \left( p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) = \frac{p_1^{\frac{1}{\gamma}} (nRT_1)}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \left( p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)$$

其中, 温度  $T_1$  通过(8)式得到,

$$W_1 = \left( \frac{\nu RT_1}{\gamma-1} \right) \left( \frac{1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left( p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) = \left( \frac{\nu RT_1}{\gamma-1} \right) \left( \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \quad (4.16')$$

代入相关数据, 得到了与(17)式相同的结果,

$$W_1 = \frac{0.02424 \times 8.31 \times 288.0}{0.4} \left( \left( \frac{1.45}{1.01} \right)^{0.4140} - 1 \right) = 15.78 \text{ J} \quad (4.17)$$

第二步, 经过中间冷却器过程对应于一个等压降温过程, 外界对气体的做功为

$$W_2 = -p_1(V_2 - V_1) = -p_1(V_0 - V_1) \quad (4.18) \quad 2 \text{ 分}$$

其中,  $V_1$  根据(9)式确定,

$$V_1 = \frac{\nu R}{p_1} T_1 \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{0.02424 \times 8.31 \times 288.0}{1.45 \times 10^5} \times 1.1088 = 4.436 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \quad (4.19) \quad 2 \text{ 分}$$

代入到(18)式得到

$$W_2 = -1.45 \times 10^5 \times (4.000 \times 10^{-4} - 4.436 \times 10^{-4}) = 6.32 \text{ J} \quad (4.20) \quad 2 \text{ 分}$$

从而, 经过涡轮增压器和中间冷却器两个过程, 外界对气体做的总功为,

$$W = W_1 + W_2 = 15.78 + 6.32 = 22.1 \text{ J} \quad (4.21) \quad 2 \text{ 分}$$

而气体经过上述两个热力学过程的熵变分别为

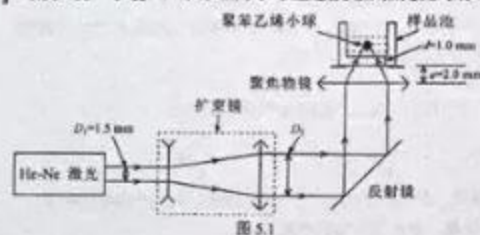
$$\Delta S_1 = \int_{1 \rightarrow 2} \frac{dQ}{T} = 0 \quad (4.22) \quad 2 \text{ 分}$$

$$\Delta S_2 = \int_{2 \rightarrow 3} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_p dT}{T} = \nu C_p \ln \frac{T_2}{T_1} = -\nu R \ln \frac{p_2}{p_1} = -0.07284 \text{ J/K} \quad (4.23) \quad 2 \text{ 分}$$

另一种算法:

$$\Delta S_1 = \int_{1 \rightarrow 2} \frac{dQ}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p dV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu R dV}{V} = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu R \ln \frac{p_1}{p_2} = -0.07284 \text{ J/K}$$

五、(40分) 2018年诺贝尔物理学奖的一部分授予美国科学家亚瑟·阿什金对光捕获(光镊)所做的开创性工作。光镊是用聚焦的激光束实现对微小颗粒的捕获, 图 5.1 所示为一种光镊实验装置示意图。He-Ne 激光器输出波长  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$  激光, 光束直径  $D_1 = 1.5 \text{ mm}$ , 输出功率  $P = 30 \text{ mW}$ 。为了使得捕获效果更好, 可以在输出的激光束后加一个扩束镜。激光束经反射镜反射后入射到一个焦距  $f = 4 \text{ mm}$  的聚焦物镜, 将光束汇聚于样品池内蒸馏水液体中, 样品池内液体加有一定数量的聚苯乙烯小球。已知小球的直径  $D_0 = 2.0 \mu\text{m}$ , 密度  $\rho_0 = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , 样品池光学玻璃材料折射率  $n_g = 1.46$ , 池内蒸馏水折射率  $n_w = 1.33$ , 底部玻璃厚度  $d = 1.0 \text{ mm}$ , 底部玻璃外表面到聚焦物镜中心的距离  $a = 2.0 \text{ mm}$ , 实验时温度  $T = 300 \text{ K}$ , 空气折射率  $n_a = 1.0$ , 重力加速度  $g = 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , 玻尔兹曼常量  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ , 聚苯乙烯小球经过激光聚焦光斑时有可能被光捕获。



- (1) 求不加扩束镜时激光束在空气中经聚焦物镜后聚焦光斑的直径;
- (2) 为了提高捕获效果, 对输出激光束进行扩束, 如图 5.1 所示, 采用的扩束镜由一个焦距  $f_1 = -6.3 \text{ mm}$  的凹透镜和焦距  $f_2 = 25.2 \text{ mm}$  的凸透镜组成, 若要使得扩束后的激光束是平行激光, 求两个透镜之间的距离和扩束后的平行激光束直径  $D_2$ ;
- (3) 将扩束后的激光束经图 5.1 所示聚焦物镜聚焦于样品池内蒸馏水中, 求在傍轴近似下聚焦光斑中心到样品池底部内表面的距离和聚焦光斑的直径;
- (4) 图 5.2 为浸没在蒸馏水中的聚苯乙烯小球在梯度光场(简化成强度不同的两束光)中受力的几何光学模型, 入射光线  $L_1$  和  $L_2$  沿  $x$  轴方向, 其光功率分别为  $P_1 = 1.0 \text{ mW}$  和  $P_2 = 2.0 \text{ mW}$ , 光线经小球折射后其方向夹角如图 5.2 所示, 不考虑光线在传播过程中的反射和吸收损耗, 求小球在  $x$  方向和  $y$  方向受到的力, 并分别求其与小球重力之比;

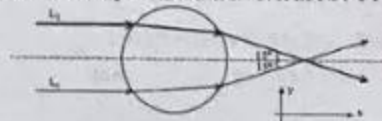


图 5.2 小球在梯度光场中的受力分析简化模型

- (5) 求室温下 (300K) 蒸馏水中小球的方均根速率;
- (6) 光镊也可以通过光势阱模型理解, 平行激光束经透镜聚焦后对小球的径向光势阱分布

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right) & (r \leq b) \\ 0 & (r > b) \end{cases}$$

上式中,  $b$  是常量,  $r$  是到光场中心距离,  $U_0 = 0.078 \text{ eV}$ , 试问速率不超过多大的小球才能被光势阱所捕获;



(7) 已知聚苯乙烯小球速率分布函数为:

$$f(v) = 4n \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

上式中,  $m$  和  $v$  分别是小球质量和速率,  $T$  是绝对温度. 如果在蒸馏水中, 同时存在两种质量分别为  $m$  和  $2m$  的聚苯乙烯小球, 试分析比较它们被光势阱捕获概率  $P_m$  和  $P_{2m}$  的大小.

参考答案:

1) 已知 He-Ne 激光器输出激光波长  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ , 聚焦物镜焦距

$$f = 4.0 \text{ mm};$$

当输出激光束截面直径  $D_1 = 1.5 \text{ mm}$  时, 聚焦光斑大小受到圆孔衍射限制, 其光斑直径大小:

$$D_{s1} = \frac{2 \times 1.22 \lambda}{D_1} f = \frac{2 \times 1.22 \times 0.6328 \mu\text{m}}{1.5 \text{ mm}} \times 4 \text{ mm} = 4.12 \mu\text{m} \quad (5.1) \quad (2+2 \text{分})$$

2) 扩束镜由一个焦距  $f_1 = -6.3 \text{ mm}$  的凹透镜和焦距  $f_2 = 25.2 \text{ mm}$  凸透镜组成, 则两个透镜距离应该为:

$$l = f_1 + f_2 = -6.3 + 25.2 = 18.9 \text{ mm} \quad (5.2) \quad (2 \text{分})$$

扩束后的激光束直径为:

$$D_2 = -\frac{f_2}{f_1} \times R_1 = 4 \times 1.5 \text{ mm} = 6 \text{ mm} \quad (5.3) \quad (2 \text{分})$$

3) 在傍轴近似下, 样品池中聚焦点位置可以通过二次折射公式求得, 利用折射成像公式, 扩束后的激光束经聚焦物镜进入样品池底部玻璃表面时, 首先在样品池底部外表面一次成像, 其成像位置由以下式子计算:

$$\frac{n_g}{o_1} + \frac{n_g}{i_1} = \frac{n_g - n_w}{r_1} \quad (5.4)$$

式中,  $o_1$  为物距, 由于底部外表面距离聚焦物镜  $a = 2.0 \text{ mm}$ , 聚焦物镜焦距  $f = 4.0 \text{ mm}$ , 所以  $o_1 = -2.0 \text{ mm}$ ,  $i_1$  是一次成像位置,  $r_1 = \infty$ , 由此可以得到一次成像位置:

$$i_1 = -\frac{n_g \times o_1}{n_w} = 1.46 \times 2.0 = 2.92 \text{ mm} \quad (5.5) \quad (3 \text{分})$$

激光束在样品池底部内表面二次折射成像可以按以下式子计算:

$$\frac{n_g}{o_2} + \frac{n_w}{i_2} = \frac{n_w - n_g}{r_2} \quad (5.6)$$

式中,  $o_2$  为物距, 在这里相对于底部内表面,

$o_2 = o_1 - d = 2.92 - 1 = 1.92 \text{ mm}$ , 由于此时物是虚的, 所以  $o_2$  取负值, 也就是  $o_2 = -1.92 \text{ mm}$ ,  $r_2 = \infty$ , 由此可以得到二次成像位置:

$$i_2 = -\frac{n_w \times o_2}{n_g} = \frac{1.33 \times 1.92}{1.46} = 1.75 \text{ mm} \quad (5.7) \quad (3 \text{分})$$

所以样品池中聚焦点位置离样品池底部内表面  $1.75 \text{ mm}$ .

(备注: 若用折射公式计算得到正确结果, 同样给分)

扩束后的激光束  $D_2 = 6 \text{ mm}$ , 经聚焦透镜聚焦于样品池内蒸馏水中时, 由简单的几何关系可知, 在样品池底部外表面光束直径等于  $0.5D_2$ , 在样品池内表面光束直径可以表示成:

$$D_w = \frac{1}{2} D_2 \times \frac{2 \times n_g - 1}{2 \times n_g} = \frac{2 \times 1.46 - 1}{2 \times 1.46} \times 3 \text{ mm} = 1.97 \text{ mm} \quad (5.8) \quad (1 \text{分})$$

于是液体中激光焦点处光斑直径:

$$D_{s2} = \frac{2 \times 1.22 \lambda}{n_w \times D_w} \times i_2 = \frac{2 \times 1.22 \times 0.6328 \mu\text{m}}{1.33 \times 1.97 \text{ mm}} \times 1.75 \text{ mm} = 1.03 \mu\text{m} \quad (5.9) \quad (1 \text{分})$$

(备注: 结果正确, 但是缺少物理过程分析或分析不正确, 上2式合得1分.)

分别考虑光线在样品池底部内外表面折射对光斑大小影响, 光在样品池外表面的放大倍数为:

$$V_1 = -\frac{n_g i_1}{n_w o_1} = \frac{2.92}{1.46 \times 2} = 1 \quad (5.10)$$

$$V_2 = -\frac{n_g i_2}{n_w o_2} = \frac{1.46 \times 1.75}{1.33 \times 1.92} = 1 \quad (5.11)$$

所以样品池底部内外表面折射对聚焦光斑大小无影响.

4) 在蒸馏水中, 功率为  $P$  的光束  $\Delta t$  时间内携带的动量可以表示为:

$$p = N \frac{h}{\lambda} = \frac{P \times \Delta t}{hv} \times \frac{n_w h}{\lambda} = \frac{P \times n_w \times \Delta t}{c} \quad (5.12) \quad (2 \text{分})$$

光束  $L_1$  的初始动量为:

$$\vec{p}_{10} = \frac{P_1 \times n_w \times \Delta t}{c} \vec{i} \quad (5.13)$$

光束  $L_2$  的初始动量为:

$$\vec{p}_{20} = \frac{P_2 \times n_w \times \Delta t}{c} \vec{i} \quad (5.14)$$

经小球两次折射后, 光束  $L_1$  的动量为:

$$\vec{p}_{1f} = \frac{P_1 \times n_w \times \Delta t}{c} \cos 15^\circ \vec{i} + \frac{P_1 \times n_w \times \Delta t}{c} \sin 15^\circ \vec{j} \quad (5.15) \quad (2 \text{分})$$

经小球两次折射后, 光束  $L_2$  的动量为:

$$\vec{p}_{2f} = \frac{P_2 \times n_w \times \Delta t}{c} \cos 15^\circ \vec{i} - \frac{P_2 \times n_w \times \Delta t}{c} \sin 15^\circ \vec{j} \quad (5.16) \quad (2 \text{分})$$

经小球折射后, 光束的动量改变:

$$\Delta \vec{p}_1 = \frac{(P_1 + P_2) \times (\cos 15^\circ - 1) \times n_w \times \Delta t}{c} \vec{i} + \frac{(P_1 - P_2) \times \sin 15^\circ \times n_w \times \Delta t}{c} \vec{j} \quad (5.17)$$

小球的动量改变:

$$\Delta p_x = -\Delta p_x = \frac{(P_1 + P_2) \times (1 - \cos 15^\circ) \times n_x \times \Delta t}{c} + \frac{(P_2 - P_1) \times \sin 15^\circ \times n_x \times \Delta t}{c} \quad (5.18)$$

小球收到的光力作用:

$$F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{(P_1 + P_2) \times (1 - \cos 15^\circ) \times n_x}{c} + \frac{(P_2 - P_1) \times \sin 15^\circ \times n_x}{c} \quad (5.19)$$

$$F_x = 0.45 \times 10^{-12} \hat{i} + 1.15 \times 10^{-12} \hat{j} \quad (\text{N}) \quad (5.20) \quad (4 \text{分})$$

在梯度力作用下, 小球分别受到一个沿  $x$  正方向和  $y$  正方向的力, 小球重力:

$$mg = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{D}{2} \right)^3 \rho_s = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 1.0 \times 10^{-18} \times 10^3 \times 9.8 = 4.11 \times 10^{-14} \text{ N} \quad (5.21)$$

$x$  方向和  $y$  方向光力与小球重力之比分别为:

$$\eta_x = \frac{0.45 \times 10^{-12}}{4.11 \times 10^{-14}} = 10.9 \quad (5.22) \quad (1 \text{分})$$

$$\eta_y = \frac{1.15 \times 10^{-12}}{4.11 \times 10^{-14}} = 28.0 \quad (5.23) \quad (1 \text{分})$$

5) 在水中, 常温下 (300K), 小球的平均动能:

$$E_s = \frac{3}{2} k_B T = 1.5 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J} \quad (5.24) \quad (2 \text{分})$$

小球的方均根速率:

$$v_s = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{4.19 \times 10^{-18}}} = \sqrt{\frac{12.42 \times 10^{-21}}{4.19}} = 1.72 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5.25) \quad (2 \text{分})$$

6) 当小球的动能小于势阱深度时, 有可能被捕获, 于是有

$$\frac{1}{2} m v_s^2 + (-U_s) = 0 \quad (5.26)$$

最大捕获速度

$$v_m = \sqrt{\frac{2U_s}{m}} \quad (5.27) \quad (2 \text{分})$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2 \times 78 \times 10^{-17} \times 1.6 \times 10^{-19}}{4.19 \times 10^{-18}}} = \sqrt{\frac{24.96 \times 10^{-36}}{4.19}} = 2.44 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5.28) \quad (2 \text{分})$$

7) 聚苯乙烯小球能够被捕获的概率可以表示为:

$$P_m = \int_0^{v_m} f(v) dv = \int_0^{v_m} 4\pi \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \quad (5.29) \quad (2 \text{分})$$

$$\text{设 } v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (5.30)$$

$$\text{则有 } P_m = \int_0^{v_m} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{v}{v_p} \right)^2 e^{-\frac{v^2}{v_p^2}} \frac{v}{v_p} dv \quad (5.31)$$

$$\text{且 } x = \frac{v}{v_p}$$

于是概率可以写成

$$P_m = \int_0^{\frac{v_m}{v_p}} \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2} dx \quad (5.32)$$

从上式可知,  $P$  的值与  $U_s$  和温度  $T$  有关而与质量无关, 所以质量为  $m$  和  $2m$  的聚苯乙烯小球被捕获的概率  $P_m = P_{2m}$ . (2分)

六、(80分)仰望星空可以激发人们无限的想象。随着科学与技术的进步, 人们对宇宙的认识不断加深, 特别是 21 世纪以来随着中微子丢失之谜的解决, 引力波直接的探测, 以及近期黑洞照片的拍摄, 引起了大众对探索宇宙的广泛兴趣。人类是如何利用有限的设备观察研究浩瀚的宇宙以及宇宙重要组成部分恒星的呢? 具有高中物理基础的公众是否有可能定量地理解恒星的内外性质, 如大小、质量、年龄、寿命、构成和产生能量的机制等等? 本题从简单到复杂, 按照历史的脉络构建起太阳模型。由于不能直接观测太阳内部, 所建的模型需要多角度的检验, 如年龄、半径、表面温度、能量输出、中微子通量等等, 都需要在同一个模型下相互自洽。

已知地球半径为 6370 km, 万有引力常量  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ , 斯特藩-玻尔兹曼常量  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ , 玻尔兹曼常量  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ , 电子电量  $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ , 电子质量  $m_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2$ , 质子质量  $m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2$ , 氦核质量  $m_{\text{He}} = 1875.6 \text{ MeV}/c^2$ ,  $^3\text{He}$  核质量  $m_{^3\text{He}} = 2808.4 \text{ MeV}/c^2$ ,  $^4\text{He}$  核质量  $m_{^4\text{He}} = 3727.5 \text{ MeV}/c^2$ .

1. 成书于两千多年前的《周髀算经》(原名《周髀》)介绍了测量太阳直径  $D$  与日地距离  $S_{\text{日地}}$  (也称 1 个天文单位) 比值的方法: 取一长直竹竿, 磨去竹节使其内部贯通, 竹竿的内直径为  $d$ , 用这根竹竿对准太阳, 改变竹竿长度  $L$ , 使得太阳盘面刚好充满竹竿内管。

(1) 给出太阳视角 ( $\Phi = D/S_{\text{日地}}$ ) 与  $d$  和  $L$  的关系;

(2) 为了减少误差需要  $L$  有足够的长度, 此外还有哪些方法可以减少误差?

(3) 测得  $d = 1$  寸,  $L = 8$  尺, (1 尺为 10 寸), 则  $\Phi = D/S_{\text{日地}}$  值为多少?

2. 在某些特殊时间 (如 2012 年 6 月 6 日), 地球、金星和太阳几乎在一条直线上, 这时从地球上观测, 金星就像一个小黑点镶嵌在太阳盘面上, 并缓慢移动, 这称为金星凌日, 如图 6.1 所示。英国天文学家哈雷曾在 1716 年建议在世界各地联合观察金星凌日以测量太阳视角和日地距离。已知地球和金星同向绕日公转, 周期分别为  $T_e = 365.256$  天和  $T_v = 224.701$  天, 各自的轨道平面之间的倾角很小, 不考虑地球自转。



图 6.1 2012 年 6 月 6 日金星凌日过程示意图

(1) 地球和金星的公转轨道均可视为圆, 求日金距离  $S_{\text{日金}}$  与日地距离  $S_{\text{日地}}$  之比  $r_{\text{日金}}$ ;

(2) 2012 年 6 月 6 日, 某地观察到金星凌日现象如图 6.1, 试计算金星凌日扫过太阳盘面弦长  $D_p$  与日地距离  $S_{\text{日地}}$  的比值; 若此弦与盘面圆心之间的距离为  $k_p = 5D_p/16$ , 则太阳视角  $\Phi$  为多少?

(3) 为了测量日地距离需要在地球表面不同地点分别观察金星凌日现象, 如图 6.2 所示。假设在地面同一经度上直线距离为  $H$  的两位观察者 P 和 P' 同时观察金星凌日现象, 对于 P 来说, 金星在太阳盘面上的运动轨迹为 AB, 其观察得金星凌日时间 (金星中心扫过太阳盘面的时间间隔) 为  $t_P$ ; 而对于 P' 来说, 金星在太阳盘面上的运动轨迹为 A'B', 其观察得金星凌日时间  $t_{P'}$ 。试求日地距离表达式 (用  $\Phi$ ,  $r_{\text{金}}$ ,  $T_{\text{金}}$ ,  $T_{\text{地}}$ ,  $t_P$ ,  $t_{P'}$  和  $H$  等等表示)。

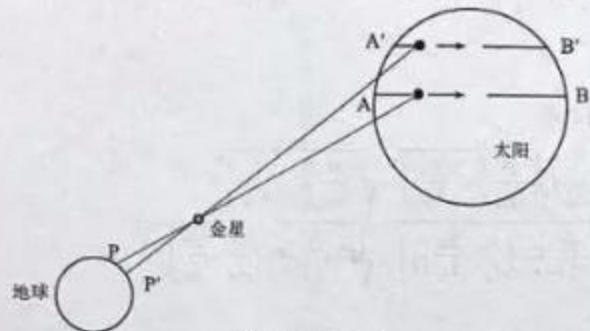


图 6.2 金星凌日示意图

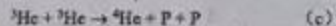
(4) 已知北京和香港的纬度分别为  $39.5^\circ$  和  $22.5^\circ$ , 2012 年 6 月 6 日北京和香港的金星凌日时间分别为  $t_P = 6:21:57$ , 和  $t_{P'} = 6:19:31$ , 试以此数据, 利用 (3) 小题的结论, 计算日地距离  $S_{\text{日地}}$ 。

3. 1882 年的金星凌日观测结果得出平均日地距离  $S_{\text{日地}} = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$ , 太阳直径  $D = 1.4 \times 10^6 \text{ km}$ , 地球在垂直于太阳辐射方向上接收到的太阳辐射照度  $I = 1.37 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$ , 计算

- (1) 单位时间内, 地球从太阳接收到的总能量;
- (2) 全球 70 亿人口消耗掉的能源与地球接收到的太阳能之比。(按人均年消耗能源 3 吨标准煤, 1 kg 标准煤可以发 4 度电计算);
- (3) 太阳单位时间辐射的总能量;
- (4) 估算太阳表面温度。

- (1) 计算太阳的总质量与平均密度;
- (2) 若太阳能来自化学反应, 设单位质量放出的能量与煤相当, 则以太阳现在单位时间辐射的能量计算, 可以持续多久? 太阳作为恒星存在约 50 亿年, 那么其产能效率应该是化学反应效率的多少倍?

5. 通过光谱分析可知太阳的主要成分是氢, 涉及氢的基本核聚变反应式如下:



上述核聚变反应过程中产生的正电子将会湮灭, 中微子将逃逸, 原子核均带正电, 相互排斥, 除非处于很高的温度, 其动能有可能克服库仑排斥力, 从而实现聚变反应。当温度足够高时, 所有的原子均电离成了原子核和电子, 处于等离子体状态。(在此不考虑中微子带走的能量, 也不考虑由于太阳风带走的未聚变的氢)

- (1) 要维持太阳的辐射, 单位时间需要消耗多少个质子 (氢核)?
- (2) 现在太阳质量的 71% 为氢, 按照此消耗速率, 最多还可以维持多少年? 并计算单位时间质子-质子的反应概率 (单位时间反应的粒子数与总粒子数之比)  $P_{pp}$ ;
- (3) 逃逸出的中微子的数目在传播过程中不会减少, 单位时间在垂直于太阳辐射方向上单位面积内有多少中微子到达地球? (实际到达地球的电子中微子数量只有理论值的 35%, 但加上另外二类中微子的数量, 则与理论值相符, 表明有部分电子中微子在传播过程中转换为其他类中微子, 这与中微子振荡有关, 相关成果获 2002 年和 2015 年诺贝尔物理学奖)
- (4) 单位时间太阳由于辐射减少多少质量?

6. 聚变反应的概率  $P$  与等离子体的温度  $T$  有关, 而且粒子数密度 (单位体积中的粒子数)  $n$  越高反应概率越高, 有关系式  $P = nR(T)$ , 其中  $R(T)$  称为反应率, 图 6.3 给出了三种聚变的反应率与温度的关系, 试估算能够产生核聚变反应的太阳核心区域 (其半径约为太阳半径的四分之一) 温度的下限。

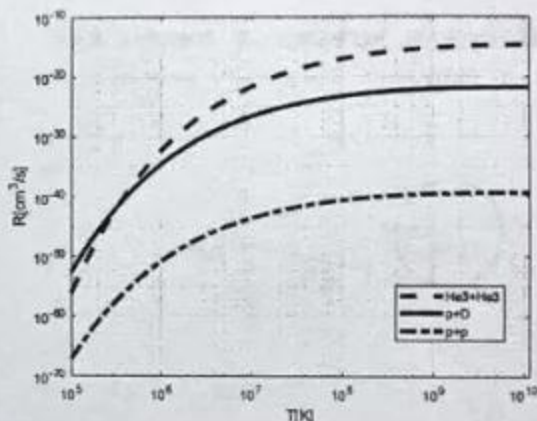


图 6.3 反应率与温度的关系曲线

7. 估算单个中微子带走的最大能量, 并估计第 5 小题忽略了中微子带走的能量所造成的辐射能量计算的最大相对误差。
8. 从前面的计算可知, 太阳的质量逐渐减少, 那么地球绕太阳公转的周期和平均轨道半径也将变化, 计算:
  - (1) 一亿年内由于辐射引起的质量减少量  $\Delta M$ ;
  - (2) 由此引起的地球公转周期的变化量。

参考解答:

$$1. (1) \Phi = \frac{D}{S_{\text{日地}}} = \frac{d}{L} \quad (6.1) \quad 2 \text{分}$$

- (2) 主要误差来自于是否刚好充满竹竿内管, 可以在竹竿圆孔前加一半径可调的遮挡

圆盘, 原理类似于日冕仪, 其他方法只要能提高精度, 均可。 2分

$$(3) \quad \Phi = \frac{1}{80}, \quad (6.2) \quad 2分$$

与目前准确值  $\Phi = \frac{1}{109}$  相比, 二千多年前用如此简单的方法达到如此精度, 不容易。

2. (24分)

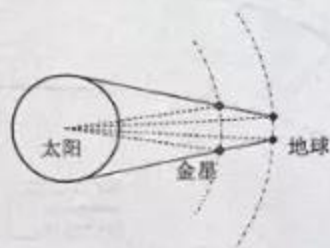
(1) 由开普勒定律, 或万有引力定律,

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r, \quad (6.3) \quad 2分$$

可得

$$r_{VE} = \frac{S_{日金}}{S_{日地}} = \left( \frac{T_{地}}{T_{金}} \right)^{2/3} = 0.72 \quad (6.4) \quad 2分$$

(2) 凌日开始时地球与金星连线相切于太阳, 经过凌日时间  $t_p$  后, 即凌日终点, 地球与金星相切于太阳的另一边, 如下图所示。



$$\frac{D_p}{S_{日金}} = \frac{D_r}{S_{日地}} + 2\pi r_p \left( \frac{1}{T_{金}} - \frac{1}{T_{地}} \right), \quad (6.5) \quad 4分$$

$$\frac{D_r}{S_{日地}} = \left( \frac{r_{VE}}{1-r_{VE}} \right) 2\pi r_p \left( \frac{1}{T_{金}} - \frac{1}{T_{地}} \right) \quad (6.6) \quad 2分$$

(备注: 用其他坐标下分析, 只有结果正确, 同样给分。)

从图可以得到  $t_p = 6:21:47 = 6.36$  小时  $= 0.265$  天。

$$\frac{D_r}{S_{日地}} = \frac{1.44}{0.28} \pi (1.18 \times 10^{-3} - 0.72 \times 10^{-3}) = 7.4 \times 10^{-3} = \frac{1}{135}$$

由几何可得

$$h_r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - D_p^2} \quad (6.7) \quad 2分$$

已知  $h_p = 5D/16$ , 因此有  $D_p = 0.78D$ , 则太阳视角

$$\Phi = \frac{D}{S_{日地}} = \frac{1.28}{135} = \frac{1}{105} \quad (6.8) \quad 2分$$

(3) 从上面的推导可以发现, 凌日扫过的弦长  $D_p$  正比于凌日时间  $t_p$ , 即

$$\frac{D_p}{S_{日地}} = \frac{r_{VE}}{1-r_{VE}} \left( \frac{2\pi}{T_{地}} - \frac{2\pi}{T_{金}} \right) t_p = 2.57 \times t_p \quad (6.9) \quad 2分$$

由 (6.7) 式得

$D_p$  与  $D_r$  对金星所张角

$$\Theta = \frac{h_r - h_p}{S_{日金}} = \frac{1}{2r_{VE}} \left( \sqrt{\left( \frac{D}{S_{日地}} \right)^2 - \left( \frac{D_p}{S_{日地}} \right)^2} - \sqrt{\left( \frac{D}{S_{日地}} \right)^2 - \left( \frac{D_r}{S_{日地}} \right)^2} \right) \\ = \frac{1}{2r_{VE}} \left( \sqrt{\Phi^2 - \left( \frac{r_{VE}}{1-r_{VE}} \left( \frac{2\pi}{T_{地}} - \frac{2\pi}{T_{金}} \right) t_p \right)^2} - \sqrt{\Phi^2 - \left( \frac{r_{VE}}{1-r_{VE}} \left( \frac{2\pi}{T_{地}} - \frac{2\pi}{T_{金}} \right) t_p \right)^2} \right)$$

由相似三角形关系可得

$$\Theta = \frac{H}{S_{日地} - S_{日金}} = \frac{H}{S_{日地}(1-r_{VE})}$$

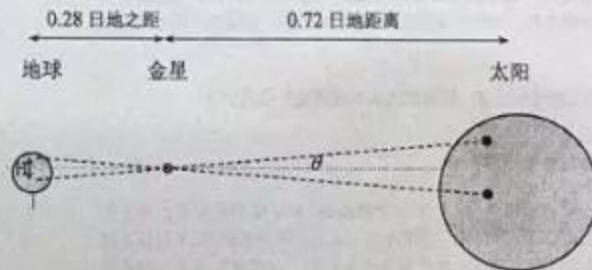
$$S_{日地} = \frac{2r_{VE}H}{(1-r_{VE})} \left( \sqrt{\Phi^2 - \left( \frac{r_{VE}}{1-r_{VE}} \left( \frac{2\pi}{T_{地}} - \frac{2\pi}{T_{金}} \right) t_p \right)^2} - \sqrt{\Phi^2 - \left( \frac{r_{VE}}{1-r_{VE}} \left( \frac{2\pi}{T_{地}} - \frac{2\pi}{T_{金}} \right) t_p \right)^2} \right) \quad (6.10) \quad 4分$$

(4) 北京的纬度为  $39.5^\circ$ , 香港的纬度为  $22.5^\circ$ , 对应的

$$H = \frac{39.5^\circ - 22.5^\circ}{180} \times \pi \times 6370 \text{ km} = 1900 \text{ km} \quad (6.11) \quad 2分$$

北京: (凌始外切 6:10:00, 凌终内切 12:31:57)  $t_p = 6:21:57$

香港: (凌始外切 6:11:48, 凌终内切 12:31:19)  $t_p = 6:19:31$



代入数据代入得

$$S_{\text{地球}} = 1.6 \times 10^8 \text{ km} \quad (6.12) \quad 2 \text{ 分}$$

太阳直径

$$D = \frac{D}{S_{\text{地球}}} \times S_{\text{地球}} = \frac{1}{105} \times 1.5 \times 10^8 \text{ km} = 1.5 \times 10^6 \text{ km}$$

3

(1) 地球接收到的太阳光辐射功率

$$W_{\text{地球}} = \pi R_{\text{地球}}^2 I = 3.14 \times 6.4^2 \times 10^{12} \times 1.37 \times 10^3 = 1.76 \times 10^{17} \text{ W} \quad (6.13)$$

2 分

(2) 全球每年消耗的能源总量

$$E_{\text{消耗}} = 70 \times 10^8 \times 3 \times 10^7 \times 4 \times 3.6 \times 10^4 = 3 \times 10^{20} \text{ J}$$

一年接受到的太阳辐射能量为

$$E_{\text{辐射}} = 365 \times 24 \times 3600 \times W_{\text{地球}} = 5.5 \times 10^{24} \text{ J}$$

占比为

$$1:1.6 \times 10^4 \quad (6.14) \quad 2 \text{ 分}$$

不到万分之一, 表明我们利用太阳能的潜力还有很大。

(3) 太阳单位时间辐射的总能量

$$W_{\text{太阳}} = 4\pi S_{\text{地球}}^2 I = 3.87 \times 10^{24} \text{ W} \quad (6.15) \quad 2 \text{ 分}$$

(4) 太阳单位时间单位面积辐射的能量

$$i_{\text{太阳}} = \frac{W_{\text{太阳}}}{4\pi R_{\text{太阳}}^2} = \frac{S_{\text{地球}}^2 I}{R_{\text{太阳}}^2} = 6.5 \times 10^7 \text{ W/m}^2$$

$$T_{\text{表面}} = \left(\frac{i_{\text{太阳}}}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = 5.8 \times 10^3 \text{ K} \quad (6.16) \quad 2 \text{ 分}$$

4. (6 分)

(1) 太阳质量

$$G \frac{M_{\text{地球}} m}{S_{\text{地球}}^2} = m \frac{4\pi^2}{T_{\text{地球}}^3} S_{\text{地球}}^3$$

$$M_{\text{地球}} = \frac{1}{G} \frac{4\pi^2}{T_{\text{地球}}^3} S_{\text{地球}}^3 = \frac{4\pi^2}{6.67 \times 10^{-11} \times (365 \times 24 \times 3600)^2} \times (1.5 \times 10^{11})^3 \text{ kg} \\ = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg} \quad (6.17) \quad 2 \text{ 分}$$

平均密度

$$\rho = \frac{3M_{\text{地球}}}{4\pi R_{\text{地球}}^3} = 1.4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad (6.18) \quad 2 \text{ 分}$$

约是水密度的 1.4 倍, 平均密度比地球的密度要低。

(2) 若太阳能来自化学反应, 假设由煤烧成, 那么每秒钟需要燃烧煤的质量为

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{W_{\text{太阳}}}{4 \times 3.6 \times 10^4} = 2.7 \times 10^9 \text{ kg}$$

可以持续燃烧时间

$$t_{\text{燃烧}} = \frac{M}{\Delta m / \Delta t} = 7.4 \times 10^8 \text{ S} = 2400 \text{ 年} \quad (6.19)$$

达尔文当年从生物进化的角度认为, 地球至少要存在一亿年以上, 若太阳作为恒星存在 50 亿年, 那么太阳产能效率至少是燃煤效率 200 万倍以上, 因此太阳的能源不可能来自化学能, 只能来自于核能。 2 分

5. (14 分)

(1) 整个核聚变过程相当于消耗掉了 4 个质子, 产生了一个氦原子核, 并有 2 个正电子与两个等离子体中的电子湮灭成光子, 不考虑中微子带走的能量, 放出的能量

$$\Delta E = (M_p \times 4 - M_{\text{He}} - 2m_e + 4m_e)c^2 \quad (6.20) \quad 4 \text{ 分} \\ = 938.3 \times 4 - 3727.5 + 0.51 \times 2 = 26.7 \text{ MeV} = 4.27 \times 10^{-12} \text{ J}$$

单位时间需要消耗质子数

$$\frac{\Delta N_p}{\Delta t} = \frac{3.87 \times 10^{24}}{(4.27 \times 10^{-12}) / 4} = 3.62 \times 10^{35} \text{ S}^{-1} \quad (6.21) \quad 2 \text{ 分}$$

(2) 太阳总的质子数为

$$N_p = 0.71 \times 2.0 \times 10^{30} \text{ kg} / 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} = 8.5 \times 10^{56}$$

假设所有质子最后均参与核聚变反应 (实际上太阳外层由于温度太低, 不会产生聚变, 而且剩余太阳质量太小时, 将不能维持足够的温度, 也不能实现聚变, 即有很大比例的质子不参与聚变反应), 则能维持聚变的时间

$$\Delta t = 8.5 \times 10^{56} / 3.62 \times 10^{35} \text{ S} = 2.3 \times 10^8 \text{ S} = 7.3 \times 10^6 \text{ 年} \quad (6.22) \quad 2 \text{ 分}$$

单位时间的反应概率

$$P_{pp} = 3.62 \times 10^{35} / 8.5 \times 10^{56} \text{ S}^{-1} = 4.2 \times 10^{-21} \text{ S}^{-1} \quad (6.23) \quad 2 \text{ 分}$$

(3) 2 个质子反应产生一个中微子, 因此单位时间产生的中微子数

$$\frac{\Delta N_{\nu}}{\Delta t} = 1.81 \times 10^{35} / \text{s}$$

地球上单位时间单位面积能接受到的中微子数

$$\frac{\Delta N_{\alpha}}{\Delta t} \frac{1}{4\pi S_{\text{日地}}^2} = 6.4 \times 10^{14} / (\text{s} \cdot \text{m}^2) \quad (6.24) \quad 2 \text{分}$$

$$(4) \frac{\Delta M_{\text{总}}}{\Delta t} = \frac{3.87 \times 10^{24}}{9 \times 10^{16}} \text{ kg/s} = 4.3 \times 10^7 \text{ kg/s} = 1.3 \times 10^{17} \text{ kg/年} \quad (6.25) \quad 2 \text{分}$$

6. (6分)

核心区的密度高于平均密度, 但小于平均密度的 64 倍, 即小于  $9 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$

$$\text{质子数密度小于 } n_p = \frac{9 \times 10^4 \text{ kg/m}^3}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 5.4 \times 10^{31} / \text{cm}^3$$

$$R(T) = \frac{P_{\text{总}}}{n_p} = 4.2 \times 10^{-19} \text{ S}^{-1} / 5.4 \times 10^{31} \text{ cm}^{-3} = 7.8 \times 10^{-51} \text{ cm}^3 \text{ S}^{-1} \quad (6.26) \quad 4 \text{分}$$

由于质子-质子的反应率远低于另外两个反应, 因此决定总体的反应概率是质子-质子的概率, 过上述反应率的横坐标平行线与 PP 反应率相交, 得到温度

$$T = 0.8 \times 10^7 \text{ K} \quad (6.27) \quad 2 \text{分}$$

7. (8分)

聚变过程(a)的质量亏损为 0.49 MeV, 远大于质子的动能 (1.5 keV), 因此可以将质子看作静止, 反应后总动量为零, 总动能为质量亏损乘以光速平方,

对于三体问题, 根据能动量守恒计算各粒子的能量和动量有不确定性, 但中微子的最大动能对应于氦与正电子没有相对运动 (即具有相同速度) 时, 其所具有的能量, 由于氦的动能远小于其静止质量乘以光速平方, 因此可以用非相对论表达式, 而中微子静止质量近似为零, 需要用相对论表达式,

因此有

$$(m_0 + m_e)v - P_e = 0 \quad (6.28) \quad 2 \text{分}$$

$$\frac{P_0^2}{2m_0} + \frac{P_e^2}{2m_e} + P_e c = 0.49 \text{ MeV} \quad (6.29) \quad 2 \text{分}$$

$$P_e = \frac{m_e}{m_0} P_0$$

$$\frac{P_e^2}{2m_e} = \frac{m_e}{2m_0} P_0^2 \ll \frac{P_0^2}{2m_0}$$

$$\frac{P_e^2}{2m_e} = \frac{m_e}{2m_0} P_0^2 \ll \frac{P_0^2}{2m_0}$$

$$E_{\text{中微子}} = 0.49 \text{ MeV} \quad (6.30) \quad 2 \text{分}$$

中微子总能量占聚变放出的能量之比小于

$$\frac{0.49 \times 2}{26.7} = 3.7 \% \quad (6.31) \quad 2 \text{分}$$

8. (8分)

$$(1) \Delta M = \frac{\Delta M}{\Delta t} \times \Delta t = 1.3 \times 10^{17} \text{ kg} \quad (6.32) \quad 2 \text{分}$$

(2) 万有引力提供向心力, 因此有:

$$G \frac{Mm}{r_1^2} = m \left( \frac{2\pi}{T_1} \right)^2 r_1, \quad G \frac{(M-\Delta M)m}{r_2^2} = m \left( \frac{2\pi}{T_2} \right)^2 r_2$$

$$\frac{MT_1^2}{r_1^3} = \frac{(M-\Delta M)T_2^2}{r_2^3} \quad (6.33) \quad 2 \text{分}$$

由于是由径向辐射引起质量减少, 因此地球相对与太阳的角动量守恒, 因此有

$$mrv_1 = mrv_2$$

或

$$m \left( \frac{2\pi}{T_1} \right) r_1^2 = m \left( \frac{2\pi}{T_2} \right) r_2^2 \quad \text{即有}$$

$$\frac{r_1^2}{T_1} = \frac{r_2^2}{T_2} \quad (6.34) \quad 2 \text{分}$$

由 (6.32) 和 (6.33) 式可得

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( 1 - \frac{\Delta M}{M} \right)^{-2} = 1 + 2 \frac{\Delta M}{M} \quad (6.35)$$

$$T_2 - T_1 = 1.3 \times 10^{-5} T_1 \quad (6.36) \quad 2 \text{分}$$