2022 北京房山实验中学高三（上）期中

数　　学

一、单选题

1．若集合 $A=\{x|0<x<6\}$，$B=\{x|x^2+x-2>0\}$，则 $A\cup B=$（　）

A．$\{x|1<x<6\}$　　B．$\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>0\}$

C．$\{x|2<x<6\}$　　D．$\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>1\}$

2．下列函数中，既是偶函数，又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　）

A．$y=\cos x$　　B．$y=\dfrac{1}{x^2+1}$

C．$y=2^x-2^{-x}$　　D．$y=\ln|x|$

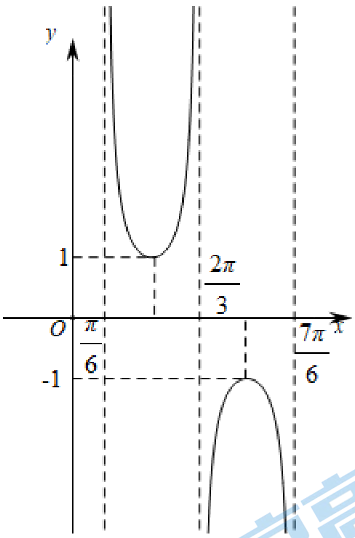
3．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$S_n$ 为其前 n 项和.若 $a_2=2$，则 $S_5=$（　）

A．20　　B．30　　C．31　　D．62

4．在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，终边与单位圆交于点 $(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{6}}{3})$，则 $\cos(\pi+\alpha)=$（　）

A．$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

5．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sin(\omega x+\varphi)}$（其中 $\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则 ω 与 φ 分别等于（　）



A．1，$-\dfrac{\pi}{3}$　　B．1，$\dfrac{\pi}{3}$　　C．2，$\dfrac{\pi}{3}$　　D．2，$-\dfrac{\pi}{3}$

6．在 $\triangle ABC$ 中，$\sin^2 A=\sin B\sin C$，若 $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\angle B$ 的大小是（　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$\dfrac{2\pi}{3}$

7．函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则“$\forall x\in\mathbf{R}$，$f\left(x\right)f\left(-x\right)\geq 0$”是“函数 $f\left(x\right)$ 为偶函数”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

8．函数 $f(x)=\cos x-\cos 2x$ 是

A．奇函数，且最大值为 2　　B．偶函数，且最大值为 2

C．奇函数，且最大值为 $\frac{9}{8}$　　D．偶函数，且最大值为 $\frac{9}{8}$

9．已知 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-1, x\geq 1,\\ \ln x, 0<x<1,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-kx+k$ 只有一个零点，则 k 的取值范围是（　）.

A．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　B．$(-1,1)$　　C．$[0,1]$　　D．$(-\infty,-1]\cup[0,1]$

10．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$，在下列结论中：

①π 是 $f\left(x\right)$ 的一个周期；

② $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减；

③ $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称；

④ $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称.

正确结论的个数为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

二、填空题

11．复数 $z=(2-\mathrm{i})\mathrm{i}$ 的虚部是________.

12．已知 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2$，则 $\tan\alpha=$________.

13．已知函数 $f(x)=\sin x$，若对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)+f(x+m)=c$（c 为常数），则常数 m 的一个取值为

________.

14．已知 O 为坐标原点，点 $A\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right)$，$B\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right),\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right)$，则 $\triangle AOB$ 的面积为

________.

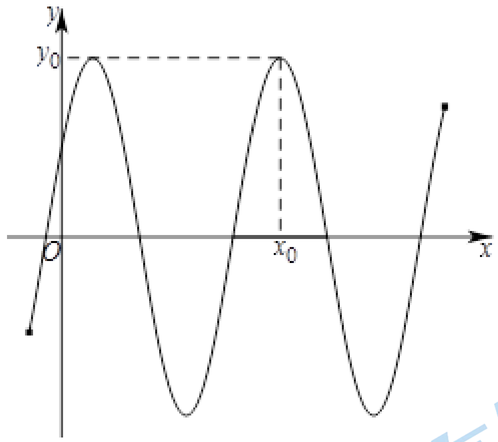
15．设当 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值，则 $\cos\theta=$______.

三、解答题

16．函数 $f\left(x\right)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的部分图象如图所示.

（1）写出 $f\left(x\right)$ 的最小正周期及图中 x_0、y_0 的值；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{12}\right]$ 上的最大值和最小值.



17．已知函数 $f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+a}$.

（1）若 $a=0$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，求 $f(x)$ 的单调区间，以及其最大值与最小值.

18．在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\dfrac{1}{7}$，$c=8$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

(1) b 的值；

(2)角 A 的大小和 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$a=7$；条件②：$\cos B=\dfrac{11}{14}$.

19．已知函数 $f(x)=a\sin\omega x\cos\omega x(a>0,\omega>0)$．从下列四个条件中选择两个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在且唯一确定.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)设 $g(x)=f(x)-2\cos^2\omega x+1$，求函数 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调递增区间.

条件①：$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$；

条件②：$f(x)$ 为偶函数；

条件③：$f(x)$ 的最大值为 1；

条件④：$f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$.

20．已知：函数 $f(x)=\sin x-x\cos x$.

（1）求 $f'(\pi)$；

（2）求证：当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$f(x)<\dfrac{1}{3}x^3$；

（3）若 $f(x) > kx - x\cos x$ 对 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立，求实数 k 的最大值.

21．在无穷数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 1$，对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $a_n \in N^*$，$a_n < a_{n+1}$. 设 $m \in \mathbf{N}^*$，记使得 $a_n \le m$ 成立的 n 的最大值为 b_m.

（1）设数列 $\{a_n\}$ 为 1，3，5，7，⋯，写出 b_1，b_2，b_3 的值；

（2）若 $\{b_n\}$ 为等差数列，求出所有可能的数列 $\{a_n\}$；

（3）设 $a_p = q$，$a_1 + a_2 + \cdots + a_p = A$，求 $b_1 + b_2 + \cdots + b_q$ 的值.（用 p,q,A 表示）

参考答案

1．B

【解析】先利用一元二次不等式的解法化简集合 B，然后进行并集的运算即可.

【详解】∵ $B=\{x|x^2+x-2>0\}=\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>1\}$， $A=\{x|0<x<6\}$，

∴ $A\cup B=\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>0\}$，

故选：B.

2．D

【分析】根据基本初等函数的单调性、奇偶性以及函数奇偶性的定义逐项判断，可得出合适的选项.

【详解】对于 A 选项，函数 $y=\cos x$ 为偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上不单调；

对于 B 选项，令 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，该函数的定义域为 R， $f(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}=f(x)$，

所以，函数 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ 为偶函数，且该函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

对于 C 选项，令 $g(x)=2^x-2^{-x}$，该函数的定义域为 R， $g(-x)=2^{-x}-2^x=-g(x)$，

所以，函数 $y=2^x-2^{-x}$ 为奇函数；

对于 D 选项，令 $h(x)=\ln|x|$，该函数的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$， $h(-x)=\ln|-x|=\ln|x|=h(x)$，

所以，函数 $y=\ln|x|$ 为偶函数，

当 $x>0$ 时， $y=\ln x$，故函数 $y=\ln|x|$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

故选：D.

3．C

【分析】先利用等比数列的定义、通项公式得到公比和首项，再利用等比数列的求和公式进行求解.

【详解】因为 $a_{n+1}=2a_n$，所以 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $q=2$，

又 $a_2=2$，所以 $a_1=1$，则 $S_5=\dfrac{1-2^5}{1-2}=31$.

故选：C.

4．A

【解析】根据任意角三角函数的概念可得出 $\cos\alpha$，然后利用诱导公式求解.

【详解】因为角 α 以 Ox 为始边，且终边与单位圆交于点 $(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{6}}{3})$，

所以 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：A.

【点睛】当 α 以 Ox 为始边，已知角 α 终边上一点的坐标为 (x,y) 时，则 $\sin\alpha=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5．D

【分析】根据函数周期求出ω，根据特殊值计算φ的值.

【详解】解：由图象可知$f(x)$的周期为$T=\dfrac{7\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}=\pi$，

$\therefore\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得$\omega=2$.

由图象可知$f(\dfrac{5\pi}{12})=1$，即$\dfrac{1}{\sin(\dfrac{5\pi}{6}+\varphi)}=1$，

$\therefore\dfrac{5\pi}{6}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$.

$\therefore\varphi=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$，

又$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$.

故选：D.

6．C

【分析】由正弦定理边角互化，以及结合余弦定理，即可判断$\triangle ABC$的形状，即可判断选项.

【详解】因为$\sin^2 A=\sin B\sin C$，所以$a^2=bc$，

由余弦定理可知$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{\pi}{3}=b^2+c^2-bc=bc$，

即$(b-c)^2=0$，得$b=c$，

所以$\triangle ABC$是等边三角形，$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$.

故选：C

7．B

【分析】分充分性和必要性进行讨论：

充分性：取特殊函数$f(x)=\begin{cases}|x|,x\le 0\\ x^2,x>0\end{cases}$进行判断；

必要性：根据函数$f(x)$为偶函数，直接证明.

【详解】充分性：取函数$f(x)=\begin{cases}|x|,x\le 0\\ x^2,x>0\end{cases}$符合条件，但$f(x)$不是偶函数，所以充分性不满足.

必要性：函数$f(x)$为偶函数，则有$f(x)=f(-x)$，所以$f(x)f(-x)=f(x)^2\ge 0$恒成立，所以必要性满足.

选B.

8．D

【分析】由函数奇偶性的定义结合三角函数的性质可判断奇偶性；利用二倍角公式结合二次函数的性质可判断最大值.

【详解】由题意，$f(-x)=\cos(-x)-\cos(-2x)=\cos x-\cos 2x=f(x)$，所以该函数为偶函数，

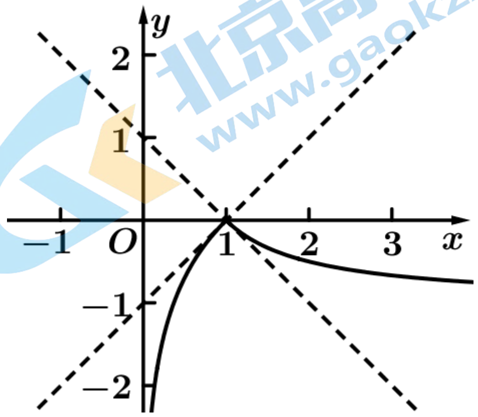
又 $f(x)=\cos x-\cos 2x=-2\cos^2 x+\cos x+1=-2\left(\cos x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$，

所以当 $\cos x=\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 取最大值 $\frac{9}{8}$.

故选：D.

9．D

【详解】试题分析：∵函数 $g(x)=f(x)-kx+k$ 只有一个零点，∴ $y=f(x)$ 与 $y=kx-k$ 只有一个交点，图象如图所示，∴k 的取值范围是 $(-\infty,-1)]\cup[0,1]$.



考点：函数零点问题.

10．C

【分析】利用 $f(\pi+x)\neq f(x)$ 判定①错误；利用导数的符号判定②正确；通过证明 $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ 判定③正确；通过证明 $f\left(-\frac{\pi}{4}-x\right)=-f\left(-\frac{\pi}{4}+x\right)$ 判定④正确.

【详解】对于①：因为 $f(\pi+x)=\frac{\sin(\pi+x)+\cos(\pi+x)}{\sin(\pi+x)\cos(\pi+x)}$

$=\frac{-\sin x-\cos x}{(-\sin x)(-\cos x)}=-\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=-f(x)\neq f(x)$，

所以 π 不是 $f(x)$ 的一个周期，即①错误；

对于②：$f'(x)=\frac{(\cos x-\sin x)\sin x\cos x-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)(\sin x+\cos x)}{(\sin x\cos x)^2}$

$=\frac{(\sin x-\cos x)(1+\frac{1}{2}\sin 2x)}{(\sin x\cos x)^2}$

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时，$\cos x>0$，$\sin x<0$，

所以 $\sin x-\cos x<0$，$(\sin x\cos x)^2>0$，$1+\frac{1}{2}\sin 2x>0$，

则 $\frac{(\sin x-\cos x)(1+\frac{1}{2}\sin 2x)}{(\sin x\cos x)^2}<0$，

即 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上单调递减，即②正确；

对于③：因为 $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)+\cos(\frac{\pi}{4}-x)}{\sin(\frac{\pi}{4}-x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)}=\frac{\sqrt{2}\cos x}{\frac{1}{2}\cos 2x}=\frac{2\sqrt{2}\cos x}{\cos 2x}$，

且 $f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+x)+\cos(\frac{\pi}{4}+x)}{\sin(\frac{\pi}{4}+x)\cos(\frac{\pi}{4}+x)}=\frac{\sqrt{2}\cos x}{\frac{1}{2}\cos 2x}=\frac{2\sqrt{2}\cos x}{\cos 2x}$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$，

即 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，即③正确；

对于④：因为 $f\left(-\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sin(-\frac{\pi}{4}-x)+\cos(-\frac{\pi}{4}-x)}{\sin(-\frac{\pi}{4}-x)\cos(-\frac{\pi}{4}-x)}$

$=\frac{-\sin(\frac{\pi}{4}+x)+\cos(\frac{\pi}{4}+x)}{-\sin(\frac{\pi}{4}+x)\cos(\frac{\pi}{4}+x)}=\frac{\sqrt{2}\sin x}{\frac{1}{2}\cos 2x}=\frac{2\sqrt{2}\sin x}{\cos 2x}$，

且 $f\left(-\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sin(-\frac{\pi}{4}+x)+\cos(-\frac{\pi}{4}+x)}{\sin(-\frac{\pi}{4}+x)\cos(-\frac{\pi}{4}+x)}$

$=\frac{-\sin(\frac{\pi}{4}-x)+\cos(\frac{\pi}{4}-x)}{-\sin(\frac{\pi}{4}-x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)}=\frac{\sqrt{2}\sin x}{-\frac{1}{2}\cos 2x}=-\frac{2\sqrt{2}\sin x}{\cos 2x}$，

所以 $f\left(-\frac{\pi}{4}-x\right)=-f\left(-\frac{\pi}{4}+x\right)$，

即 $f(x)$的图象关于直线$\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$对称，故④正确；

即正确结论个数为 3 个.

故选：C.

11．2

【分析】根据复数四则运算及复数的定义即可求解.

【详解】因为 $z=(2-\mathrm{i})\mathrm{i}=2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2=1+2\mathrm{i}$，

所以复数 $z=(2-\mathrm{i})\mathrm{i}$ 的虚部是 2.

故答案为：2.

12．-3.

【分析】由两角差的正切公式展开，解关于 $\tan\alpha$ 的方程.

【详解】因为 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2$，所以 $\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=2\Rightarrow\tan\alpha=-3$.

【点睛】本题考查两角差正切公式的简单应用，注意公式的特点：分子是减号，分母是加号.

13．π（答案不唯一，只要是 $(2k+1)\pi$ 即可）

【分析】先根据函数的对称性得到 $c=0$，再根据诱导公式求出 $m=(2k+1)\pi$ 都可满足条件.

【详解】函数 $f(x)=\sin x$ 中心对称点都在 x 轴上，所以 $c=0$，

所以 $f(x)+f(x+m)=0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

$f(x)+f(x+m)=\sin x+\sin(x+m)=0$，

所以 $\sin x=-\sin(x+m)$，故利用诱导公式得 $m=(2k+1)\pi$ 都可满足条件.

故答案为：π（答案不唯一，只要是 $(2k+1)\pi$ 即可）

【点睛】正弦函数的奇偶性，对称性，周期性，单调性及诱导公式等等是我们必备的基础知识，做题时经常用到.

14．$\frac{1}{4}$##0.25

【分析】由题意，得 $\angle AOB=\frac{\pi}{6}$，计算 $|\overrightarrow{OA}|$，$|\overrightarrow{OB}|$，再利用三角形的面积公式代入计算即可.

【详解】由题意，可得 $\angle AOB=\frac{\pi}{6}$，$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{6})+\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}=1$，所以

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}$

故答案为：$\frac{1}{4}$

15．$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$；

【详解】f(x)＝sin x－2cos x＝$\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\sin x-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos x\right)$＝$\sqrt{5}$ sin(x－φ)，其中 sin φ＝$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，cos φ＝$\frac{\sqrt{5}}{5}$，当 x－φ＝2kπ＋$\frac{\pi}{2}$ (k∈Z)时，函数 f(x)取得最大值，即 θ＝2kπ＋$\frac{\pi}{2}$＋φ 时，函数 f(x)取到最大值，所以 cos θ ＝－sin φ＝－$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

16．（1）π，$x_0=\frac{7\pi}{6}$，$y_0=3$；（2）最大值 0，最小值-3.

【详解】试题分析：（1）由图可得出该三角函数的周期，从而求出x_0,y_0；（2）把$2x+\frac{\pi}{6}$看作一个整体，从而求出最大值与最小值.

（1）由题意知：$f(x)$的最小正周期为π，令 y=3，则$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，解得$x=\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in Z$，

所以$x_0=\frac{7\pi}{6}$，$y_0=3$.

（2）因为$x\in[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{12}]$，所以$2x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{5\pi}{6},0]$，于是

当$2x+\frac{\pi}{6}=0$，即$x=-\frac{\pi}{12}$时，$f(x)$取得最大值 0；

当$2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，即$x=-\frac{\pi}{3}$时，$f(x)$取得最小值$-3$.

考点：本小题主要考查三角函数的图象与性质，求三角函数的最值等基础知识，考查同学们数形结合、转化与化归的数学思想，考查同学们分析问题与解决问题的能力.

17．（1）$4x+y-5=0$；（2）函数$f(x)$的增区间为$(-\infty,-1)$、$(4,+\infty)$，单调递减区间为$(-1,4)$，最大值为 1，最小值为$-\frac{1}{4}$.

【分析】（1）求出$f(1)$、$f'(1)$的值，利用点斜式可得出所求切线的方程；

（2）由$f'(-1)=0$可求得实数a的值，然后利用导数分析函数$f(x)$的单调性与极值，由此可得出结果.

【详解】（1）当$a=0$时，$f(x)=\frac{3-2x}{x^2}$，则$f'(x)=\frac{2(x-3)}{x^3}$，$\therefore f(1)=1$，$f'(1)=-4$，

此时，曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-1=-4(x-1)$，即$4x+y-5=0$；

（2）因为$f(x)=\frac{3-2x}{x^2+a}$，则$f'(x)=\frac{-2(x^2+a)-2x(3-2x)}{(x^2+a)^2}=\frac{2(x^2-3x-a)}{(x^2+a)^2}$，

由题意可得$f'(-1)=\frac{2(4-a)}{(a+1)^2}=0$，解得$a=4$，

故$f(x)=\frac{3-2x}{x^2+4}$，$f'(x)=\frac{2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}$，列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,4)$	4	$(4,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

所以，函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,-1)$、$(4,+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,4)$.

当 $x<\frac{3}{2}$ 时， $f(x)>0$；当 $x>\frac{3}{2}$ 时， $f(x)<0$.

所以， $f(x)_{\max}=f(-1)=1$， $f(x)_{\min}=f(4)=-\frac{1}{4}$.

18．(1) $b=5$

(2) $A=\frac{\pi}{3}$， $S_{\triangle ABC}=10\sqrt{3}$

【分析】(1) 若选①，则直接利用余弦定理可求得 b，若选②，先由同角三角函数的关系求出 $\sin B,\sin C$，然后由正弦定理可求出 b，

(2) 若选①，先求出 $\sin C$，再利用正弦定理可求出角 A，利用面积公式可求出其面积，若选②，由于 $\cos A=-\cos(B+C)$，利用两角和的余弦公式展开计算可求出角 A，利用面积公式可求出其面积，

(1)

选择条件①

因为 $\cos C=\frac{1}{7}$， $c=8$， $a=7$，

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得 $64=49+b^2-14b\times\frac{1}{7}$，

化简得 $b^2-2b-15=0$，

解得 $b=5$ 或 $b=-3$（舍）.

所以 $b=5$；

选择条件②

因为 $\cos B=\frac{11}{14}$， $0<B<\pi$，

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

因为 $\cos C=\frac{1}{7}$， $0<C<\pi$，

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $\frac{b}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}=\frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$，

解得 $b=5$；

(2)

选择条件①

因为$\cos C=\frac{1}{7}$， $0<C<\pi$，

所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得$\frac{7}{\sin A}=\frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$，

所以$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$c>a$，所以$C>A$，

所以A为锐角，

所以$A=\frac{\pi}{3}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 7\times 5\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=10\sqrt{3}$，

选择条件②

由（1）知$\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{14}$， $\sin C=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

又因为$\cos B=\frac{11}{14}$， $\cos C=\frac{1}{7}$，

在$\triangle ABC$中， $A=\pi-(B+C)$，

所以$\cos A=-\cos(B+C)=-\cos B\cos C+\sin B\sin C$

$=-\frac{11}{14}\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$

因为$0<A<\pi$

所以$A=\frac{\pi}{3}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 5\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

19．(1) $f(x)=\sin 2x$；

(2)$\left(0,\frac{3\pi}{8}\right],\left[\frac{7\pi}{8},\pi\right)$

【分析】（1）先由降幂公式得$f(x)=\frac{a}{2}\sin 2\omega x(a>0,\omega>0)$，故$f(x)$为奇函数，排除条件②，若选①③，$f(x)$不唯一，不合题意；若选①④由$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$及周期解出$f(x)$即可；若选③④由最大值及周期解出$f(x)$即可；

（2）先由倍角公式及辅助角公式求出 $g(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，再令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 解出单调区间，最后写出在 $(0,\pi)$ 上的单调递增区间即可.

（1）

$f(x)=a\sin\omega x\cos\omega x=\frac{a}{2}\sin 2\omega x(a>0,\omega>0)$，易知 $f(x)$ 为奇函数，故条件②不成立，舍去.

若选①③，则 $f(\frac{\pi}{4})=\frac{a}{2}\sin\frac{\pi\omega}{2}=1$ 且 $\frac{a}{2}=1$，故 $a=2$，$\frac{\pi\omega}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=1+4k,k\in\mathbf{Z}$，故 $f(x)$ 不唯一，不合题意；

若选①④，$f(\frac{\pi}{4})=\frac{a}{2}\sin\frac{\pi\omega}{2}=1$ 且 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，故 $T=\pi=\frac{2\pi}{2\omega}$，解得 $\omega=1$，$a=2$，存在且唯一，故 $f(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$；

若选③④，则 $\frac{a}{2}=1$ 且 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，故 $T=\pi=\frac{2\pi}{2\omega}$，解得 $a=2$，$\omega=1$，故 $f(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$，存在且唯一，故 $f(x)=\sin 2x$；

（2）

$g(x)=f(x)-2\cos^2\omega x+1=\sin 2x-2\cos^2 x+1=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，令

$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

解得 $-\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{3\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，$-\frac{\pi}{8}\le x\le\frac{3\pi}{8}$，当 $k=1$ 时，$\frac{7\pi}{8}\le x\le\frac{11\pi}{8}$，

故函数 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调递增区间为 $\left(0,\frac{3\pi}{8}\right],\left[\frac{7\pi}{8},\pi\right)$.

20.（1）0；（2）证明见解析；（3）$\frac{2}{\pi}$.

【解析】（1）首先求函数的导数，再代入求 $f'(\pi)$ 的值；（2）首先设函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，求函数的导数，利用导数正负判断函数的单调性，求得函数 $g(x)_{\max}<0$，（3）首先不等式等价于 $\sin x>kx$ 对 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 恒成立，参变分离后转化为 $k<\frac{\sin x}{x}$ 对 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 恒成立，

利用导数求函数 $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的最小值，转化为求实数 k 的最大值.

【详解】$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

（1）$f'(\pi)=0$；

（2）令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，则 $g'(x)=x\sin x-x^2=x(\sin x-x)$，

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，设 $t(x)=\sin x-x$，则 $t'(x)=\cos x-1<0$

所以$t(x)$在$x\in(0,\frac{\pi}{2})$单调递减， $t(x)=\sin x-x<t(0)=0$

即$\sin x<x$，所以$g'(x)<0$

所以$g(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减，所以$g(x)<g(0)=0$，

所以 $f(x)<\frac{1}{3}x^3$.

（3）原题等价于$\sin x>kx$对$x\in(0,\frac{\pi}{2})$恒成立，

即$k<\frac{\sin x}{x}$对$x\in(0,\frac{\pi}{2})$恒成立，

令$h(x)=\frac{\sin x}{x}$，则$h'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=-\frac{f(x)}{x^2}$.

易知 $f'(x)=x\sin x>0$，即 $f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$单调递增，

所以 $f(x)>f(0)=0$，所以$h'(x)<0$，

故$h(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$单调递减，所以$k\le h(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$.

综上所述， k的最大值为$\frac{2}{\pi}$.

【点睛】方法点睛：由不等式恒成立求参数的取值范围的方法：

1.讨论最值，先构造函数，利用导数研究函数的单调性，求出含参函数的最值，进而得出相应的含参不等式求参数的取值范围；

2.分离参数：先分离参数变量，再构造函数，求出函数的最值，从而求出参数的取值范围.

21.（1） $b_1=1$， $b_2=1$， $b_3=2$；（2） $a_n=n$；（3） $b_1+b_2+\cdots+b_q=p(q+1)-A$.

【详解】试题分析：（1）根据使得$a_n<a_{n+1}$成立的 n的最大值为b_m， $a_n\le 1$，则$b_1=1$， $a_n\le 2$，则$b_2=1$， $a_n\le 3$，则$b_3=2$，这样就写出 b_1， b_2， b_3的值；（2）若$\{b_n\}$为等差数列，先判断$a_n\ge n$，再证明$a_n\le n$，即可求出所有可能的数列$\{a_n\}$；（3）确定$b_1=1$， $b_2=b_3=2$，依此类推，发现规律，得出b_q，从而求出 $b_1+b_2+\cdots+b_q$的值.

试题解析：（1） $b_1=1$， $b_2=1$， $b_3=2$.

（2）由题意，得$1=a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$，

结合条件$a_n\in N^*$，得$a_n\ge n$.

又因为使得$a_n\le m$成立的n的最大值为b_m，使得$a_n\le m+1$成立的n的最大值为b_{m+1}，

所以$b_1=1$， $b_m\le b_{m+1}(m\in N^*)$.

设$a_2=k$，则$k\ge 2$.

假设$k>2$，即$a_2=k>2$，

则当$n\ge 2$时， $a_n>2$；当$n\ge 3$时， $a_n\ge k+1$.

所以$b_2=1$，$b_k=2$.

因为$\{b_n\}$为等差数列，

所以公差$d=b_2-b_1=0$，

所以$b_n=1$，其中$n\in N^*$.

这与$b_k=2(k>2)$矛盾，

所以$a_2=2$.

又因为$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$，

所以$b_2=2$，

由$\{b_n\}$为等差数列，得$b_n=n$，其中$n\in N^*$.

因为使得$a_n\le m$成立的n的最大值为b_m，

所以$a_n\le n$，

由$a_n\ge n$，得$a_n=n$.

（3）设$a_2=k(k>1)$，

因为$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$，

所以$b_1=b_2=\cdots=b_{k-1}=1$，且 $b_k=2$，

所以数列$\{b_n\}$中等于 1 的项有$k-1$个，即a_2-a_1个；

设$a_3=l(l>k)$，

则$b_k=b_{k+1}=\cdots=b_{l-1}=2$， 且$b_l=3$，

所以数列$\{b_n\}$中等于 2 的项有$l-k$个，即a_3-a_2个；

以此类推，数列$\{b_n\}$中等于$p-1$的项有a_p-a_{p-1}个.

所以$b_1+b_2+\cdots+b_q=(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+\cdots+(p-1)(a_p-a_{p-1})+p$

$=-a_1-a_2-\cdots-a_{p-1}+(p-1)a_p+p$

$=pa_p+p-(a_1+a_2+\cdots+a_{p-1}+a_p)$

$=p(q+1)-A$.

即$b_1+b_2+\cdots+b_q=p(q+1)-A$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。