西城区高三模拟测试

# 数学（文科）

2018.5

## 第 I 卷（选择题　共 40 分）

一、　选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的 四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．若集合 $A=\{x\,|\,0<x<1\}$， $B=\{x\,|\,x^2-2x<0\}$，则下列结论中正确的是

（A） $A\cap B=\varnothing$　　　　（B） $A\cup B=\mathbf{R}$

（C） $A\subseteq B$　　　　（D） $B\subseteq A$

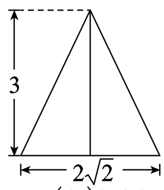
2．复数 $\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}=$

（A） $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$　　（B） $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$　　（C） $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$　　（D） $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$

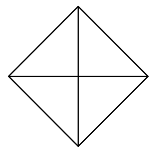
3．下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是

（A） $y=\dfrac{1}{x}$　　（B） $y=x^2$　　（C） $y=\cos x$　　（D） $y=-\ln|x|$

4．某正四棱锥的正（主）视图和俯视图如图所示，该正四棱锥的侧棱长是



正（主）视图


俯视图

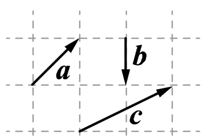
（A） $\sqrt{10}$

（B） $\sqrt{11}$

（C） $4\sqrt{10}$

（D） $4\sqrt{11}$

5．向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示．若向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则实数 $\lambda=$




（A） $-2$　　（B） $-1$　　（C） $1$　　（D） $2$

6．设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $ab\neq 0$．则“ $ab>1$ ”是“ $a>\dfrac{1}{b}$ ”的

（A）充分而不必要条件　　　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

7．设不等式组 $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x+y \geqslant 3, \\ 2x+y \leqslant 5 \end{cases}$ 表示的平面区域为 $D$．若直线 $ax-y=0$ 上存在区域 $D$ 上的点，

则实数 $a$ 的取值范围是

（A）$[\frac{1}{2},2]$　　　　（B）$[\frac{1}{2},3]$

（C）$[1,2]$　　　　（D）$[2,3]$

8．地铁某换乘站设有编号为 A，B，C，D，E 的五个安全出口．若同时开放其中的两个安全出口，疏散 1000 名乘客所需的时间如下：

| 安全出口编号 | A，B | B，C | C，D | D，E | A，E |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 疏散乘客时间（s） | 120 | 220 | 160 | 140 | 200 |

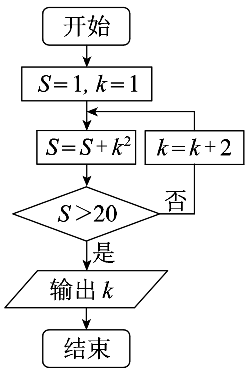
则疏散乘客最快的一个安全出口的编号是

（A）A　　（B）B　　（C）D　　（D）E

## 第II卷（非选择题　共 110 分）

**二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．**

9．函数 $y=\frac{1}{|x|+2}$ 的最大值是____．




10．执行如右图所示的程序框图，输出的 $k$ 值为____．

11．在△$ABC$ 中，$a=3$，$b=2$，$\cos B=\frac{4}{5}$，则 $\sin A=$____．

12．双曲线 $C:\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ 的焦距是____；若圆 $(x-1)^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 与双曲线 $C$ 的渐近线相切，则 $r=$____．

13．为绿化生活环境，某市开展植树活动．今年全年植树 6.4 万棵，计划 3 年后全年植树 12.5 万棵．若植树的棵数每年的增长率均为 $a$，则 $a=$____.

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases} a+2^x, & x\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2}x+a, & x>1, \end{cases}$ 其中 $a\in\mathbf{R}$．如果函数 $f(x)$ 恰有两个零点，那么 $a$ 的取值范围是____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

在等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 中，$a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$2+a_4=b_3$．

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$．

16．（本小题满分 13 分）

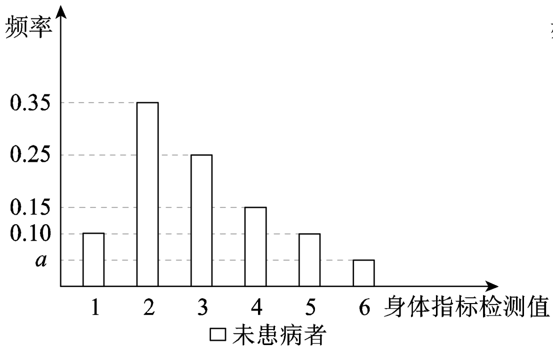
已知函数 $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$．

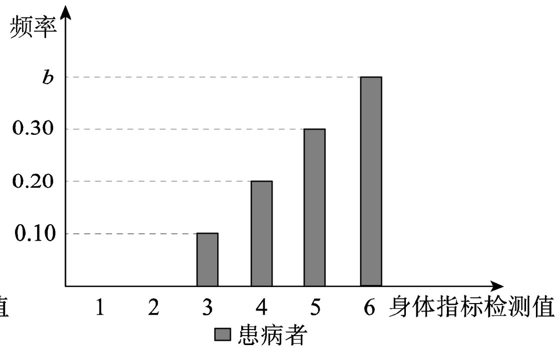
（Ⅰ）求 $f(x)$ 的定义域；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的取值范围．

17.（本小题满分 13 分）

在某地区，某项职业的从业者共约 8.5 万人，其中约 3.4 万人患有某种职业病．为了解这种职业病与某项身体指标（检测值为不超过 6 的正整数）间的关系，依据是否患有职业病，使用分层抽样的方法随机抽取了 100 名从业者，记录他们该项身体指标的检测值，整理得到如下统计图：




（Ⅰ）求样本中患病者的人数和图中 $a$，$b$ 的值；

（Ⅱ）试估计此地区该项身体指标检测值不低于 5 的从业者的人数；

（III）某研究机构提出，可以选取常数 $X_0 = 4.5$，若一名从业者该项身体指标检测值大于 $X_0$，则判断其患有这种职业病；若检测值小于 $X_0$，则判断其未患有这种职业病．从样本中随机选择一名从业者，按照这种方式判断其是否患病，求判断错误的概率．

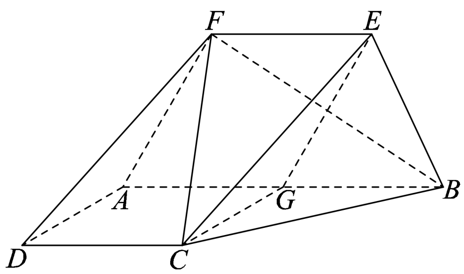
18.（本小题满分 14 分）

如图，梯形 $ABCD$ 所在的平面与等腰梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直，$AB // CD // EF$，$AB \perp AD$，$G$ 为 $AB$ 的中点．$CD = DA = AF = FE = 2$，$AB = 4$．

（Ⅰ）求证：$DF //$ 平面 $BCE$；

（Ⅱ）求证：平面 $BCF \perp$ 平面 $GCE$；

（III）求多面体 $AFEBCD$ 的体积．



19.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-ax$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线经过点 $(2,-1)$.

（Ⅰ）求实数 $a$ 的值；

（Ⅱ）设 $b>1$，求 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{1}{b},b]$ 上的最大值和最小值.

20.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，经过点 $(0,1)$.

（Ⅰ）求椭圆 $C$ 的方程；

（Ⅱ）设直线 $y=x$ 与椭圆 $C$ 交于 $A$，$B$ 两点，斜率为 $k$ 的直线 $l$ 与椭圆 $C$ 交于 $M$，$N$ 两点，与直线 $y=x$ 交于点 $P$（点 $P$ 与点 $A$，$B$，$M$，$N$ 不重合）.

（ⅰ）当 $k=-1$ 时，证明：$|PA||PB|=|PM||PN|$；

（ⅱ）写出 $\dfrac{|PA||PB|}{|PM||PN|}$ 以 $k$ 为自变量的函数式（只需写出结论）.

西城区高三模拟测试

# 数学（文科）参考答案及评分标准

2018.5

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．C　　2．A　　3．D　　4．B

5．D　　6．D　　7．B　　8．C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．$\frac{1}{2}$　　10．5　　11．$\frac{9}{10}$

12．10，$\frac{3}{5}$　　13．25%　　14．$[-2,-\frac{1}{2})$

**注：第 12 题第一空 3 分，第二空 2 分.**

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15．（本小题满分 13 分）

**解：**（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d$，等比数列$\{b_n\}$的公比为$q$.

依题意，得 $\begin{cases}1+d=q,\\ 2+(1+3d)=q^2.\end{cases}$　　………………… 2 分

解得 $\begin{cases}d=2,\\ q=3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}d=-1,\\ q=0.\end{cases}$（舍去）　　………………… 4 分

所以 $a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$.　　………………… 6 分

（Ⅱ）因为 $a_n+b_n=2n-1+3^{n-1}$，　　………………… 7 分

所以 $S_n=[1+3+5+\cdots+(2n-1)]+(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})$　　………………… 9 分

$=\frac{n[1+(2n-1)]}{2}+\frac{1-3^n}{1-3}$　　…………………11 分

$=n^2+\frac{3^n-1}{2}$.　　…………………13 分

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $\sin x+\cos x\neq 0$， …………………… 2 分

得 $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\neq 0$， …………………… 3 分

所以 $x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi$，其中 $k\in\mathbf{Z}$． …………………… 4 分

所以 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\neq k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$． …………………… 5 分

（Ⅱ）因为 $f(x)=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}$ …………………… 7 分

$=\cos x-\sin x$ …………………… 9 分

$=\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$． ……………………11 分

由（Ⅰ）得 $x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi$，其中 $k\in\mathbf{Z}$，

所以 $-1<\cos(x+\frac{\pi}{4})<1$， ……………………12 分

所以 $f(x)$ 的取值范围是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$． ……………………13 分

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）根据分层抽样原则，容量为 100 的样本中，患病者的人数为

$100\times\dfrac{3.4}{8.5}=40$ 人． …………………… 2 分

$a=1-0.10-0.35-0.25-0.15-0.10=0.05$，

$b=1-0.10-0.20-0.30=0.40$． …………………… 4 分

（Ⅱ）指标检测值不低于 5 的样本中，

有患病者 $40\times(0.30+0.40)=28$ 人，未患病者 $60\times(0.10+0.05)=9$ 人，共 37 人．

…………………… 6 分

此地区该项身体指标检测值不低于 5 的从业者的人数约为 $\dfrac{37}{100}\times 85000=31450$ 人．

…………………… 8 分

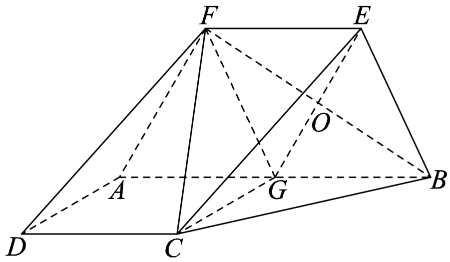
（Ⅲ）当 $X_0=4.5$ 时，在 100 个样本数据中，

有 $40\times(0.10+0.20)=12$ 名患病者被误判为未患病， ……………………10 分

有 $60\times(0.10+0.05)=9$ 名未患病者被误判为患病者， ……………………12 分

因此判断错误的概率为 $\dfrac{21}{100}$． ………………13 分

18．（本小题满分 14 分）




**解：**（Ⅰ）因为 $CD//EF$，且 $CD=EF$，

所以 四边形 $CDFE$ 为平行四边形，

所以 $DF//CE$． …… 2 分

因为 $DF\not\subset$ 平面 $BCE$， …… 3 分

所以 $DF//$ 平面 $BCE$． …… 4 分

（Ⅱ）连接 $FG$．

因为 平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$， $AD\perp AB$，

所以 $AD\perp$ 平面 $ABEF$，

所以 $BF\perp AD$． ………………6 分

因为 $G$ 为 $AB$ 的中点，

所以 $AG//CD$，且 $AG=CD$； $EF//BG$，且 $EF=BG$，

所以 四边形 $AGCD$ 和四边形 $BEFG$ 均为平行四边形．

所以 $AD//CG$，　　所以 $BF\perp CG$． ……………… 7 分

因为 $EF=EB$，

所以 四边形 $BEFG$ 为菱形，

所以 $BF\perp EG$． ……………… 8 分

所以 $BF\perp$ 平面 $GCE$． ……………… 9 分

所以 平面 $BCF\perp$ 平面 $GCE$． ………………10 分

（Ⅲ）设 $BF\cap GE=O$．

由（Ⅰ）得 $DF//CE$，所以 $DF//$ 平面 $GCE$，

由（Ⅱ）得 $AD//CG$，所以 $AD//$ 平面 $GCE$，

所以 平面 $ADF//$ 平面 $GCE$，

所以 几何体 $ADF-GCE$ 是三棱柱． ………………11 分

由（Ⅱ）得 $BF \perp$ 平面 $GCE$.

所以 多面体 $AFEBCD$ 的体积 $V = V_{ADF-GCE} + V_{B-GCE}$ ………………12 分

$$= S_{\Delta GCE} \cdot FO + \frac{1}{3} S_{\Delta GCE} \cdot BO$$

$$= \frac{4}{3} S_{\Delta GCE} \cdot FO = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$ ………………14 分

19.（本小题满分 13 分）

**解：**（Ⅰ）$f(x)$ 的导函数为 $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x - ax^2}{x^2}$， ……………… 2 分

所以 $f'(1) = 1 - a$.

依题意，有 $\dfrac{f(1) - (-1)}{1 - 2} = 1 - a$，

即 $\dfrac{-a + 1}{1 - 2} = 1 - a$， ……………… 4 分

解得 $a = 1$. ……………… 5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f'(x) = \dfrac{1 - x^2 - \ln x}{x^2}$.

当 $0 < x < 1$ 时，$1 - x^2 > 0$，$-\ln x > 0$，所以 $f'(x) > 0$，故 $f(x)$ 单调递增；

当 $x > 1$ 时，$1 - x^2 < 0$，$-\ln x < 0$，所以 $f'(x) < 0$，故 $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ……………… 8 分

因为 $0 < \dfrac{1}{b} < 1 < b$， 所以 $f(x)$ 最大值为 $f(1) = -1$. ……………… 9 分

设 $h(b) = f(b) - f(\dfrac{1}{b}) = (b + \dfrac{1}{b})\ln b - b + \dfrac{1}{b}$，其中 $b > 1$. ………………10 分

则 $h'(b) = (1 - \dfrac{1}{b^2})\ln b > 0$，

故 $h(b)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ………………11 分

所以 $h(b) > h(1) = 0$， 即 $f(b) > f(\dfrac{1}{b})$， ………………12 分

故 $f(x)$ 最小值为 $f(\dfrac{1}{b}) = -b\ln b - \dfrac{1}{b}$. ………………13 分

20.（本小题满分 14 分）

**解：**（Ⅰ）设椭圆 $C$ 的半焦距为 $c$. 依题意，得

$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$， $b=1$， 且 $a^2=b^2+c^2$． ………………… 2 分

解得 $a=\sqrt{3}$． ………………… 3 分

所以 椭圆 $C$ 的方程是 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$． ………………… 4 分

（Ⅱ）（ⅰ）由 $\begin{cases} y=x, \\ x^2+3y^2=3, \end{cases}$ 得 $A(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$， $B(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$． ………………… 5 分

$k=-1$时，设直线$l$的方程为$y=-x+t$．

由 $\begin{cases} y=-x+t, \\ x^2+3y^2=3, \end{cases}$ 得 $4x^2-6tx+3t^2-3=0$． ………………… 6 分

令 $\Delta=36t^2-48(t^2-1)>0$，解得 $t^2<4$．

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{3t}{2}$， $x_1\cdot x_2=\frac{3t^2-3}{4}$． ………………… 8 分

由 $\begin{cases} y=-x+t, \\ y=x, \end{cases}$ 得 $P(\frac{t}{2},\frac{t}{2})$． ………………… 9 分

所以 $|PA||PB|=\sqrt{2}\left|\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\cdot\sqrt{2}\left|\frac{t}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\left|\frac{t^2-3}{2}\right|$． …………………10 分

因为 $|PM|=\sqrt{(\frac{t}{2}-x_1)^2+(\frac{t}{2}-y_1)^2}=\sqrt{2}\left|\frac{t}{2}-x_1\right|$， 同理$|PN|=\sqrt{2}\left|\frac{t}{2}-x_2\right|$．

所以 $|PM||PN|=2\left|\frac{t}{2}-x_1\right|\cdot\left|\frac{t}{2}-x_2\right|$

$$=2\left|\frac{t^2}{4}-\frac{t}{2}\cdot\frac{3t}{2}+\frac{3t^2-3}{4}\right|$$

$$=\left|\frac{t^2-3}{2}\right|.$$

所以 $|PA||PB|=|PM||PN|$． …………………12 分

（ⅱ）$\frac{|PA||PB|}{|PM||PN|}=\frac{1+3k^2}{2(1+k^2)}$． …………………14 分

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao