

丰台区 2018 年高三年级第二学期综合练习（二）

数 学（文科）

2018. 05

（本试卷满分共 150 分，考试时间 120 分钟）

注意事项：

1. 答题前，考生务必先将答题卡上的学校、年级、班级、姓名、准考证号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的准考证号、姓名，在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。
2. 本次考试所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。
3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试卷、草稿纸上答题无效。
4. 请保持答题卡卡面清洁，不要装订、不要折叠、不要破损。

第一部分 （选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知 $U = \mathbf{R}$ ， $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ，则 $\complement_U A =$

- | | |
|---|---|
| (A) $\{x x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$ | (B) $\{x x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 1\}$ |
| (C) $\{x x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$ | (D) $\{x x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$ |

(2) 设 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 为非零向量，则“ $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ ”是“ $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 方向相同”的

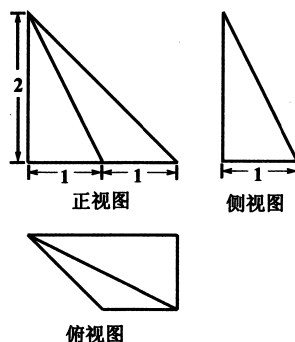
- | | |
|--------------|----------------|
| (A) 充分而不必要条件 | (B) 必要而不充分条件 |
| (C) 充分必要条件 | (D) 既不充分也不必要条件 |

(3) 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ ，则 $a =$

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ |
| (C) $\sqrt{3}$ | (D) $2\sqrt{3}$ |

(4) 某四棱锥的三视图如图所示, 则该四棱锥的体积为

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 6



(5) 下列函数中, 既是偶函数, 又在区间 $(-\infty, 0)$ 上为减函数的是

- (A) $y = \log_2(-x)$ (B) $y = \frac{x}{1-x}$
(C) $y = -x^2 + 1$ (D) $y = e^{|x|}$

(6) 执行如图所示的程序框图, 则输出的 S 值为

- (A) 25 (B) 20
(C) 13 (D) 6

(7) 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AB 中点, E 为 CD 中点, 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$,

$\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$, 则 $\frac{\lambda}{\mu}$ 的值是

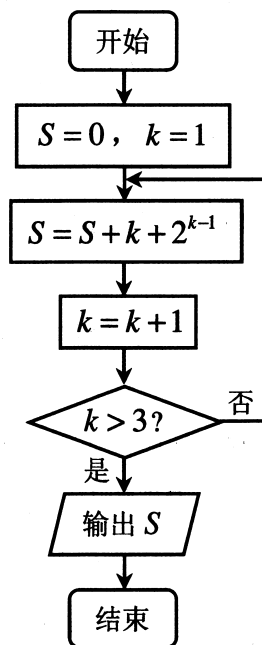
- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$
(C) 2 (D) 4

(8) 某游戏开始时, 有红色精灵 m 个, 蓝色精灵 n 个. 游戏

规则是: 任意点击两个精灵, 若两精灵同色, 则合并成一个红色精灵, 若两精灵异色, 则合并成一个蓝色精灵,

当只剩一个精灵时, 游戏结束. 那么游戏结束时, 剩下的精灵的颜色

- (A) 只与 m 的奇偶性有关
(B) 只与 n 的奇偶性有关
(C) 与 m , n 的奇偶性都有关
(D) 与 m , n 的奇偶性都无关



第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(9) 复数 $\frac{i^4}{1+2i}$ 的虚部为_____.

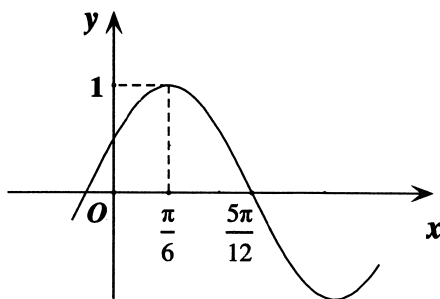
(10) 已知实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x-y \geq 0, \\ x+y \leq 2, \\ x+2y \geq 0, \end{cases}$ 则 $x+4y$ 的最大值是_____.

(11) 已知圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 4$, 则过点 $P(2, \sqrt{3})$ 且与圆 C 相切的直线方程为_____.

(12) 已知函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)

的部分图象如图所示, 则 $\omega =$ _____;

$\varphi =$ _____.



(13) 设函数 $f(x) = \begin{cases} -x-2, & x \leq 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 0. \end{cases}$

① $f(2) =$ _____;

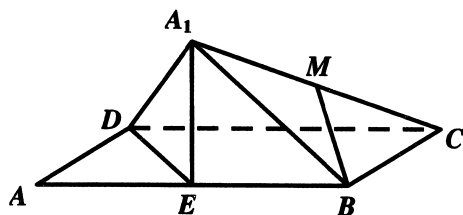
② 若 $f(x+1) > 1$, 则 x 的取值范围是_____.

(14) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 2$, E 为 AB 的中点. 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折, 得到四棱锥 $A_1 - DEBC$. 设 A_1C 的中点为 M , 在翻折过程中, 有下列三个命题:

① 总有 $BM \parallel$ 平面 A_1DE ;

② 线段 BM 的长为定值;

③ 存在某个位置, 使 DE 与 A_1C 所成的角为 90° .



其中正确的命题是_____. (写出所有正确命题的序号)

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

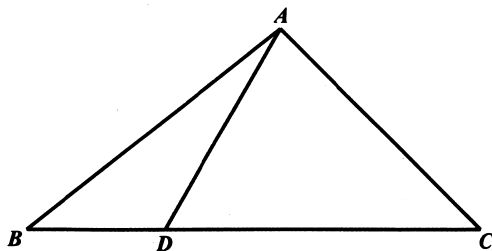
(15) (本小题共 13 分)

如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 边上一点， $AB=14$ ， $BD=6$ ， $AD=10$ ，

$$\cos \angle DAC = \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

(I) 求 $\angle ADB$;

(II) 求 AC 的长.



(16) (本小题共 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3n^2$ ，等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=3b_1$ ， $b_2b_4=a_2$ 。

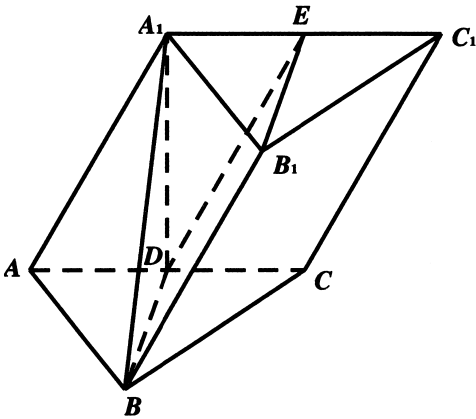
(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\{b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和 T_n 。

(17) (本小题共 14 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， D 是 AC 的中点， $A_1D \perp$ 平面 ABC ， $AB = BC$ ，平面 BB_1D 与棱 A_1C_1 交于点 E 。

- (I) 求证： $AC \perp A_1B$ ；
(II) 求证：平面 $BB_1D \perp$ 平面 AA_1C_1C ；
(III) 求证： $B_1B \parallel DE$ 。



(18) (本小题共 13 分)

某汽车生产厂家为了解某型号电动汽车的“实际平均续航里程数”，收集了使用该型号电动汽车1年以上的部分客户的数据，得到他们的电动汽车的“实际平均续航里程数”。从年龄在40岁以下的客户中抽取8位归为A组，从年龄在40岁(含40岁)以上的客户中抽取8位归为B组，将他们的电动汽车的“实际平均续航里程数”整理成如下茎叶图：

A 组客户					B 组客户			
30	25	25	20	2	00	20	30	
40	38	32	30	3	32	38	40	60 80

注：“实际平均续航里程数”是指电动汽车的行驶总里程与充电次数的比值。

- (I) 分别求出 A 组客户与 B 组客户“实际平均续航里程数”的平均值；
(II) 在 A, B 两组客户中，从“实际平均续航里程数”大于 335 客户中各随机抽取 1 位客户，求 A 组客户的“实际平均续航里程数”不小于 B 组客户的“实际平均续航里程数”的概率；

(19) (本小题共 13 分)

已知函数 $f(x) = (x - a) \cos x - \sin x$, $x \in (0, \pi)$, ($a \in \mathbf{R}$).

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若对于任意 $x_1 \in (0, \pi)$, 存在 $x_2 \in (0, \pi)$, 都有 $f(x_1) > x_2^2 - 2x_2 - 1$, 求 a 的取值范围.

(20) (本小题共 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的长轴长为 4, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 过右焦点的

直线 l 与椭圆相交于 M, N 两点, 点 P 的坐标为 $(4, 3)$, 记直线 PM, PN 的斜率分别为 k_1, k_2 .

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 当 $|MN| = \frac{24}{7}$ 时, 求直线 l 的斜率;

(III) 求证: $k_1 + k_2$ 为定值.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

丰台区 2018 年高三年级第二学期综合练习（二）

数 学（文科）参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	A	B	C	A	D	C	B	B

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

- (9) $-\frac{2}{5}$ (10) 5 (11) $x + \sqrt{3}y - 5 = 0$
 (12) 2; $\frac{\pi}{6}$ (13) $-1; (-\infty, -4) \cup (-1, -\frac{1}{2})$ (14) ①②

注：第 12, 13 题第一个空填对得 3 分，第二个空填对得 2 分。

第 14 题只写对一个得 2 分，有一个错误不得分。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15) (本小题共 13 分)

解：(I) 在 $\triangle ADB$ 中，由余弦定理得

$$\cos \angle ADB = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} = \frac{100 + 36 - 196}{2 \times 10 \times 6} = -\frac{1}{2}. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

因为 $\angle ADB \in (0, \pi)$, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}

所以 $\angle ADB = \frac{2\pi}{3}$. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}

(II) 由 $\cos \angle DAC = \frac{\sqrt{7}}{14}$, 可知 $\sin \angle DAC = \frac{3\sqrt{21}}{14}$, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}

所以 $\sin \angle C = \sin(\frac{2\pi}{3} - \angle DAC)$ \dots\dots\dots 8 \text{ 分}

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{14} + \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{21}}{14} = \frac{\sqrt{21}}{7}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

在 $\triangle ADC$ 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{AD}{\sin \angle C}$, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}

所以 $\frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{21}}{7}}$, 所以 $AC = 5\sqrt{7}$. \dots\dots\dots 13 \text{ 分}

(16) (本小题共 13 分)

解: (I) 因为 $S_n = 3n^2$,

所以 $a_1 = S_1 = 3$1 分

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$= 3n^2 - 3(n-1)^2$$

$$= 6n - 3. \quad \text{.....3 分}$$

因为当 $n = 1$ 时, $6 \times 1 - 3 = 3 = a_1$,4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 6n - 3$5 分

(II) 设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q .

因为 $a_1 = 3b_1$, 所以 $b_1 = 1$6 分

因为 $b_2 \cdot b_4 = a_2$, 所以 $b_3^2 = 9$8 分

因为 $b_3 = b_1 q^2 > 0$, 所以 $b_3 = 3$, 且 $q^2 = 3$10 分

因为 $\{b_n\}$ 是等比数列,

所以 $\{b_{2n-1}\}$ 是首项为 $b_1 = 1$, 公比为 $q^2 = 3$ 的等比数列.11 分

$$\text{所以 } T_n = \frac{b_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2} = \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

$$\text{即 } T_n = \frac{1}{2}(3^n - 1). \quad \text{.....13 分}$$

(17) (本小题共 14 分)

证明: (I) 因为 $A_1D \perp$ 平面 ABC ,

所以 $A_1D \perp AC$1 分

因为 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC$, D 是 AC 的中点,
所以 $BD \perp AC$2 分

因为 $A_1D \cap BD = D$,3 分

所以 $AC \perp$ 平面 A_1BD4 分

所以 $AC \perp A_1B$5 分

(II) 因为 $A_1D \perp$ 平面 ABC ,

因为 $BD \subset$ 平面 ABC ,

所以 $A_1D \perp BD$6 分

由 (I) 知 $BD \perp AC$.

因为 $AC \cap A_1D = D$,7 分

所以 $BD \perp$ 平面 A_1ACC_18 分

因为 $BD \subset$ 平面 BB_1D ,

所以 平面 $BB_1D \perp$ 平面 AA_1C_1C9 分

(III) 因为在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 A_1ABB_1 为平行四边形,

所以 $B_1B \parallel A_1A$10 分

因为 $B_1B \not\subset$ 平面 A_1ACC_1 , $A_1A \subset$ 平面 A_1ACC_1 ,11 分

所以 $B_1B \parallel$ 平面 A_1ACC_112 分

因为 $B_1B \subset$ 平面 BB_1D , 且平面 $BB_1D \cap$ 平面 $A_1ACC_1 = DE$,13 分

所以 $B_1B \parallel DE$14 分

(18) (本小题共 13 分)

解: (I) A 组平均值为: $\frac{220+225+225+230+330+332+338+340}{8} = 280$;1 分

B 组平均值为: $\frac{200+220+230+332+338+340+360+380}{8} = 300$2 分

(II) 将 A 组客户中实际平均续航里程数为 338, 340 的客户分别记为 a_1, a_2 ;

将 B 组客户中实际平均续航里程数为 338, 340, 360, 380 的客户分别记为 b_1, b_2, b_3, b_4 .

从 A, B 两组实际平均续航里程数大于 335km 的客户中各随机抽取 1 位客户的事件包括:

$a_1b_1, a_1b_2, a_1b_3, a_1b_4, a_2b_1, a_2b_2, a_2b_3, a_2b_4$, 共 8 种,5 分

其中 A 组客户的实际平均续航里程数不小于 B 组客户的实际平均续航里程数的事件包括:

a_1b_1, a_2b_1, a_2b_2 , 共 3 种.7 分

设 “A 组客户的实际平均续航里程数不小于 B 组客户的实际平均续航里程数” 为事件 M ,8 分

则 $P(M) = \frac{3}{8}$10 分

所以 A 组客户的实际平均续航里程数不小于 B 组客户的实际平均续航里程数的概率为 $\frac{3}{8}$.

(III) A 组数据的方差小于 B 组数据的方差.13 分

(19) (本小题共 13 分)

解: (I) $f'(x) = -(x-a)\sin x$2 分

因为 $x \in (0, \pi)$, 所以 $\sin x > 0$3 分

由 $f'(x) = 0$ 得 $x = a$4 分

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减;5 分

当 $a \geq \pi$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增;6 分

当 $0 < a < \pi$ 时, x , $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, a)$	a	(a, π)
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, a)$, 单调递减区间是 (a, π) .

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减;

当 $a \geq \pi$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增;

当 $0 < a < \pi$ 时, 以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, a)$, 单调递减区间是 (a, π)9 分

(II) 设 $g(x) = x^2 - 2x - 1$.

因为 $g(x) = (x-1)^2 - 2$, 当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 有最小值为 -210 分

因为对于任意 $x_1 \in (0, \pi)$, 存在 $x_2 \in (0, \pi)$, 都有 $f(x_1) > x_2^2 - 2x_2 - 1$,

所以 $\begin{cases} f(0) \geq -2 \\ f(\pi) \geq -2 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -a \geq -2 \\ -(\pi - a) \geq -2 \end{cases}$.

所以 $\pi - 2 \leq a \leq 2$, 即 a 的取值范围是 $[\pi - 2, 2]$13 分

(20) (本小题共 14 分)

(I) 解: 依题意 $2a=4$, 所以 $a=2$1 分

因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$, 所以 $c=1$2 分

所以 $b^2=3$,3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$4 分

(II) 解: 椭圆得右焦点 $F(1,0)$.

当直线 l 的斜率不存在时, 不妨取 $M(1, \frac{3}{2})$, $N(1, -\frac{3}{2})$, $|MN|=3$, 不合题意.5 分

当直线 l 的斜率存在时,

设直线 $l: y=k(x-1)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$6 分

$$\text{联立方程组} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x-1) \end{cases}$$

消 y 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4(k^2-3)=0$, $\Delta>0$ 成立.7 分

所以 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$, $x_1x_2=\frac{4(k^2-3)}{3+4k^2}$8 分

因为 $|MN|=\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{24}{7}$,9 分

$$\text{即 } \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(\frac{8k^2}{3+4k^2})^2-4 \cdot \frac{4(k^2-3)}{3+4k^2}} = \frac{24}{7},$$

所以 $\frac{1+k^2}{3+4k^2}=\frac{2}{7}$, 所以 $k=\pm 1$10 分

(III) 证明: 当直线 l 的斜率不存在时, 不妨取 $M(1, \frac{3}{2})$, $N(1, -\frac{3}{2})$,

此时 $k_1+k_2=\frac{\frac{3}{2}}{3}+\frac{-\frac{3}{2}}{3}=2$11 分

当直线 l 的斜率存在时,

设直线 $l: y=k(x-1)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

$$\text{此时 } k_1+k_2=\frac{3-y_1}{4-x_1}+\frac{3-y_2}{4-x_2}=\frac{(3-y_1)(4-x_2)+(3-y_2)(4-x_1)}{16-4(x_1+x_2)+x_1x_2}.$$

分子化为 $24 - 3(x_1 + x_2) - 4(y_1 + y_2) + x_2y_1 + x_1y_2$

$$= 2kx_1x_2 - (3 + 5k)(x_1 + x_2) + 8k + 24.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } k_1 + k_2 &= \frac{2k \times \frac{4(k^2 - 3)}{3 + 4k^2} - (3 + 5k) \times \frac{8k^2}{3 + 4k^2} + 8k + 24}{16 - 4 \times \frac{8k^2}{3 + 4k^2} + \frac{4(k^2 - 3)}{3 + 4k^2}} \\ &= \frac{2k \times (k^2 - 3) - 2k^2(3 + 5k) + 2(k + 3)(3 + 4k^2)}{4(3 + 4k^2) - 8k^2 + (k^2 - 3)} = \frac{18k^2 + 18}{9k^2 + 9} = 2. \end{aligned}$$

综上所述, $k_1 + k_2$ 为定值 2.

.....14 分

(若用其他方法解题, 请酌情给分)