座位号________ 考场号________ 准考证号________ 姓名________ 班级________
高考利剑
出版物书号:ISBN 978-7-5390-8374-2 江西科学技术出版社 盗版必究
上进试卷

绝密★启用前

2022—2023 学年高三二轮复习验收考试

数学理科

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2<2x\}$,$B=\{x|y=\sqrt{1-x}\}$,则 $A\cap B=$

A. $(0,1]$ B. $(0,1)$ C. $(1,2)$ D. $(0,2)$

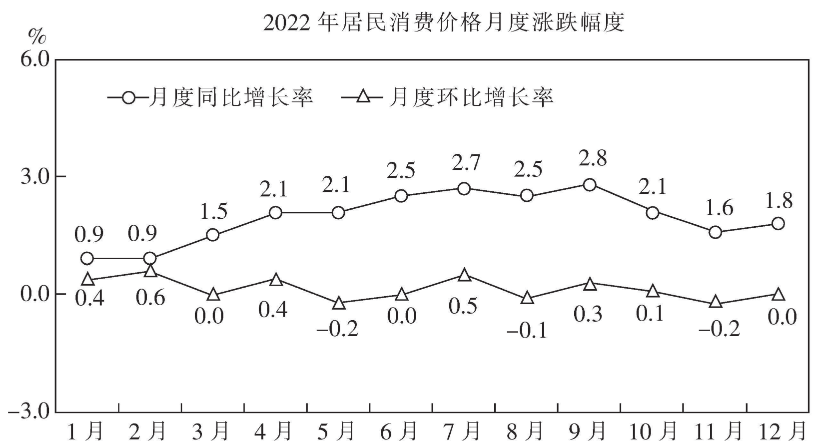
2. 已知复数 z 满足 $(1-i)(z-2i)=2i$,则 z 的虚部为

A. -1 B. $-i$ C. 3 D. 3i

3. 已知 $a=\sin 230°$,$b=\log_{2\,022}2\,023$,$c=2^{-0.9}$,则

A. $c<b<a$ B. $c<a<b$ C. $a<b<c$ D. $a<c<b$

4. 在统计中,月度同比增长率是指本月和上一年同月相比较的增长率,月度环比增长率是指本月和上一个月相比较的增长率,如图是 2022 年 1 月至 2022 年 12 月我国居民消费价格月度涨跌幅度统计图,则以下说法错误的是



A. 在这 12 个月中,我国居民消费价格月度同比增长率数据的中位数为 2.1%

B. 在这 12 个月中,月度环比增长率数据为正数的个数比月度环比增长率数据为负数的个数多 3

C. 在这 12 个月中,我国居民消费价格月度同比增长率数据的均值为 1.85%

D. 在这 12 个月中,我国居民消费价格月度环比增长率数据的众数为 0.0%

5. 已知数列 $\{a_n+2n\}$ 为等比数列,$a_1-a_2=1$,$a_3=-2$,则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为

A. 352 B. 401 C. 625 D. 913

6. 黄地绿彩云龙纹盘是收藏于中国国家博物馆的一件明代国宝级瓷器. 该龙纹盘敞口,弧壁,广底,圈足. 器内施白釉,外壁以黄釉为地,刻云龙纹并填绿彩,美不胜收. 黄地绿彩云龙纹盘可近似看作是圆台和圆柱的组合体,其口径(盘口圆的直径)22.5 cm,足径(盘底圆的直径)14.4 cm,高 3.8 cm,其中底部圆柱高 0.8 cm,则黄地绿彩云龙纹盘的侧面积约为(附:圆台的侧面积 $S=\pi(R+r)l$,R,r 分别为两底面半径,l 为母线长,其中 π 的值取 3,$\sqrt{25.402\,5}\approx5.04$)

A. 300.88 cm^2 B. 313.52 cm^2 C. 327.24 cm^2 D. 344.52 cm^2

7. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)=-f(x)$,$g(x)=f(x)-2$ 为奇函数,则 $f(198)=$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=3$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1$,则 $|\boldsymbol{a}|=$

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4

9. 已知 $a>1$,$b>1$,$a^3b=100$,则 $\log_a10+3\log_b10$ 的最小值为

A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

10. 正割(Secant)及余割(Cosecant)这两个概念是由伊朗数学家、天文学家阿布尔·威发首先引入,sec,csc 这两个符号是荷兰数学家基拉德在《三角学》中首先使用,后经欧拉采用得以通行. 在三角中,定义正割 $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$,余割 $\csc\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sec x}+\dfrac{1}{\csc x}$,给出下列说法:

①$f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$;②$f(x)$ 的最小正周期为 2π;③$f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{2},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{2}]$;④$f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

其中所有正确说法的序号为

A. ②③ B. ①④ C. ③ D. ②③④

11. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,直线 l 经过点 F_1 交 C 于 A,B 两点,点 M 在 C 上,$AM//F_1F_2$,$|AB|=|MF_1|$,$\angle F_1MF_2=60°$,则 C 的离心率为

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,其导函数为 $f'(x)$,$f(x)=\ln x-f'(x)$,$f(1)=2f'(1)$,则 $f(x)$

A. 无极值 B. 有极大值,也有极小值

C. 有极大值,无极小值 D. 有极小值,无极大值

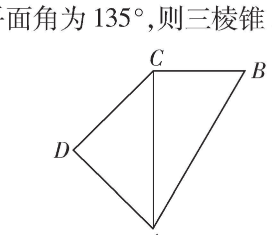
二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 若命题"$\exists x_0\in\mathbf{R}$,$a=|x_0|+1$"为真命题,则实数 a 的取值范围为________.(用区间表示)

14. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线恰好平分第一、三象限,若 C 的虚轴长为 4,则 C 的实轴长为________.

15. 2023 年 9 月第 19 届亚运会将在杭州举办,在杭州亚运会三馆(杭州奥体中心的体育馆、游泳馆和综合训练馆)对外免费开放预约期间,将含甲、乙在内的 5 位志愿者分配到这三馆负责接待工作,每个场馆至少分配 1 位志愿者,且甲、乙分配到同一个场馆,则甲分配到游泳馆的概率为________.

16. 在平面四边形 $ABCD$ 中,$AD=CD=\sqrt{3}$,$\angle ADC=\angle ACB=90°$,$\angle ABC=60°$,现将$\triangle ADC$ 沿着 AC 折起,得到三棱锥 $D-ABC$,若二面角 $D-AC-B$ 的平面角为 135°,则三棱锥 $D-ABC$ 的外接球表面积为________.



三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17 ~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.(12 分)在①$3ab\sin C=4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$；②$a(3\sin B+4\cos B)=4c$，这两个条件中任选一个，补充在下面问题中，并加以解答.

已知△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，________.

(1)求 $\sin A$ 的值；

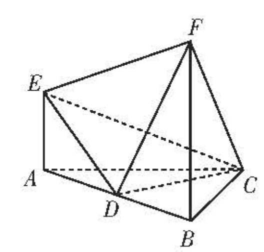
(2)若△ABC 的面积为 2，$a=4$，求△ABC 的周长.

注：如选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.(12 分)如图，在多面体 $ABCEF$ 中，$AE\perp$平面 ABC，$AE\parallel BF$，D 为 AB 的中点. $AC=BC=2\sqrt{2}$，$AB=BF=4AE=4$.

(1)证明：$DE\perp$平面 CDF；

(2)求二面角 $E-CF-D$ 的平面角的余弦值.



19.(12 分)为更好保障消费者的食品安全，某蛋糕总店开发了 A,B 两种不同口味的生态戚风蛋糕，制作主料均为生态有机原料. 已知 A 蛋糕的成本为 60 元/个，B 蛋糕的成本为 61 元/个，两种蛋糕的售价均为 68 元/个，两种蛋糕的保质期均为一天，一旦过了保质期，则销毁处理. 为更好了解市场的需求情况，A,B 两种蛋糕分别在甲、乙两个分店同时进行了为期一个月(30 天)的试销，统计结果如下表，假设两种蛋糕的日销量相互独立.

A 蛋糕的销售量(个)	37	38	39	40
天数	6	6	10	8
B 蛋糕的销售量(个)	37	38	39	40
天数	4	9	12	5

以每种蛋糕日销售量取每个值时的频率估计该种蛋糕日销售量取该值时的概率.

(1)求这两种蛋糕的日销量之和不低于 78 个的概率；

(2)若每日生产 A,B 两种蛋糕各 n 个，当 $n=37$ 与 $n=38$ 时，哪种情况下每日销售两种蛋糕的获利之和的数学期望最大？请说明理由.

20.(12 分)已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，A,B 分别为 C 上两个不同的动点，O 为坐标原点，当△OAB 为等边三角形时，$|AB|=8\sqrt{3}$.

(1)求 C 的标准方程；

(2)抛物线 C 在第一象限的部分是否存在点 P，使得点 P 满足$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=4\overrightarrow{PF}$，且点 P 到直线 AB 的距离为 2？若存在，求出点 P 的坐标及直线 AB 的方程；若不存在，请说明理由.

21.(12 分)已知函数 $f(x)=(x-1)e^x+a^2e^{-x}$，其中 $a\geqslant 0$.

(1)当 $a=e$ 时，求 $f(x)$的极值；

(2)若不等式 $f(x)\geqslant a$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.(10 分)【选修 4－4：坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}\sin\alpha,\\ y=\sqrt{2}\cos\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数)，以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho(2\cos\theta+\sin\theta)=\sqrt{6}$，其中 $\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$.

(1)求 C_1 的普通方程与直线 l 的直角坐标方程；

(2)直线 l 与曲线 C_1 交于 A,B 两点，且 A,B 两点对应的极角分别为 θ_1,θ_2，求 $\theta_1+\theta_2$ 的值.

23.(10 分)【选修 4－5：不等式选讲】

已知函数 $f(x)=2|x+a|+|x-a|$.

(1)当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\leqslant 7$ 的解集；

(2)若 $f(x)$的最小值为 10，求实数 a 的值.

2022—2023 学年高三二轮复习验收考试

数学理科参考答案及评分细则

1.【答案】A

【解析】由题得 $A=\{x|0<x<2\}$，$B=\{x|x\leqslant 1\}$，所以 $A\cap B=\{x|0<x\leqslant 1\}$，故选 A.

2.【答案】C

【解析】因为 $z=\frac{2i}{1-i}+2i=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}+2i=i-1+2i=-1+3i$，所以 z 的虚部为 3，故选 C.

3.【答案】D

【解析】因为 $a=\sin 230°<0$，$b=\log_{2\,022}2\,023>\log_{2\,022}2\,022=1$，$0<c=2^{-0.9}<2^0=1$，所以 $a<c<b$，故选 D.

4.【答案】C

【解析】在这 12 个月中，我国居民消费价格月度同比增长率数据由小到大依次为 0.9%，0.9%，1.5%，1.6%，1.8%，2.1%，2.1%，2.1%，2.5%，2.5%，2.7%，2.8%，中位数为 $\frac{2.1\%+2.1\%}{2}=2.1\%$，平均数为 $\frac{1}{12}\times(0.9\%+0.9\%+1.5\%+1.6\%+1.8\%+2.1\%+2.1\%+2.1\%+2.5\%+2.5\%+2.7\%+2.8\%)\approx 1.958\%$. 由数据可知我国居民消费价格月度环比增长率的数据中，有 6 个月的数据为正数，3 个月的数据为 0.0%，3 个月的数据为负数，所以月度环比增长率数据为正数的个数比月度环比增长率数据为负数的个数多 3，且众数为 0.0%，故选项 A，B，D 正确，C 错误，故选 C.

5.【答案】D

【解析】令 $b_n=a_n+2n$，设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，因为 $a_1-a_2=1$，所以 $b_1-2-(b_2-4)=1$，即 $b_2=b_1+1$，所以 $b_1q=b_1+1$. 由 $a_3=-2$，得 $b_3=4$，所以 $b_1q^2=4$，联立 $\begin{cases}b_1q=b_1+1,\\ b_1q^2=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b_1=1,\\ q=2,\end{cases}$ 所以 $b_n=2^{n-1}$，所以 $a_n=b_n-2n=2^{n-1}-2n$，所以 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为 $\frac{1-2^{10}}{1-2}-\frac{(2+20)}{2}\times 10=913$，故选 D.

6.【答案】B

【解析】设该圆台的母线长为 l，高为 h，两底面圆半径分别为 R，r（其中 $R>r$），则 $2R=22.5$，$2r=14.4$，$h=3.8-0.8=3$，所以 $l=\sqrt{h^2+\left(\frac{2R-2r}{2}\right)^2}=\sqrt{3^2+4.05^2}=\sqrt{25.4025}\approx 5.04$，故圆台部分的侧面积为 $S_1=\pi(R+r)l\approx 3\times(11.25+7.2)\times 5.04=278.964\text{ cm}^2$，圆柱部分的侧面积为 $S_2=2\pi r\cdot 0.8=6\times 7.2\times 0.8=34.56\text{ cm}^2$，故该黄地绿彩云龙纹盘的侧面积约为 $S_1+S_2\approx 278.964+34.56\approx 313.52\text{ cm}^2$，故选 B.

7.【答案】C

【解析】因为 $f(x+3)=-f(x)$，所以 $f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 6，又 $g(x)=f(x)-2$ 为奇函数，所以 $f(x)-2+f(-x)-2=0$，所以 $f(x)+f(-x)=4$，令 $x=0$，得 $2f(0)=4$，所以 $f(0)=2$. 所以 $f(198)=f(0+6\times 33)=f(0)=2$，故选 C.

8.【答案】C

【解析】由 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{c}$，得 $\boldsymbol{c}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=3$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=1$，即 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2=4$，两式联立得 $\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{b}^2=4$，所以 $\boldsymbol{a}^2=4+4\boldsymbol{b}^2=8$，所以 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，故选 C.

9.【答案】B

【解析】因为 $a^3b=100$，所以 $\lg a^3b=2$，即 $3\lg a+\lg b=2$，所以 $\log_a 10+3\log_b 10=\frac{1}{\lg a}+\frac{3}{\lg b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lg a}+\frac{3}{\lg b}\right)\cdot$

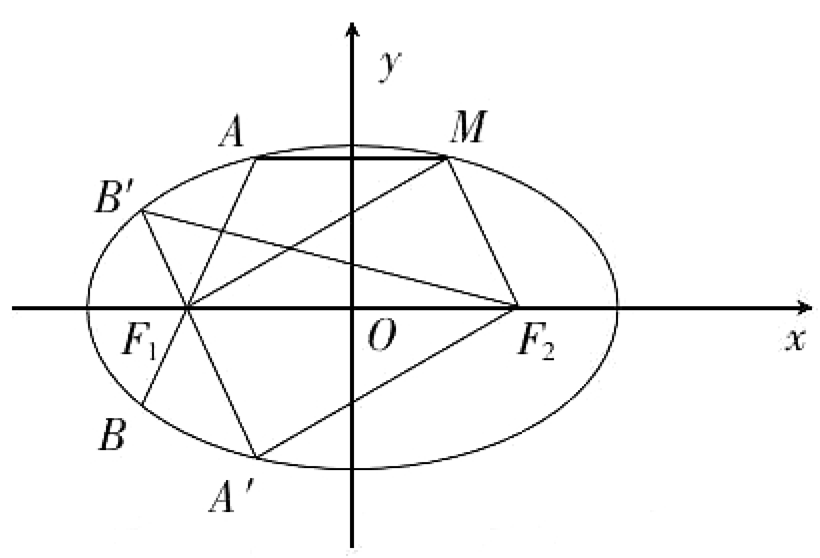
$(3\lg a+\lg b)=\frac{1}{2}\left(6+\frac{\lg b}{\lg a}+\frac{9\lg a}{\lg b}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(6+2\sqrt{\frac{\lg b}{\lg a}\cdot\frac{9\lg a}{\lg b}}\right)=6$,当且仅当 $\lg b=3\lg a$,即 $a=10^{\frac{1}{3}}$,$b=10$ 时等号成立.所以 $\log_a 10+3\log_b 10$ 的最小值为 6,故选 B.

10.【答案】A

【解析】$f(x)=\frac{1}{\sec x}+\frac{1}{\csc x}=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,由 $\cos x\neq 0$,$\sin x\neq 0$,得 $x\neq\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,即 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$,①错误;$f(x)$ 的最小正周期与函数 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期一致,均为 2π,②正确;当 $x=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ 时,$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值分别为 $1,1,-1,-1$,考虑周期性可知,$f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{2},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{2}]$,③正确;令 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,④错误,故选 A.

11.【答案】B

【解析】分别取 A,B 关于 x 轴的对称点 A',B',连接 $A'F_1,A'F_2,B'F_1,B'F_2$,由椭圆的对称性及几何知识可得 $|AB|=|A'B'|$,四边形 $A'F_2MF_1$ 是平行四边形,所以 $\angle F_1A'F_2=\angle F_1MF_2=60^\circ$,$|MF_1|=|A'F_2|$,又 $|AB|=|MF_1|$,所以 $|A'F_2|=|A'B'|$,所以 $\triangle A'B'F_2$ 是等边三角形,又 $\triangle A'B'F_2$ 的周长为 $|A'B'|+|A'F_2|+|B'F_2|=4a$,所以 $|A'F_2|=\frac{4a}{3}$,$|A'F_1|=\frac{2a}{3}$,$\triangle A'F_1F_2$ 中,由余弦定理 $|A'F_1|^2+|A'F_2|^2-2|A'F_1||A'F_2|\cos\angle F_1A'F_2=|F_1F_2|^2$,得 $\frac{4}{9}a^2+\frac{16}{9}a^2-2\cdot\frac{2a}{3}\cdot\frac{4a}{3}\cos\frac{\pi}{3}=4c^2$,整理得 $a^2=3c^2$,所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故选 B.



12.【答案】D

【解析】由题知 $f(1)+f'(1)=0$,又 $f(1)=2f'(1)$,所以 $f(1)=f'(1)=0$,令 $g(x)=e^xf(x)$,则 $g'(x)=e^x[f'(x)+f(x)]=e^x\ln x$,又 $f'(x)=\ln x-f(x)=\ln x-\frac{g(x)}{e^x}=\frac{1}{e^x}[e^x\ln x-g(x)]$,令 $h(x)=e^x\ln x-g(x)$,所以 $h'(x)=e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)-g'(x)=e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)-e^x\ln x=\frac{e^x}{x}>0$,所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,又 $h(1)=-g(1)=-ef(1)=0$,所以当 $x\in(0,1)$ 时,$h(x)<0$,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$h(x)>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=0$,无极大值,故选 D.

13.【答案】$[1,+\infty)$

【解析】因为 $|x_0|+1\geqslant 1$,所以实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

14.【答案】4

【解析】由题意可知,双曲线 C 的一条渐近线为直线 $y=x$,故 $a=b$,故其实轴长为 $2a=2b=4$.

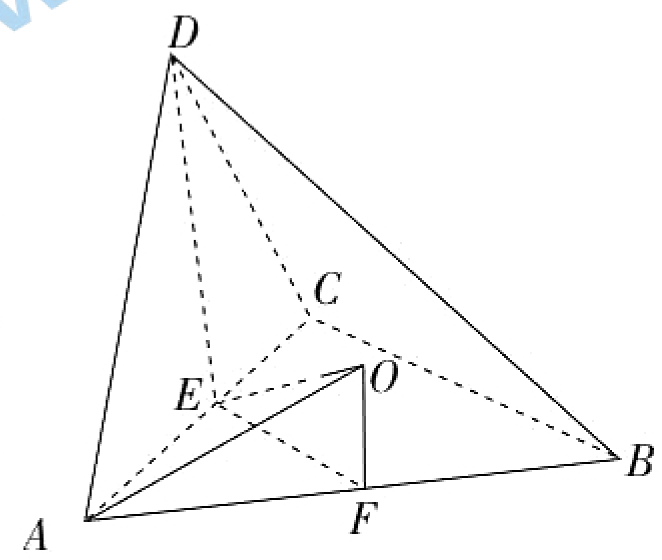
15.【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】甲、乙分配到同一个场馆有以下两种情况:(1)场馆分组人数为 1,1,3 时,甲、乙必在 3 人组,则方法数为 $C_3^1A_3^3=18$ 种;(2)场馆分组人数为 2,2,1 时,其中甲、乙在一组,则方法数为 $C_3^1C_3^2A_2^2=18$ 种,即甲、乙分配到

同一个场馆的方法数为 $n=18+18=36$. 若甲分配到游泳馆,则乙必然也在游泳馆,此时的方法数为 $m=C_3^1A_2^2+C_3^1A_2^2=12$,故所求的概率为 $P=\frac{m}{n}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.

16.【答案】10π

【解析】如图,取 AC 的中点 E,AB 的中点 F,连接 EF,DE. 因为 $AD=CD$,所以 $DE\perp AC$,因为 $BC\perp AC$,$EF/\!/BC$,所以 $EF\perp AC$,所以 $\angle DEF=135°$. 过点 E 作 $OE\perp$ 平面 DAC,过点 F 作 $OF\perp$ 平面 ABC,$OE\cap OF=O$,因为点 E,F 分别是 $\triangle DAC$ 和 $\triangle ABC$ 的外心,所以点 O 是三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的球心. 因为 $AD=\sqrt{3}$,所以 $AC=\sqrt{6}$,$BC=\sqrt{2}$,$AB=2\sqrt{2}$,所以 $EF=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\angle OEF=45°$,所以 $OF=EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$AF=\frac{1}{2}AB=\sqrt{2}$,所以 $OA=\sqrt{OF^2+AF^2}=\sqrt{\frac{5}{2}}$. 则三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的半径 $R=\sqrt{\frac{5}{2}}$,所以外接球的表面积 $S=4\pi R^2=10\pi$.



【评分细则】

1. 第 13 小题中,若结果不用区间表示,则不给分;
2. 第 15 小题中,若结果写成$\frac{12}{36}$,而未约分,则不给分.

17. 解:(1)若选①,由已知得 $3ab\sin C=4bc\cos A$,(2 分)

所以 $3a\sin C=4c\cos A$,

由正弦定理得 $3\sin A\sin C=4\sin C\cos A$,

又 $C\in(0,\pi)$,所以 $\sin C>0$,

所以 $3\sin A=4\cos A$,①(5 分)

又 $\sin^2A+\cos^2A=1$,②

联立①,②以及 $A\in(0,\pi)$,解得 $\sin A=\frac{4}{5}$.(6 分)

若选②,由已知及正弦定理得 $3\sin A\sin B+4\sin A\cos B=4\sin C$,(2 分)

所以 $3\sin A\sin B+4\sin A\cos B=4\sin(A+B)$,(3 分)

所以 $3\sin A\sin B+4\sin A\cos B=4\sin A\cos B+4\cos A\sin B$,

所以 $3\sin A\sin B=4\cos A\sin B$,

又 $B\in(0,\pi)$,所以 $\sin B>0$,所以 $3\sin A=4\cos A$,①(5 分)

又 $\sin^2A+\cos^2A=1$,②

联立①,②以及 $A\in(0,\pi)$,解得 $\sin A=\frac{4}{5}$.(6 分)

(2)由 $\triangle ABC$ 的面积为 2,得$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{2}{5}bc=2$,所以 $bc=5$,(7 分)

由(1)可得 $\cos A=\frac{3}{4}\sin A=\frac{3}{5}$,(8 分)

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-16}{10}=\frac{3}{5}$,(10 分)

所以 $b^2+c^2=22$,

所以 $b+c=\sqrt{b^2+2bc+c^2}=4\sqrt{2}$,(11 分)

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=4+4\sqrt{2}$.(12 分)

【评分细则】

1. 第(1)小题中,若选①,正弦定理写对了可得 2 分;若未注明“又 $C\in(0,\pi)$,所以 $\sin C>0$,”以及“$A\in(0,\pi)$,”不扣分;

2. 第(1)小题中,若选②,未注明“又 $B\in(0,\pi)$,所以 $\sin B>0$,”以及“$A\in(0,\pi)$,”不扣分;

3. 第(2)小题中,用其他方法解出 b,c 的值,结果正确步骤无误可给满分.

18. (1)证明:因为 $AC=BC$,D 为 AB 的中点,所以 $CD\perp AB$,

又 $AE\perp$ 平面 ABC,$CD\subset$ 平面 ABC,所以 $AE\perp CD$,(1 分)

又 $AE\cap AB=A$,$AE,AB\subset$ 平面 $ABFE$,所以 $CD\perp$ 平面 $ABFE$,

又 $DE\subset$ 平面 $ABFE$,所以 $CD\perp DE$.(3 分)

由平面几何知识可知 $DF=2\sqrt{5}$,$DE=\sqrt{5}$,$EF=5$,

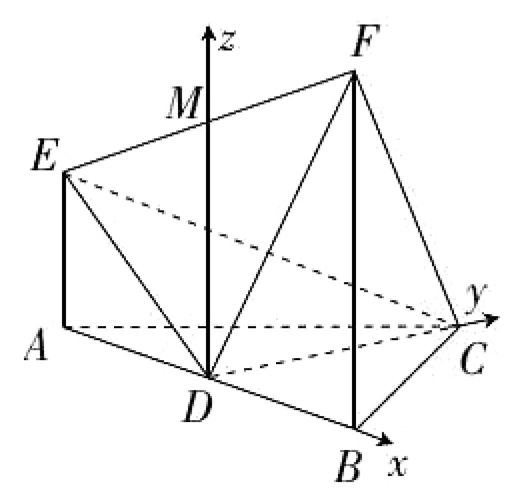
所以 $DE^2+DF^2=EF^2$,所以 $DE\perp DF$,

又 $CD\cap DF=D$,$CD,DF\subset$ 平面 CDF,所以 $DE\perp$ 平面 CDF.(5 分)

(2)解:由题知 $CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=2$,过 D 作 $DM/\!/AE$ 交 EF 于 M,

则 $DM\perp$ 平面 ABC,可得 $DM\perp AB$,$DM\perp CD$,

以 D 为坐标原点,向量 $\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DM}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,(7 分)



则 $C(0,2,0)$,$E(-2,0,1)$,$F(2,0,4)$,所以 $\overrightarrow{CE}=(-2,-2,1)$,$\overrightarrow{CF}=(2,-2,4)$,

设平面 CEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2x-2y+z=0,\\ 2x-2y+4z=0.\end{cases}$

取 $x=-3$,则 $y=5$,$z=4$,所以 $\boldsymbol{m}=(-3,5,4)$.(9 分)

由(1)知平面 CDF 的一个法向量为 $\overrightarrow{DE}=(-2,0,1)$,(10 分)

设二面角 $E-CF-D$ 的平面角为 θ,易知 θ 为锐角,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{DE}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{DE}|}=\dfrac{|-3\times(-2)+5\times0+4\times1|}{\sqrt{(-3)^2+5^2+4^2}\times\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$,

所以二面角 $E-CF-D$ 的平面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.(12 分)

【评分细则】

1. 第(1)小题中,用其他方法(如向量法)证明,酌情给分;

2. 第(2)小题中,平面 CDF 的法向量不唯一,只要与 $\boldsymbol{m}=(-3,5,4)$ 平行即可得分;

3. 第(2)小题中,若不用空间向量法求解,酌情给分,结果正确步骤无误则给满分.

19. 解:(1)设这两种蛋糕的日销量之和为 X,

则 $P(X=78)=\dfrac{6}{30}\times\dfrac{5}{30}+\dfrac{10}{30}\times\dfrac{12}{30}+\dfrac{8}{30}\times\dfrac{9}{30}=\dfrac{37}{150}$,

$P(X=79)=\dfrac{10}{30}\times\dfrac{5}{30}+\dfrac{8}{30}\times\dfrac{12}{30}=\dfrac{73}{450}$,

$P(X=80)=\frac{8}{30}\times\frac{5}{30}=\frac{4}{90}$.（5 分）

所以这两种蛋糕的日销量之和不低于 78 个的概率为

$P=P(X=78)+P(X=79)+P(X=80)=\frac{37}{150}+\frac{73}{450}+\frac{4}{90}=\frac{34}{75}$.（6 分）

（2）当 $n=37$ 时，每日销售两种蛋糕获利之和的数学期望为 $37\times8+37\times7=555$ 元；（8 分）

当 $n=38$ 时，每日销售两种蛋糕获利之和的数学期望为 $(37\times8-60)\times\frac{6}{30}+38\times8\times\left(1-\frac{6}{30}\right)+(37\times7-61)\times\frac{4}{30}+38\times7\times\left(1-\frac{4}{30}\right)=\frac{1\,642}{3}$ 元，（11 分）

因为 $555>\frac{1\,642}{3}$，所以当 $n=37$ 时，两种蛋糕的获利之和最大.（12 分）

【评分细则】

1. 第（1）小题中，求对了 $P(X=78)$，可给 2 分，求对了 $P(X=79)$，可给 2 分；
2. 第（1）小题中，若未分类，直接列式且式子及答案都无误，可给 5 分，否则给 0 分；
3. 第（2）小题中，若直接写当 $n=37$ 时，两种蛋糕获利之和最大，而未说明理由，则只给 1 分.

20. 解：（1）由对称性可知当△OAB 为等边三角形时，A，B 两点关于 x 轴对称，

当△OAB 为等边三角形时，△OAB 的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|=12$，

由题意知点 $(12,4\sqrt{3})$ 在 C 上，代入 $y^2=2px$，得 $(4\sqrt{3})^2=24p$，

解得 $p=2$，（3 分）

所以 C 的标准方程为 $y^2=4x$.（4 分）

（2）由（1）知 $F(1,0)$，根据题意可知直线 AB 的斜率不为 0，

设直线 AB 的方程为 $x=ky+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，

联立 $\begin{cases}x=ky+m,\\y^2=4x\end{cases}$ 得 $y^2-4ky-4m=0$，

所以 $\Delta=16k^2+16m>0$，即 $k^2+m>0$，且 $y_1+y_2=4k$，$y_1y_2=-4m$，

所以 $x_1+x_2=k(y_1+y_2)+2m=4k^2+2m$，（7 分）

由 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=4\overrightarrow{PF}$，得 $(x_1-x_0,y_1-y_0)+(x_2-x_0,y_2-y_0)=4(1-x_0,-y_0)$，

所以 $\begin{cases}x_1+x_2-4=-2x_0,\\y_1+y_2=-2y_0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x_0=2-m-2k^2,\\y_0=-2k,\end{cases}$ 即 $P(2-m-2k^2,-2k)$，（8 分）

又点 P 在 C 上，所以 $4k^2=4(2-m-2k^2)$，即 $3k^2+m=2$，①

所以 $k^2+m=k^2+2-3k^2=2(1-k^2)>0$，解得 $-1<k<1$，

又点 P 在第一象限，所以 $-2k>0$，所以 $-1<k<0$.（9 分）

又点 P 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|2-m-2k^2+2k^2-m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2|m-1|}{\sqrt{1+k^2}}=2$，化简得 $m^2-2m=k^2$，②（10 分）

联立①②解得 $\begin{cases}m=-\frac{1}{3},\\k=-\frac{\sqrt{7}}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-\frac{1}{3},\\k=\frac{\sqrt{7}}{3}\end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases}m=2,\\k=0\end{cases}$（舍去）.

此时点 $P\left(\frac{7}{9},\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$，直线 AB 的方程为 $3x+\sqrt{7}y+1=0$.（12 分）

【评分细则】

1. 第(1)小题中,求对了$\triangle OAB$的高可给1分;
2. 第(2)小题中,写出了韦达定理可给1分;
3. 第(2)小题中,最后结果点P和直线方程只写对一个扣1分;
4. 第(2)小题中,答案倒数第2行解对了方程组,若未舍去或只舍弃一组不合题意的解扣1分.

21. 解:(1)当$a=e$时,$f(x)=(x-1)e^x+e^{2-x}$,所以$f'(x)=xe^x-e^{2-x}=e^{-x}(xe^{2x}-e^2)$,(1分)

令$g(x)=xe^{2x}-e^2$,所以$g'(x)=(2x+1)e^{2x}$,

当$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减;当$x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,

所以$g(x)_{\min}=g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{-1}-e^2<0$,且当$x<0$时,$g(x)<0$,$g(1)=0$,(3分)

所以当$x\in(-\infty,1)$时,$g(x)<0$,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;

当$x\in(1,+\infty)$时,$g(x)>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,

所以$f(x)$的极小值为$f(1)=e$,无极大值.(4分)

(2)由题得$(x-1)e^x+a^2e^{-x}-a\geqslant0$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立,则只需$[(x-1)e^x+a^2e^{-x}-a]_{\min}\geqslant0$即可.

当$a=0$时,$(x-1)e^x\geqslant0$对任意$x\in\mathbf{R}$不恒成立,故$a\neq0$,

令$h(x)=(x-1)e^x+a^2e^{-x}-a$,则$h'(x)=xe^x-a^2e^{-x}=e^{-x}(xe^{2x}-a^2)$,

令$k(x)=xe^{2x}-a^2$,则$k'(x)=(2x+1)e^{2x}$,

当$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$时,$k'(x)<0$,$k(x)$单调递减;当$x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$时,$k'(x)>0$,$k(x)$单调递增,

所以$k(x)_{\min}=k\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{-1}-a^2<0$,(6分)

又$x<0$时,$k(x)<0$,且$k(0)=-a^2<0$,$k(a^2)=a^2(e^{2a^2}-1)>0$,

由零点定理可得存在$x_0\in(0,a^2)$,使得$k(x_0)=0$,即$x_0e^{2x_0}=a^2$.

当$x\in(-\infty,x_0)$时,$k(x)<0$,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减;

当$x\in(x_0,+\infty)$时,$k(x)>0$,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,

所以$h(x)_{\min}=h(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}+a^2e^{-x_0}-a$,(8分)

所以只需$(x_0-1)e^{x_0}+a^2e^{-x_0}-a\geqslant0$,即$(x_0-1)e^{2x_0}-ae^{x_0}+a^2\geqslant0$,(9分)

所以$a^2-e^{2x_0}-ae^{x_0}+a^2\geqslant0$,所以$e^{2x_0}+ae^{x_0}-2a^2\leqslant0$,

所以$(e^{x_0}+2a)(e^{x_0}-a)\leqslant0$,

当$a>0$时,$-2a\leqslant e^{x_0}\leqslant a$,则$x_0\leqslant\ln a$,

又$x_0e^{2x_0}=a^2$,所以$x_0+\frac{1}{2}\ln x_0=\ln a$,

所以$x_0\leqslant x_0+\frac{1}{2}\ln x_0$,解得$x_0\geqslant1$,(11分)

所以$\ln a\geqslant1$,解得$a\geqslant e$.(12分)

【评分细则】

1. 第(1)小题中,不写无极大值不扣分;
2. 第(2)小题中,不讨论$a=0$的情况扣1分;
3. 第(2)小题中,若利用特殊值法得到$f(1)\geqslant a$,从而解得$a\geqslant e$,可给3分,若再证明当$a\geqslant e$时,$f(x)\geqslant a$对$x\in\mathbf{R}$恒成立,且证明无误,可给满分,若未给出证明,则不再给分.

22. 解:(1)由$\begin{cases}x=\sqrt{3}\sin\alpha,\\ y=\sqrt{2}\cos\alpha\end{cases}$得$\begin{cases}x^2=3\sin^2\alpha,\\ y^2=2\cos^2\alpha,\end{cases}$

消去 α 得 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 为 C_1 的普通方程;(2 分)

由 $\rho(2\cos\theta+\sin\theta)=\sqrt{6}$,得 $2\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=\sqrt{6}$,

令 $\rho\cos\theta=x,\rho\sin\theta=y$,得 $2x+y-\sqrt{6}=0$ 为直线 l 的直角坐标方程.(4 分)

(2)在 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 中,令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,

所以 $2\rho^2\cos^2\theta+3\rho^2\sin^2\theta=6$,即 $\rho^2(2+\sin^2\theta)=6$ 为 C_1 的极坐标方程,(6 分)

联立 $\begin{cases}2\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=\sqrt{6},\\ \rho^2(2+\sin^2\theta)=6\end{cases}$ 得 $2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=1$,(7 分)

所以 $\cos 2\theta+\sin 2\theta=0$,所以 $\tan 2\theta=-1$,

又 $\rho>0,0\leqslant\theta<2\pi$,所以 $0\leqslant 2\theta<4\pi$,

所以 $2\theta=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$ 或 $\frac{11\pi}{4}$ 或 $\frac{15\pi}{4}$,解得 $\theta=\frac{3\pi}{8}$ 或 $\frac{7\pi}{8}$ 或 $\frac{11\pi}{8}$ 或 $\frac{15\pi}{8}$,(8 分)

由图可知,两交点位于第一、四象限,所以 $\theta=\frac{3\pi}{8}$ 或 $\frac{15\pi}{8}$,(9 分)

所以 $\theta_1+\theta_2=\frac{3\pi}{8}+\frac{15\pi}{8}=\frac{9\pi}{4}$.(10 分)

【评分细则】

1. 第(1)小题中,第 1 行没有变式的过程不扣分;
2. 第(2)小题中,联立的若是直角坐标方程,计算非常困难,算不出结果,可酌情给 1 ~2 分.

23. 解:(1)当 $a=2$ 时,$f(x)=2|x+2|+|x-2|=\begin{cases}-3x-2,x<-2,\\ x+6,-2\leqslant x\leqslant 2,\\ 3x+2,x>2,\end{cases}$

又 $f(x)\leqslant 7$,所以 $\begin{cases}x<-2,\\ -3x-2\leqslant 7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ x+6\leqslant 7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>2,\\ 3x+2\leqslant 7,\end{cases}$ (3 分)

解得 $-3\leqslant x<-2$ 或 $-2\leqslant x\leqslant 1$,

所以 $-3\leqslant x\leqslant 1$,

所以不等式 $f(x)\leqslant 7$ 的解集为 $\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$.(5 分)

(2)$f(x)=|x+a|+|x+a|+|x-a|$,

因为 $|x+a|+|x-a|\geqslant|x+a-(x-a)|=2|a|$,当且仅当 $(x+a)(x-a)\leqslant 0$ 时等号成立,

$|x+a|\geqslant 0$,当且仅当 $x=-a$ 时等号成立,(8 分)

所以 $|x+a|+|x+a|+|x-a|\geqslant 2|a|$,当且仅当 $x=-a$ 时等号成立,

所以 $2|a|=10$,解得 $a=-5$ 或 5.(10 分)

【评分细则】

1. 第(1)小题中,结果不写成集合或区间形式扣 1 分;
2. 第(2)小题中,不强调取等号的条件扣 1 分.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。