2024年1月“九省联考”考后提升卷

高三数学

（考试时间：150分钟　试卷满分：150分）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．某篮球兴趣小组7名学生参加投篮比赛，每人投10个，投中的个数分别为8，5，7，5，8，6，8，则这组数据的众数和中位数分别为（　）．

A．5，7　　B．6，7　　C．8，5　　D．8，7

2．设椭圆的两个焦点分别为F_1、F_2，过F_2作椭圆长轴的垂线交椭圆于点P，若$\triangle F_1PF_2$为等腰直角三角形，则椭圆的离心率是（　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　C．$\sqrt{2}-1$　　D．$\sqrt{2}$

3．若数列$\{a_n\}$满足$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，其前n项和为S_n，若$a_8=0$，$a_{16}+a_{17}=18$，则$S_{17}=$（　）

A．0　　B．18　　C．$\frac{18}{17}$　　D．$\frac{35}{17}$

4．已知α、β是两个不同的平面，m、n是两条不同的直线，则下列命题中不正确的是（　）

A．若$m\perp\alpha$，$n//\alpha$，则$m\perp n$　　B．若$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$\alpha//\beta$，则$m//n$

C．若$\alpha//\beta$，$m\subset\alpha$，则$m//\beta$　　D．若$m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n//\beta$，则$\alpha\perp\beta$

5．在党的二十大报告中，习近平总书记提出要发展“高质量教育”，促进城乡教育均衡发展.某地区教育行政部门积极响应党中央号召，近期将安排甲、乙、丙、丁4名教育专家前往某省教育相对落后的三个地区指导教育教学工作，则每个地区至少安排1名专家的概率为（　）

A．$\frac{1}{9}$　　B．$\frac{4}{9}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{8}{27}$

6．设F为抛物线$y^2=2x$的焦点，A，B，C为该抛物线上三点，若$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$，则$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=$

（ ）

A．9　　B．6　　C．4　　D．3

7．已知$\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$，$\tan 2\theta=-4\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，则$\frac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}=$（ ）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．1　　D．$\frac{3}{2}$

8．已知F_1,F_2分别为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，过$F_2$且与双曲线的一条渐近线平行的直线交双曲线于点$P$，若$|PF_1|=4|PF_2|$，则双曲线的离心率为（ ）

A．$\sqrt{7}$　　B．$\frac{\sqrt{21}}{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{21}$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．若函数$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度后得到函数$g(x)$的图象，则（ ）

A．$g(x)$的最小正周期为π

B．$g(x)$是奇函数

C．$g(x)$的图象关于直线$x=\frac{3\pi}{16}$对称

D．$g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$上单调递增

10．已知复数$z=2+\mathrm{i}$，$z_1=x+y\mathrm{i}$（x，$y\in\mathbf{R}$）（i为虚数单位），$\bar{z}$为z的共轭复数，则下列结论正确的是（ ）

A．$\bar{z}$的虚部为$-\mathrm{i}$

B．$z^2=|z|^2$

C．$\frac{|\bar{z}|}{|z|}=1$

D．若$|z-z_1|\leq 1$，则在复平面内z_1对应的点形成的图形的面积为π

11．已知函数$f(x)$，$g(x)$的定义域均为R，且$g(x)=f(4+x)$，$f(x+y)+f(x-y)=g(x-4)f(y)$，$g(-3)=1$，则下列说法正确的有（ ）

A．$f(1)=1$　　B．$f(x)$为奇函数

C．$f(x)$的周期为 6　　D．$\sum_{k=1}^{2026}f(k)=-3$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．已知集合 $A=\{x|-3\le x\le 2\},B=\{x|x\ge a\}$ 且 $A\subset B$，则实数 a 的取值范围是_____.

13．传说古希腊数学家阿基米德的墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等."圆柱容球"是阿基米德最为得意的发现.在一个"圆柱容球"模型中，若球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$，则该模型中圆柱的表面积为________.

14．对于任意两个正实数 a，b，定义 $a\otimes b=\lambda\cdot\frac{a}{b}$，其中常数 $\lambda\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$．若 $u\ge v>0$，且 $u\otimes v$ 与 $v\otimes u$ 都是集合 $\left\{x\,|\,x=\frac{n}{2},\ n\in\mathbf{Z}\right\}$ 的元素，则 $u\otimes v=$________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13 分）已知函数 $f(x)=\ln x+x^2+ax+2$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线与直线 $2x+3y=0$ 垂直．

（1）求 a；

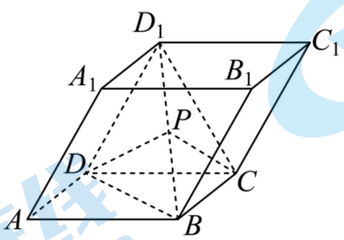
（2）求函数的单调性和极值.

16．（15 分）某班为了庆祝我国传统节日中秋节，设计了一个小游戏：在一个不透明箱中装有 4 个黑球，3 个红球，1 个黄球，这些球除颜色外完全相同.每位学生从中一次随机摸出 3 个球，观察颜色后放回.若摸出的球中有 X 个红球，则分得 X 个月饼；若摸出的球中有黄球，则需要表演一个节目.

(1)求一学生既分得月饼又要表演节目的概率；

(2)求每位学生分得月饼数的概率分布和数学期望.

17．（15 分）如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 和侧面 BCC_1B_1 都是矩形，$D_1D=D_1C=\sqrt{5}$，$AB=2BC=2$.



(1)求证：$AD\perp D_1C$；

(2)若点 P 的在线段 BD_1 上，且二面角 $P-CD-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$，求 $\frac{D_1P}{PB}$ 的值.

18．（17 分）在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F,E 的准线 l 交 x 轴于点 K，过 K 的直线 l 与抛物线 E 相切于点 A，且交 y 轴正半轴于点 P.已知 E 上的动点 B 到点 F 的距离与到直线 $x=-2$

的距离之和的最小值为 3.

(1)求抛物线 E 的方程;

(2)过点 P 的直线交 E 于 M,N 两点，过 M 且平行于 y 轴的直线与线段 OA 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$.证明：直线 HN 过定点.

19.（17 分）今有一个“数列过滤器”，它会将进入的无穷非减正整数数列删去某些项，并将剩下的项按原来的位置排好形成一个新的无穷非减正整数数列，每次“过滤”会删去数列中除以 M 余数为 N 的项，将这样的操作记为 $L(M,N)$ 操作.设数列 $\{a_n\}$ 是无穷非减正整数数列.

（1）若 $a_n=2^{n-1},n\in N^{+}$，$\{a_n\}$ 进行 $L(2,1)$ 操作后得到 $\{b_n\}$，设 a_n+b_n 前 n 项和为 S_n

①求 S_n .

②是否存在 $p,q,r\in N^{+}$，使得 S_P,S_q,S_r 成等差？若存在，求出所有的 (p,q,r)；若不存在，说明理由.

（2）若 $a_n=n,n\in N^{+}$，对 $\{a_n\}$ 进行 $L(4,0)$ 与 $L(4,1)$ 操作得到 $\{b_n\}$，再将 $\{b_n\}$ 中下标除以 4 余数为 0，1 的项删掉最终得到 $\{c_n\}$ 证明：每个大于 1 的奇平方数都是 $\{c_n\}$ 中相邻两项的和.