

北京汇文中学教育集团 2023-2024 学年度第一学期 期中考试

高一年级 数学学科

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

一、选择题（每题 5 分，共 60 分）

1. 下列关系中正确的是（ ）

- A. $0 \in \emptyset$ B. $\{0\} \in \emptyset$ C. $0 \in N$ D. $\{0\} \in N$

2. 已知集合 $A = \{x \in N | x > 1\}$, $B = \{x | 0 < x < 4\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | 1 < x < 4\}$ B. $\{x | x > 0\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3\}$

3. 命题 $p: \forall x \in R, x^2 + x + \frac{1}{2} > 0$, 则命题 p 的否定是 ()

- A. $\exists x \in R, x^2 + x + \frac{1}{2} \leq 0$ B. $\exists x \in R, x^2 + x + \frac{1}{2} > 0$
C. $\forall x \in R, x^2 + x + \frac{1}{2} \leq 0$ D. $\forall x \in R, x^2 + x + \frac{1}{2} > 0$

4. 下列函数中，值域是 R 的幂函数是 ()

- A. $y = x^{\frac{1}{3}}$ B. $y = (\frac{1}{3})^x$ C. $y = x^{\frac{2}{3}}$ D. $y = (\frac{2}{3})^x$

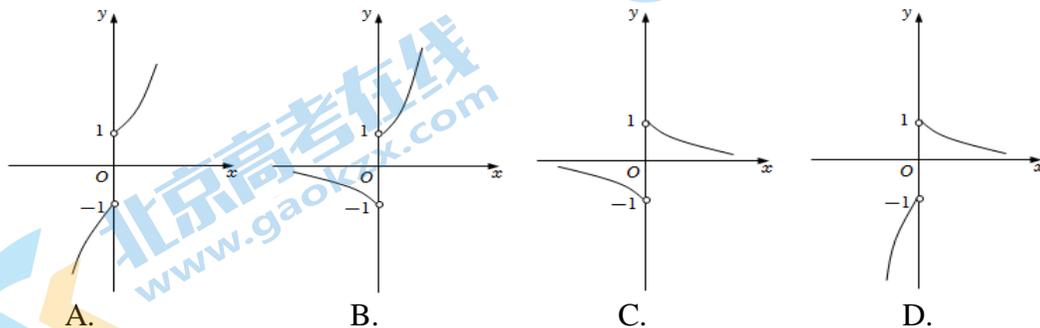
5. 若 $a > b > 0$, c 为实数，则下列不等关系不一定成立的是 ()

- A. $ac^2 > bc^2$ B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ C. $a^2 > b^2$ D. $a+c > b+c$

6. 若 a, b 均为非零实数，则不等式 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ 成立的一个充要条件为 ()

- A. $ab > 0$ B. $ab \geq 0$ C. $ab < 0$ D. $ab \leq 0$

7. 函数 $f(x) = \frac{x}{|x| \cdot 3^x}$ 的图象大致为 ()



8. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减， $f(-7) = 0$ ，则下列结论错误的是 ()

- A. $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减 B. $f(x)$ 的图象与 x 轴只有 2 个公共点
C. $f(8) < 0$ D. 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, -7) \cup (0, 7)$

9. 已知函数 $f(x) = 2x^2 + bx + c$ (b, c 为实数)， $f(-10) = f(12)$ ，若方程 $f(x) = 0$ 有两个正实数根 x_1, x_2 ，则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的最小值是 ()

- A. 4 B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{2}$

10. 已知集合 $A = \{-2, 1\}$ ， $B = \{x | ax = 2\}$ ，若 $A \cap B = B$ ，则实数 a 的取值集合为 ()

- A. $\{-1\}$ B. $\{2\}$ C. $\{-1, 0, 2\}$ D. $\{-1, 2\}$

11. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 3, & x \leq 0 \\ (x-2)^2, & 0 < x \leq a \end{cases}$ 的定义域和值域的交集为空集，则正数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1]$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 4)$ D. $(2, 4)$

12. 已知函数 $f(x) = (m+1) \cdot 2^x + x^2 + 2nx$ ，集合 $A = \{x | f(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$ ，集合 $B = \{x | f[f(x)] = 0, x \in \mathbf{R}\}$ ，若 $A = B$ ，且都不是空集，则 $m+n$ 的取值范围是 ()

- A. $[-1, 4]$ B. $[-1, 1)$ C. $[-3, 5]$ D. $[0, 4)$

二、填空题 (每题 5 分，共 30 分)

13. 函数 $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{2x-4}$ 的定义域是 _____

14. 计算: $(\frac{1}{27})^{\frac{1}{3}} + \log_3 5 - \log_3 15 =$ _____

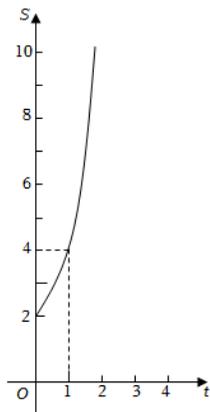
15. 已知集合 $A = \{2a-1, a^2, 0\}$ ， $B = \{1-a, a-5, 9\}$ ，若满足 $A \cap B = \{9\}$ ，则实数 a 的值为 _____

16. 不等式 $\frac{2x}{x-1} \geq 3$ 的解集是 _____

17. 某池塘里原有一块浮萍，浮萍蔓延后的面积 S (单位: 平方米) 与时间 t (单位: 月) 的关系式为 $S = a^{t+1}$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$)，图象如图所示. 则下列结论:

- ① 浮萍蔓延每个月增长的面积都相同;
② 浮萍蔓延 3 个月后的面积是浮萍蔓延 5 个月后的面积的

$\frac{1}{4}$;



③ 浮萍蔓延每个月增长率相同，都是 50%；

④ 浮萍蔓延到 3 平方米所经过的时间与蔓延到 4 平方米所经过的时间的和比蔓延到 7 平方米所经过的时间少。

其中所有正确结论的序号是 _____

18. 世界公认的三大著名数学家为阿基米德、牛顿、高斯，其中享有“数学王子”美誉的高斯提出了取整函数 $y = [x]$ ， $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如

$[1.1] = 1$ 。已知 $f(x) = \left[\frac{2x-1}{x+1} \right]$ ， $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ ，则函数 $f(x)$ 的值域为 _____

三、解答题（共 60 分）

19. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 - 2ax + 1$

(1) 求 $f(x)$ 的对称轴；

(2) 若 $f(-1) = 7$ ，求 a 的值及 $f(x)$ 的最值。

20. 已知函数 $f(x) = 2^x - \frac{a}{2^x}$ 是定义在 R 上的奇函数。

(1) 求 $f(1)$ 的值；

(2) 若 $x \in [0, 3]$ 时，不等式 $f(t-2x) + f(x^2) \leq 0$ 恒成立，求实数 t 的取值范围。

21. 设函数 $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ($x > 3$)

(1) 指出 $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上的单调性，并用定义证明你的结论；

(2) 若 $f(x) - a < 0$ 在 $(3, +\infty)$ 上有解，求 a 的取值范围。

22. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的函数，满足下列两个条件：① 当 $x < 0$ 时， $f(x) < 0$ 恒成立；② 对任意的 $x, y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，都有

$$f(x)f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right).$$

(1) 求 $f(1)$ 和 $f(-1)$ ；

(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性，并证明；

(3) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递减，直接写出关于 x 的不等式

$$f(x^2 + x + 1) \leq f\left(\frac{1}{3}\right)$$
 的解集.

23. 设 A 是实数集的非空子集，称集合 $B = \{uv \mid u, v \in A \text{ 且 } u \neq v\}$ 为集合 A 的生成集.

(1) 当 $A = \{2, 3, 5\}$ 时，写出集合 A 的生成集 B ；

(2) 若 A 是由 5 个正实数构成的集合，求其生成集 B 中元素个数的最小值；

(3) 判断是否存在 4 个正实数构成的集合 A ，使其生成集 $B = \{2, 3, 5, 6, 10, 16\}$ ，并说明理由.

北京汇文中学教育集团 2023-2024 学年度第一学期
期中考试
高一年级 数学学科

答案:

选择题:

CCAAA ADBBC BB

填空题:

13. $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$

14. $-\frac{2}{3}$

15. -3

16. $(1, 3]$

17. ②④

18. $\{1, 2, 3\}$

19. (1) $f(x) = ax^2 - 2ax + 1 = a(x-1)^2 + 1 - a$

\therefore 对称轴为: $x = 1$

(2) $\because f(-1) = 7, f(-1) = a - 2a + 1 = 7$

\therefore 解得 $a = 2 \quad \therefore f(x) = 2x^2 - 4x + 1 = 2(x-1)^2 - 1,$

\therefore 函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(1) = -1$, 无最大值

20. (1) $\because f(x)$ 是 R 上的奇函数, $\therefore f(0) = 0$

即 $2^0 - \frac{a}{2^0} = 0$, 解得 $a = 1, \therefore f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x},$

$\forall x \in R$, 则 $f(-x) = 2^{-x} - \frac{1}{2^{-x}} = \frac{1}{2^x} - 2^x = -f(x)$, 符合题意,

$f(1) = \frac{3}{2}$

(2) 解: 因为 $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x}$,

所以 $f(x)$ 在定义域上单调递增, 又 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数,

所以 $f(t-2x) + f(x^2) \leq 0$ 在 $x \in [0, 3]$ 恒成立,

等价于 $f(t-2x) \leq -f(x^2)$ 即 $f(t-2x) \leq f(-x^2)$ 在 $x \in [0, 3]$ 上恒成立,

即 $t-2x \leq -x^2$ 在 $x \in [0, 3]$ 上恒成立, 即 $t \leq -x^2 + 2x$, $x \in [0, 3]$ 恒成立,

令 $g(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$, $x \in [0, 3]$, $t \leq g(x)$ 的最小值

当 $x \in [0, 3]$ 时, $g(x)_{\min} = g(3) = -3$

$$\therefore t \leq -3$$

21. (1) $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递减,

证明: $\forall 3 < x_1 < x_2$, $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1+1}{x_1-2} - \frac{x_2+1}{x_2-2} = \frac{3(x_2-x_1)}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$$\because 3 < x_1 < x_2, \therefore x_2 - x_1 > 0, x_1 - 2 > 0, x_2 - 2 > 0$$

$$\therefore f(x_1) > f(x_2)$$

$\therefore f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递减

$$(2) \because f(x) = 1 + \frac{3}{x-2} \quad (x > 3),$$

$$\therefore f(x) \in (1, 4)$$

$\because f(x) - a < 0$ 在 $(3, +\infty)$ 上有解, $\therefore a > 1$

22. (1) 解: 令 $x = y = 1$, 得 $f^2(1) = 2f(1) \quad \therefore f(1) = 0$ 或 $f(1) = 2$

若 $f(1) = 0$, 取 $x = y = -1$, 则 $f^2(-1) = 2f(1) = 0$ 得 $f(-1) = 0$,

与 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$ 矛盾, 故 $f(1) = 0$ 舍去.

$$\therefore f(1) = 2,$$

$$f^2(-1) = 2f(1) = 4, \text{ 又 } x < 0 \text{ 时, } f(x) < 0, \therefore f(-1) = -2$$

(2) 证明: 取 $y = x$, $x = -1$, 得 $f(-1)f(x) = f(-x) + f(-x)$

则 $-2f(x) = 2f(-x)$, $\therefore f(x) = -f(-x)$, 函数 $f(x)$ 为奇函数.

(3) $[-2, 1]$

23. (1) $B = \{6, 10, 15\}$

(2) 设 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, 不妨设 $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$

$$\therefore a_1a_2 < a_1a_3 < a_1a_4 < a_1a_5 < a_2a_5 < a_3a_5 < a_4a_5$$

$\therefore B$ 中元素个数至少有 7 个,

当 $A = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5\}$ 时, $B = \{2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9\}$, 此时 B 中有 7 个元素

所以生成集 B 中元素个数的最小值为 7.

(3) 不存在, 理由如下:

假设存在 4 个正实数构成的集合 $A = \{a, b, c, d\}$, 使其生成集

$$B = \{2, 3, 5, 6, 10, 16\}$$

不妨设 $0 < a < b < c < d$, 则 $ab < ac < bc$, $ab < ac < ad$, $bc < bd < cd$,

$$ad < bd < cd$$

则有 $ab = 2$ ①, $ac = 3$ ②, $bd = 10$ ③, $cd = 16$ ④,

由①④ $abcd = 32$, 由②③得 $abcd = 30$, 矛盾;

所以假设不成立, 故不存在 4 个正实数构成的集合 A , 使其生成集

$$B = \{2, 3, 5, 6, 10, 16\}$$

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年10-11月北京各区各年级期中试题 & 答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

