南京师大附中 2020 届高三年级模拟考试

数　学

2019.11

注意事项:

1．本试卷共 4 页，包括填空题(第 1 题~第 14 题)、解答题(第 15 题~第 20 题)两部分．本试卷满分为 160 分，考试时间为 120 分钟．

2．答题前，请务必将自己的姓名、学校、班级、学号写在答题卡的密封线内．试题的答案写在答题卡上对应题目的答案空格内．考试结束后，交回答题纸

参考公式:

锥体的体积 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 是锥体的底面积，h 是锥体的高．

球体的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，其中 r 是球体的半径．

一、填空题:本大题共14小题，每小题5分，共计70分．不需写出解答过程，请把答案写在答题卡相应位置上．

1． 设集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{x|4\le x\le 7\}$，则 $A\cap B=$____▲____．

2． 若复数 $(1+bi)(2-i)$ 是纯虚数，其中 i 是虚数单位，则实数 b 的值是____▲____．

3． 在右图所示的算法中，若输出 y 的值为 6，则输入 x 的值为____▲____．

```
Read x
If x≤1 Then
   y←5−x
Else
   y←5+x
End If
Print y
```

第3题图

4． 函数 $y=\sqrt{x+1}-\lg(x^2+2x)$ 的定义域是____▲____．

5． 某中学高一、高二、高三年级的学生人数分别为620人、680人、700人，为了解不同年级学生的眼睛近视情况，现用分层抽样的方法抽取了容量为100的样本，则高三年级应抽取的学生人数为____▲____．

6. 已知集合 $A=\{0，1，2，3，4\}$，若从集合 A 中随机抽取 2 个数，其和是偶数的概率为 ▲ .

7. 已知正四棱锥的底面边长为 $2\sqrt{2}$，体积为 8，则正四棱锥的侧面积为 ▲ .

8. 设数列 $\{a_n\}$（$n\in\mathrm{N}^*$）是等比数列，前 n 项和为 S_n．已知 $2a_3-3a_2=9$，$a_4=27$，则 S_3 的值为 ▲ .

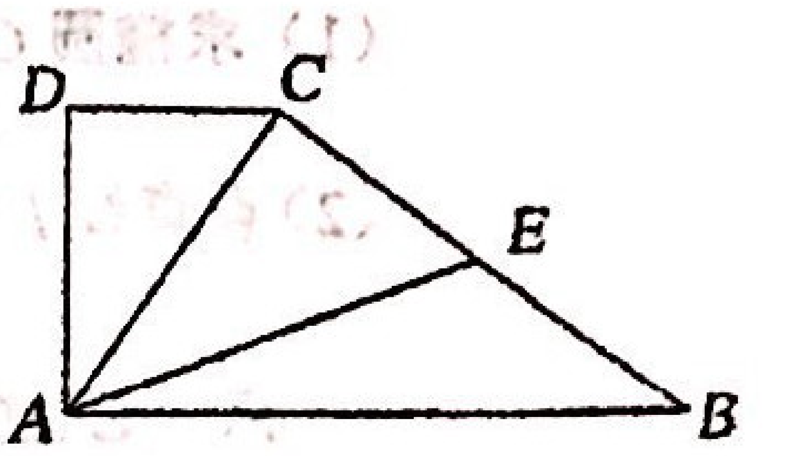
9. 已知 F_1，F_2 是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点，$A$ 是 C 的左顶点，点 P 在过点 A 且斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上，$\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形，$\angle F_1F_2P=120°$，则椭

圆 C 的离心率为____▲____.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(1,2)$，点 $M(4,2)$，点 N 在线段 OA 的延长线上．设直线 MN 与直线 OA 及 x 轴围成的三角形面积为 S，则 S 的最小值为____▲____.

11. 已知函数 $f(x)=2x+\ln x$，若直线 l：$y=kx-1$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切，则实数 k 的值为____▲____.

12. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel DC$，$\angle ADC=90°$，$AB=2$，$AD=1$，E 为 BC 的中点，若 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}=-1$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$____▲____.



第 12 题图

13. 在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，

已知 $2\sin^2 A+\sin^2 B+\sqrt{2}\sin A\sin B=3\sin^2 C$，则 $\sin C$ 的最大值为____▲____.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|4^x-1|, x<1\\ \dfrac{6}{x+1}, x\geq 1\end{cases}$，若方程 $f(f(x))=a$ 恰有 5 个不同的实数根，则实数 a 的取值范围是____▲____.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x)=3\cos^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

（1）当 $x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi]$ 时，求函数 $f(x)$ 的值域；

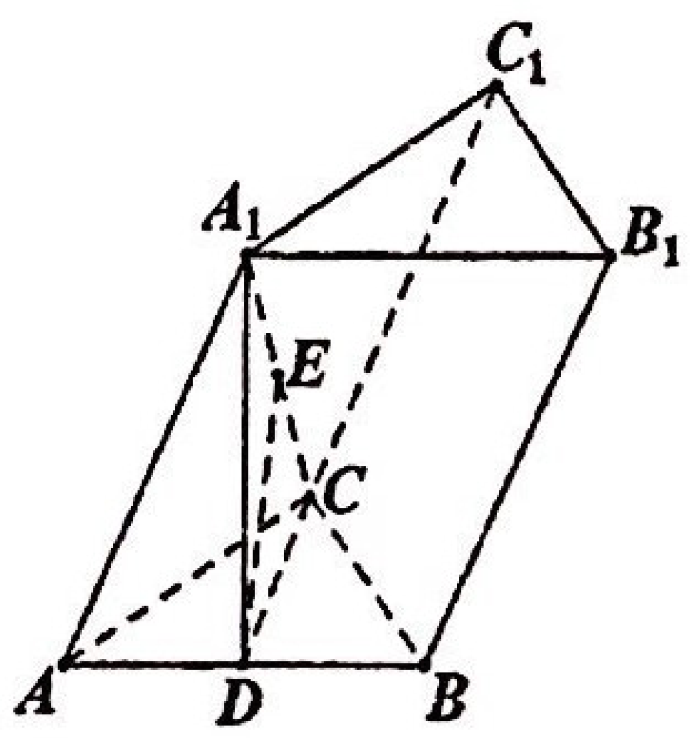
（2）设△ABC 的内角 A，B，C 对应的边分别为 a，b，c．已知 $f(\dfrac{A}{2})=3$，且 $a=3$，$b+c=4$，求△ABC 的面积．

16. (本小题满分 14 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1B_1B 为菱形，且 $\angle A_1AB=60°$，$AC=BC$，点 D、E 分别为 AB、A_1C 的中点．

（1）求证：平面 $A_1CD\perp$ 平面 ABC；

（2）求证：$DE\parallel$ 平面 BCC_1B_1．



第 16 题图

17. (本小题满分 14 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且点 $(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 在此椭圆上．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）设直线 l 与圆 O：$x^2+y^2=1$ 相切于第一象限内的点 P，且 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点．若 ΔOAB 的面积为 $\frac{2}{3}$，求直线 l 的方程．

18. (本小题满分 16 分)

某人利用一根原木制作一件手工作品，该作品由一个球体和一个正四棱柱组成．假定原木为圆柱体（如图 1），底面半径为 r，高为 h．制作要求如下：首先需将原木切割为两部分（分别称为第Ⅰ圆柱和第Ⅱ圆柱），要求切面与原木的上下底面平行（不考虑损耗）．然后将第Ⅰ圆柱切割为一个球体，要求体积最大，将第Ⅱ圆柱切割为一个正四棱柱，要求正四棱柱的上下底面分别为第Ⅱ圆柱上下底面圆的内接正方形．

（1）当 $r=2$，$h=8$ 时，若第Ⅰ圆柱和第Ⅱ圆柱的体积相等，求该手工作品的体积；

（2）对于给定的 r 和 h（$h>2r$），求手工作品体积的最大值．

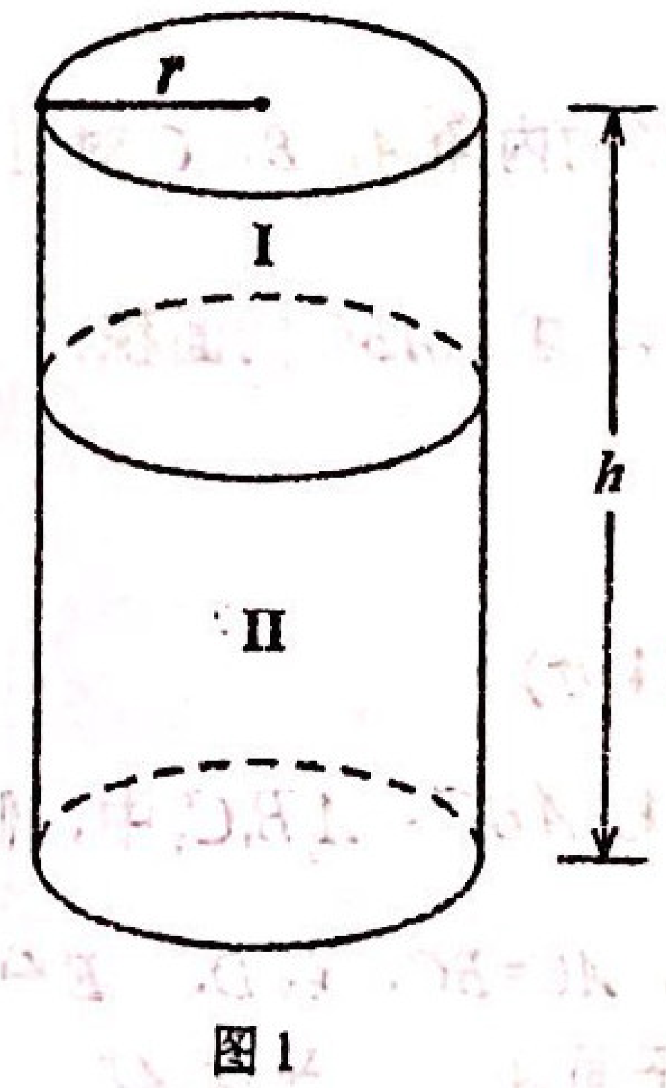


图 1

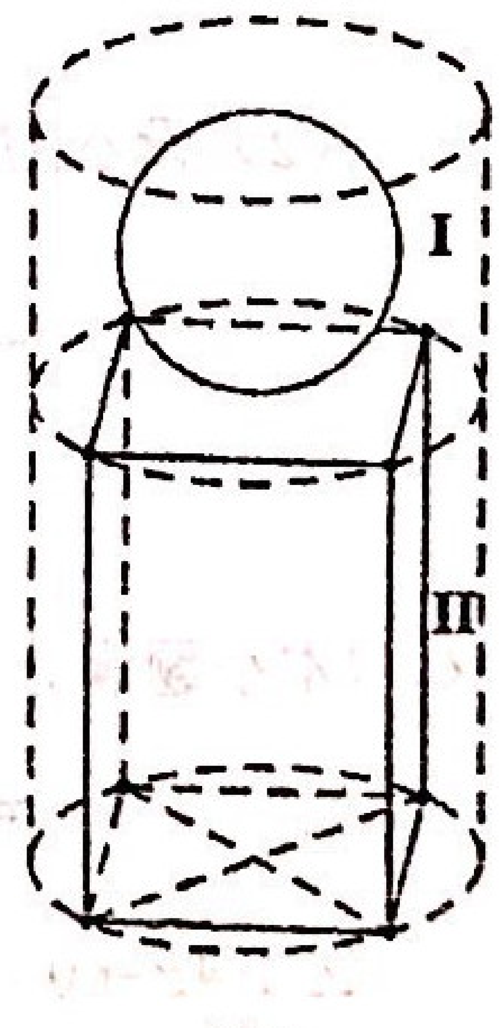


图 2

第 18 题图

19. (本小题满分 16 分)

设 m 为实数，已知函数 $f(x)=\dfrac{x+m}{e^x}$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $f'(0)=0$.

(1) 求 m 的值；

(2) 设 a 为实数，若对于任意 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $x^2+a\ge f(x)$ 恒成立，且存在唯一的实数 x_0 使得 $x_0^2+a=f(x_0)$ 成立，求 a 的值；

(3) 是否存在负数 k，使得 $y=kx+\dfrac{3}{e}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线. 若存在，求出 k 的所有值；若不存在，请说明理由.

20. (本小题满分 16 分)

设数列 $\{a_n\}$ ($n\in\mathbf{N}^*$) 是公差不为零的等差数列，满足 $a_3+a_6=a_9$，$a_5+a_7^2=6a_9$；数列 $\{b_n\}$ ($n\in\mathbf{N}^*$) 的前 n 项和为 S_n，且满足 $4S_n+2b_n=3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 在 b_1 和 b_2 之间插入 1 个数 x_{11}，使 b_1，x_{11}，b_2 成等差数列；在 b_2 和 b_3 之间插入 2 个数 x_{21}，x_{22}，使 b_2，x_{21}，x_{22}，b_3 成等差数列；……；在 b_n 和 b_{n+1} 之间插入 n 个数 x_{n1}，x_{n2}，…，x_{nn}，使 b_n，x_{n1}，x_{n2}，… x_{nn}，b_{n+1} 成等差数列.

(i) 求 $T_n=x_{11}+x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nn}$；

(ii) 是否存在正整数 m，n，使 $T_n=\dfrac{a_{m+1}}{2a_m}$ 成立？若存在，求出所有的正整数对 (m,n)；若不存在，请说明理由.

南京师大附中 2020 届高三年级模拟考试

数学参考答案及评分标准　　2019.11

一、填空题（本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上）

1. $\{5,7\}$　　2. -2　　3. -1　　4. $(0,+\infty)$　　5. 35

6. $\dfrac{2}{5}$　　7. $4\sqrt{22}$　　8. 13　　9. $\dfrac{1}{4}$　　10. 40

11. 3　　12. 2　　13. $\dfrac{\sqrt{34}}{6}$　　14. $(\dfrac{3}{2},3)$

二、解答题（本大题共 6 小题，计 90 分.解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内）

15.(1)$f(x)=\dfrac{3}{2}(1+\cos 2\omega x)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x=\sqrt{3}\sin(2\omega x+\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{3}{2}$.

因为 $f(x)$ 的周期为π，且 $\omega>0$，所以 $\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，解得 $\omega=1$.所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{3}{2}$. …3 分

又 $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi$，得 $\dfrac{4}{3}\pi\le 2x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{7}{3}\pi$，$-1\le\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{3}{2}-\sqrt{3}\le\sqrt{3}\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{3}{2}\le 3$，

即函数 $y=f(x)$ 在 $x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi]$ 上的值域为 $[\dfrac{3}{2}-\sqrt{3},3]$.　　……7 分

(2)因为 $f(\dfrac{A}{2})=3$，所以 $\sin(A+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.由 $A\in(0，\pi)$，知 $\dfrac{\pi}{3}<A+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{4}{3}\pi$，

解得 $A+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.　　……9 分

由余弦定理知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $9=b^2+c^2-bc$.

所以 $9=(b+c)^2-3bc$，因为 $b+c=4$，所以 $bc=\dfrac{7}{3}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$.　　……14 分

16.证明：（1）因为 $AC=BC$，且点 D 为 AB 的中点，所以 $CD\perp AB$.　　……2 分

因为侧面 AA_1B_1B 为菱形，所以 $AA_1=AB$，又 $\angle A_1AB=60°$，

所以 $\triangle A_1AB$ 为等边三角形，点 D 为 AB 的中点，所以 $A_1D\perp AB$.　　……4 分

且 $A_1D\cap CD=D$，A_1D、$CD\subset$ 平面 A_1CD

所以 $AB\perp$ 平面 A_1CD，又 $AB\subset$ 平面 ABC

所以平面 $A_1CD\perp$ 平面 ABC　　……6 分

（2）连结 C_1A、C_1B，因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 是三棱柱

所以 $AA_1 // CC_1$，$AA_1=CC_1$，所以四边形 AA_1C_1C 是平行四边形　　……8 分

点 E 为 A_1C 的中点，故 $A_1C \cap AC_1 = E$，所以点 E 为 AC_1 的中点，

又点 D 为 AB 的中点，所以在△ABC_1 中，有 $DE // BC_1$ ……12 分

因为 $DE\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，$BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，
所以 $DE //$ 平面 BCC_1B_1. ……14 分

17.解：（1）$\because e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore a=\sqrt{2}c$ $\therefore b=c$，可得椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2c^2}+\dfrac{y^2}{c^2}=1$，

将点 $\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 代入，解得方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ ……4 分

（2）$\because S_{\Delta AOB}=\dfrac{2}{3},\therefore \dfrac{1}{2}AB\cdot OP=\dfrac{2}{3},\therefore AB=\dfrac{4}{3}$

因为直线 l 与单位圆 O 相切于第一象限内的点，可设 l：$y=kx+m$ $k<0$，$m>0$

$\because l$ 与⊙O 相切 $\therefore d_{O-l}=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1$ $\therefore m^2=k^2+1$ ① ……6 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 由 $\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，可得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$ （*）

$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2} \\ x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{1+2k^2} \end{cases}$，$\therefore AB=\sqrt{1+k^2}\,\dfrac{\sqrt{16k^2+8-8m^2}}{1+2k^2}$ ② ……10 分

将①代入②，得 $AB=\sqrt{1+k^2}\,\dfrac{\sqrt{8k^2}}{1+2k^2}=\dfrac{4}{3}$

解之可得 $k^4+k^2-2=0$，$\therefore k^2=1$或-2（舍），$\therefore k=\pm1$

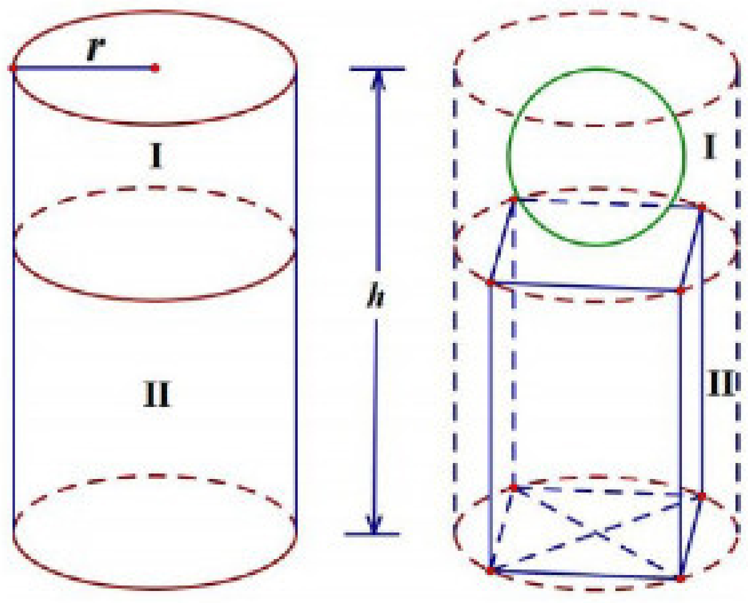
代入①式可得 $m=\pm\sqrt{2}$ 因为 $k<0$，$m>0$

将 $k=-1,m=\sqrt{2}$ 代回到（*）式，方程有两个不同的解 ……13 分

所以直线 l 的方程为 $y=-x+\sqrt{2}$ ……14 分

18. 解：（1）因为第Ⅰ圆柱和第Ⅱ圆柱的体积一样大
所以它们的高一样，可设为 $h'=4=2r$
第Ⅰ圆柱内的球体直径应不超过 h' 和 $2r$
因此第Ⅰ圆柱内的最大球体半径即为 $R=r=2$

球体体积$V_1=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32}{3}\pi$ ……3 分



因为正四棱柱的底面正方形内接于半径为 r=2 的圆

所以正方形的对角线长为 $2r$=4，边长为$2\sqrt{2}$

正四棱柱体积$V_2=(2\sqrt{2})^2\cdot h'=8\times 4=32$

手工作品的体积为$V=V_1+V_2=\frac{32}{3}\pi+32$ ……6 分

（2）设第Ⅰ圆柱的高为 x，则第Ⅱ圆柱的高为 h-x，

① 当 $2r\leqslant x<h$ 时，第Ⅰ圆柱内的球体直径应不超过 x 和 $2r$，故球体的最大半径应为 r

由（1）可知，此时第Ⅱ圆柱内的正四棱柱底面积为$(\sqrt{2}r)^2=2r^2$，

故当 x=$2r$ 时，h-x 最大为 h-$2r$，

手工作品的体积最大值为$V_0=\frac{4}{3}\pi r^3+2r^2(h-2r)$ ……10 分

② 当 $0<x<2r$ 时，第Ⅰ圆柱内的球体直径应不超过 x 和 $2r$，故球体的最大直径应为 x

球体体积$V_1=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(\frac{x}{2})^3=\frac{1}{6}\pi x^3$ 正四棱柱体积$V_2=(\sqrt{2}r)^2\cdot(h-x)=2r^2(h-x)$

所以手工作品的体积为$V(x)=V_1+V_2=\frac{1}{6}\pi x^3+2r^2(h-x)$ （$0<x<2r$）

$$V'(x)=\frac{1}{2}\pi x^2-2r^2=\frac{1}{2}\pi(x^2-\frac{4}{\pi}r^2)=\frac{1}{2}\pi(x-\frac{2}{\sqrt{\pi}}r)(x+\frac{2}{\sqrt{\pi}}r)$$

令$V'(x)=0\Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}r<2r$

x	$(0,\frac{2}{\sqrt{\pi}}r)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}r$	$(\frac{2}{\sqrt{\pi}}r,2r)$
$V'(x)$	<0	=0	>0
$V(x)$	递减	极小	递增

$V(0)=2r^2h$，$V(2r)=\frac{4}{3}\pi r^3+2r^2(h-2r)=(\frac{4}{3}\pi-4)r^3+2r^2h=V_0$

因为$\frac{4}{3}\pi-4>0$，所以$V(2r)=V_0>V(0)$

所以当 x=$2r$ 时，手工作品的体积最大值为$V_0=\frac{4}{3}\pi r^3+2r^2(h-2r)$. ……16 分

19.解：（1）因为$f'(x)=\frac{1-(x+m)}{\mathrm{e}^x}$，所以$f'(0)=\frac{1-(0+m)}{\mathrm{e}^0}=1-m=0$，故$m=1$. 2 分

（2）因为$\forall x\in\mathbf{R},x^2+a\geq f(x)$，所以$x^2+a-\frac{x+1}{\mathrm{e}^x}\geq 0$恒成立。记$\varphi(x)=x^2+a-\frac{x+1}{\mathrm{e}^x}$，

则$\varphi'(x)=2x+\frac{x}{\mathrm{e}^x}=x(2+\frac{1}{\mathrm{e}^x})$，因为$x\in\mathbf{R}$，且$\mathrm{e}^x>0$，所以$2+\frac{1}{\mathrm{e}^x}>0$，

因此当$x<0$时$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减；当$x>0$时$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增，

所以$\varphi(x)_{\min}=\varphi(0)=a-1\ge 0$，即$a\ge 1$，　　　　　　　　……6 分

当$a>1$时，$\varphi(x)=x^2+a-f(x)\ge a-1>0$，故方程$x^2+a=f(x)$无解

当$a=1$时，当$x\ne 0$时，由单调性知$\varphi(x)=x^2+a-f(x)>0$

所以存在唯一的$x_0=0$使得$x_0^2+a=f(x_0)$，即$a=1$.　　　　　　　　……8 分

（3）设切点的横坐标为t，则

$\begin{cases} k=f'(t) \\ kt+\dfrac{3}{e}=\dfrac{t+1}{e^t} \end{cases}$，即$\begin{cases} k=-\dfrac{t}{e^t} \\ kt+\dfrac{3}{e}=\dfrac{t+1}{e^t} \end{cases}$，$\dfrac{3}{e}=\dfrac{t+1}{e^t}+\dfrac{t^2}{e^t}$，即$\dfrac{3}{e}=\dfrac{t^2+t+1}{e^t}$（*），

原命题等价于存在正数t使得方程（*）成立.　　　　　　　　……11 分

记$g(t)=\dfrac{t^2+t+1}{e^t}$，则$g'(t)=\dfrac{(2t+1)-(t^2+t+1)}{e^t}=\dfrac{-t(t-1)}{e^t}$，

令$g'(t)=0$，则$t=1$，

因此当$0<t<1$时$g'(t)>0$，$g(t)$单调递增，$g(t)<g(1)=\dfrac{3}{e}$；

当$t>1$时$g'(t)<0$，$g(t)$单调递减，$g(t)<g(1)=\dfrac{3}{e}$，

则$g(t)_{\max}=g(1)=\dfrac{3}{e}$.

故存在唯一的正数$t=1$使得方程（*）成立即

存在唯一的负数$k=\dfrac{-t}{e^t}=-\dfrac{1}{e}$，使得$y=kx+\dfrac{3}{e}$是曲线$y=f(x)$的切线.　……16 分

20. 解：(1) 设数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\ne 0)$

则由条件$a_3+a_6=a_9$ 可得 $(a_1+2d)+(a_1+5d)=a_1+8d$　　$\therefore a_1=d$

又由$a_5+a_7^2=6a_9$ 可得 $(a_1+4d)+(a_1+6d)^2=6(a_1+8d)$

将$a_1=d$代入上式得 $5d+49d^2=54d$　　$\therefore 49d^2=49d$

$\because d\ne 0$　$\therefore d=1$　　$\therefore a_n=n$　　……………………………… 2 分

由$4S_n+2b_n=3$①

当$n\ge 2$时，$4S_{n-1}+2b_{n-1}=3$②

①—②得 $4b_n+2b_n-2b_{n-1}=0$　　$\therefore b_n=\frac{1}{3}b_{n-1}(n\geq 2)$

又 $4b_1+2b_1=3$　$\therefore b_1=\frac{1}{2}\neq 0$　　$\therefore \{b_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列

故 $b_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}(n\in N^*)$ $\therefore a_n=n$，$b_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}(n\in N^*)$　　…………… 4 分

(2) ①在 b_n 和 b_{n+1} 之间插入 n 个数 x_{n1}，x_{n2}，…，x_{nn}，

因为 b_n，x_{n1}，x_{n2}，… x_{nn}，b_{n+1} 成等差数列，设公差为 d_n

则 $d_n=\frac{b_{n+1}-b_n}{(n+2)-1}=\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})^n-(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})^{n-1}}{n+1}=-\frac{1}{3^n(n+1)}$

则 $x_{nk}=b_n+kd_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}-\frac{k}{3^n(n+1)}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}x_{nk}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}\cdot n-\frac{1}{3^n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{3^n}$　　…………… 6 分

$\therefore T_n=x_{11}+x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nn}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}$　①

则 $\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$　②

①—②得 $\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})-\frac{n}{3^{n+1}}$

$\therefore T_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{4\cdot 3^{n-1}}-\frac{n}{2\cdot 3^n}$　　…………… 8 分

②若 $T_n=\frac{a_{m+1}}{2a_m}$　　因为 $a_n=n$，所以 $a_m=m$

则 $\frac{3}{4}-\frac{1}{4\cdot 3^{n-1}}-\frac{n}{2\cdot 3^n}=\frac{m+1}{2m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2m}$

$\frac{1}{4}-\frac{1}{4\cdot 3^{n-1}}-\frac{n}{2\cdot 3^n}=\frac{1}{2m}$　　从而 $\frac{3^n-3-2n}{4\cdot 3^n}=\frac{1}{2m}$

故 $m=\dfrac{2\cdot 3^n}{3^n-2n-3}=\dfrac{2(3^n-2n-3)+4n+6}{3^n-2n-3}=2+\dfrac{4n+6}{3^n-2n-3}$ ··············10 分

当 $n=1$ 时，$m=2+\dfrac{10}{-2}=-3\notin N^*$

当 $n=2$ 时，$m=2+\dfrac{14}{2}=9\in N^*$

当 $n=3$ 时，$m=2+1=3\in N^*$

下证 $n\geq 4(n\in N^*)$ 时，　有 $3^n-2n-3>4n+6$　　即证 $3^n-6n-9>0$

设 $f(x)=3^x-6x-9(x\geq 4)$　　则 $f'(x)=3^x\ln 3-6>3^x-6\geq 3^4-6>0$

$\therefore f(x)$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递增

故 $n\geq 4$ 时，$3^n-6n-9>3^4-6\times 4-9=48>0$

即 $0<\dfrac{4n+6}{3^n-2n-3}<1$ ·············14 分

从而 $n\geq 4$ 时，m 不是整数 ··············15 分

故所求的所有整数对为 $(9,2)$ 及 $(3,3)$ ··············16 分

数学附加题参考答案及评分标准

21.A.选修 4-2：矩阵变换

解：设直线 $x-y-1=0$ 上一点 $P(x,y)$ 在变换 T_A 作用下得到点 $P'(x',y')$，

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&a\\b&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x+ay\\bx+3y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x'=-x+ay\\y'=bx+3y\end{cases}$$ ……4 分

代入直线 $x-y-1=0$ 得，$(-x+ay)-(bx+3y)-1=0$

整理得，$(-1-b)x+(a-3)y-1=0$　与直线 $x-y-1=0$ 重合

所以 $\begin{cases}-1-b=1\\a-3=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}$ ……10 分

B.选修 4-4：坐标系与参数方程

解：$\rho\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)=2\sqrt{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta=2\sqrt{2}$，

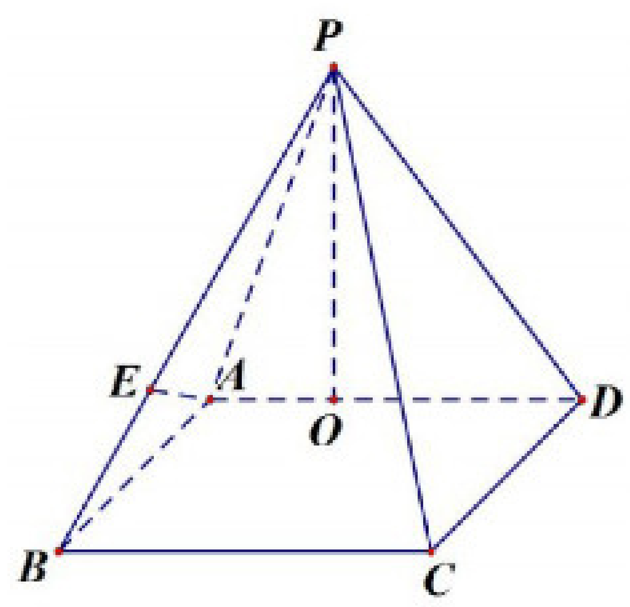
直线 l 的直角坐标方程是 $x-y-4=0$ ……2 分

$\rho^2=4\rho\cos\theta$，圆 C 的直角坐标方程是 $x^2+y^2=4x\Rightarrow(x-2)^2+y^2=4$ ……4 分

圆心为(2,0)，半径为 2，所以圆心到直线 l 的距离为 $d=\frac{|2-0-4|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$

所以弦长为 $l=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$ ……10 分

22.解：因为侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，$PO\perp AD$，$PO\subset$ 平面PAD



$AD=$ 平面$PAD\cap$ 平面$ABCD$，所以 $PO\perp$ 底面 $ABCD$

在底面 $ABCD$ 内过点 O 作 $OF\perp AD$，OF 交 BC 于 F，则 $CF=2BF$

又 $PO\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PO\perp OF$，$PO\perp AD$

以 OF，AD，PO 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

$A(0,-1,0),B(3,-1,0),C(3,2,0),D(0,2,0)$

（1）点 $P(0,0,2)$，因为 $PE=2EB$，所以点 $E(2,-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$，

$\overrightarrow{AE}=(2,-\frac{2}{3},\frac{2}{3})-(0,-1,0)=(2,\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，$\overrightarrow{DC}=(3,0,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,-2,2)$

设平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，满足 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=0\\ -2y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=z\end{cases}$

取 $y=z=1$，法向量为 $\vec{m}=(0,1,1)$，$\cos<\overrightarrow{AE},\vec{m}>=\frac{2\times0+\frac{1}{3}\times1+\frac{2}{3}\times1}{\sqrt{2^2+(\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2}\cdot\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{82}}$

所以直线 AE 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{3}{82}\sqrt{82}$. ……4 分

（2）设 $PO=t$，$P(0,0,t)$，$\overrightarrow{DC}=(3,0,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,-2,t)$

设平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，满足 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=0\\ -2y+tz=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ 2y=tz\end{cases}$

取 $z=2$，法向量为 $\vec{n}=(0,t,2)$，

$\overrightarrow{BC}=(0,3,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-3,1,t)$

设平面 PCB 的一个法向量为 $\vec{s}=(x,y,z)$，满足 $\begin{cases}\vec{s}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{s}\cdot\overrightarrow{BP}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3y=0\\ -3x+y+tz=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ 3x=tz\end{cases}$

取 z=3，法向量为 $\vec{s}=(t,0,3)$，

由题意 $\cos<\vec{n},\vec{s}>=\dfrac{0\times t+t\times 0+2\times 3}{\sqrt{t^2+2^2}\cdot\sqrt{t^2+3^2}}=\sqrt{1-\dfrac{7}{25}}\Rightarrow t^4+13t^2+36=50$

整理得 $(t^2+14)(t^2-1)=0\Rightarrow t^2=1\Rightarrow t=\pm 1$，即 PO=1. ……10 分

23. 解：(1) 在 $1,2,3,4,5,6$ 中每次取 3 个数，则

最小数为 1 的有 C_5^2 个

最小数为 2 的有 C_4^2 个

最小数为 3 的有 C_3^2 个

最小数为 4 的有 C_2^2 个

$\therefore F(6,3)=\dfrac{1\cdot C_5^2+2\cdot C_4^2+3\cdot C_3^2+4\cdot C_2^2}{C_6^3}=\dfrac{7}{4}$ …………… 3 分

(2) 集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的所有 r 元子集有 C_n^r 个时，

其中最小数为 k 的子集有 C_{n-k}^{r-1} 个 $(k=1,2,\cdots,n-r+1)$，

所以有 $C_{n-1}^{r-1}+C_{n-2}^{r-1}+\cdots+C_{r-1}^{r-1}=C_n^r$ ⊗

这些子集中最小的之和为 $S=C_{n-1}^{r-1}+2C_{n-2}^{r-1}+\cdots+(n-r+1)C_{r-1}^{r-1}$

利用 ⊗ 式可得 $S=C_n^r+C_{n-1}^r+\cdots+C_r^r=C_{n+1}^{r+1}$

于是 $F(n,r)=\dfrac{S}{C_n^r}=\dfrac{C_{n+1}^{r+1}}{C_n^r}=\dfrac{n+1}{r+1}$ …………… 10 分