

2023 北京清华附中高二 3 月月考

数 学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 \leq 9\}$, $B = \{x | x > -2\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{0, 1, 2, 3\}$ B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ D. $\{x | -2 < x \leq 3\}$
2. 已知复数 $z = ai + \frac{2}{1-i}$, 其所对应的点在第四象限, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, 1)$ B. $(1, +\infty)$
 C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)$
3. 要得到函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y = \sin 2x$ 的图象 ()
 A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
 C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度 D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
4. 对任意向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$, 下列关系式中不恒成立的是 ()
 A. $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$ B. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$
 C. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ D. $|\vec{a} - \vec{b}| \leq ||\vec{a}| - |\vec{b}||$
5. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2$, $A = \frac{\pi}{6}$, 则“ $B = \frac{\pi}{3}$ ”是“ $b = 2\sqrt{3}$ ”的 ()
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 若直线 $y = 2x$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 无公共点, 则双曲线 C 的离心率可能是 ()
 A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 1 C. 2 D. $2\sqrt{3}$
7. “苏州码子”发源于苏州, 在明清至民国时期, 作为一种民间的数字符号曾经流行一时, 广泛应用于各种商业场合.110 多年前, 詹天佑主持修建京张铁路, 首次将“苏州码子”刻于里程碑上.“苏州码子”计数方式如下: $\text{┃} 1$ 、 $\text{┃} 2$ 、 $\text{┃} 3$ 、 $\times 4$ 、 $\text{⋈} 5$ 、 $\text{┃} 6$ 、 $\text{┃} 7$ 、 $\text{≡} 8$ 、 $\text{ㄅ} 9$ 、 $\bigcirc 0$. 为了防止混淆, 有时要将“┃”“┃”“┃”横过来写. 已知某铁路的里程碑所刻数字代表距离始发车站的里程, 每隔 2 公里摆放一个里程碑, 若在 A 点处里程碑上刻着“┃ $\times$ ”, 在 B 点处里程碑刻着“ㄅ┃”, 则从 A 点到 B 点里程碑的个数应为 ()

A. 29

B. 30

C. 58

D. 59

8. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $a_1 = 8$, $a_4 = -1$, 则数列 $\{S_n\}$ ()

A. 有最大项, 有最小项

B. 有最大项, 无最小项

C. 无最大项, 有最小项

D. 无最大项, 无最小项

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(1, 1)$, $B(2, 1)$, $C(2, 2)$, P 是圆 $M: x^2 + (y-4)^2 = 2$ 上一点, Q 是 $\triangle ABC$ 边上一点, 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 的最大值是 ()

A. $8+2\sqrt{2}$

B. 12

C. $8+4\sqrt{2}$

D. 16

10. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 是该正方体棱上一点. 若满足 $|PB| + |PC_1| = m$ ($m > 0$) 的点的个数为 4, 则 m 的取值范围是 ()

A. $[2\sqrt{2}, 4]$ B. $[4, 2+2\sqrt{3}]$ C. $[4, 4\sqrt{2}]$ D. $[2+2\sqrt{3}, 4\sqrt{2}]$

二、填空题共 5 道小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 已知向量 $\vec{a} = (m, 1)$, $\vec{b} = (3, m)$, 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反, 则 m 等于_____.

12. 过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点作与抛物线对称轴垂直的直线交抛物线于 A 、 B 两点, 且 $|AB| = 4$, 则 $p =$ _____.

13. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 且有 $1 - 2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha$, 则 $\cos \alpha =$ _____.

14. 如图, 圆锥的侧面展开图恰好是一个半圆, 则该圆锥的母线与底面所成的角的大小是_____.



15. 对于定义域为 R 的函数 $y = g(x)$, 设关于 x 的方程 $g(x) = t$, 对任意的实数 t 总有有限个根, 记根的个数为 $f_g(t)$, 给出下列命题:

① 存在函数 $y = g(x)$ 满足: $f_g(t) > 0$, 且 $y = g(x)$ 有最小值;

② 设 $h(x) = |g(x)|$, 若 $f_h(t) = f_g(t)$, 则 $g(x) \geq 0$;

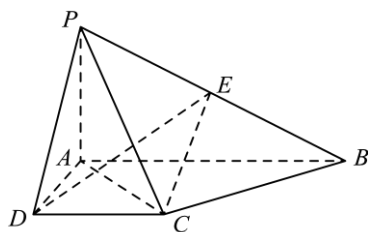
③ 若 $f_g(t) = 1$, 则 $y = g(x)$ 为单调函数;

④ 设 $h(x) = g(x+a)$ ($a \in R$), 则 $f_g(t) = f_h(t)$.

其中所有正确命题的序号为_____.

三、解答题共 6 道小题，共 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp AD$ ， $AB=4$ ， $PA=AD=CD=2$ ，点 E 为 PB 的中点.



(1) 求证：平面 $PBC \perp$ 平面 PAC ；

(2) 求二面角 $E-CD-A$ 的余弦值.

17. 已知函数 $f(x) = 4\sin \frac{\omega x}{2} \cos(\frac{\omega x}{2} - \frac{\pi}{3}) + m$ ($\omega > 0$). 在下列条件①、条件②、条件③这三个条件中，选择可以确定 ω 和 m 值的两个条件作为已知.

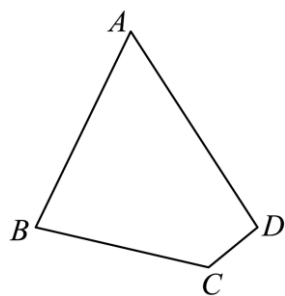
(1) 求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值；

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上是增函数，求实数 a 的最大值.

条件①： $f(x)$ 最小正周期为 π ；条件②： $f(x)$ 最大值与最小值之和为 0；条件③： $f(0) = 2$.

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分.

18. 某公共场所计划用固定高度的板材将一块如图所示的四边形区域 $ABCD$ 沿边界围成一个封闭的留观区. 经测量，边界 AB 与 AD 的长度都是 20 米， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $\angle BCD = 120^\circ$.



(1) 若 $\angle ADC = 105^\circ$ ，求 BC 的长 (结果精确到米)；

(2) 求围成该区域至多需要多少米长度的板材 (不计损耗，结果精确到米) .

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，其长轴的两个端点分别为 $A(-3, 0)$ ， $B(3, 0)$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 点 P 为椭圆上除 A ， B 外的任意一点，直线 AP 交直线 $x=4$ 于点 E ，点 O 为坐标原点，过点 O 且与直线 BE 垂直的直线记为 l ，直线 BP 交 y 轴于点 M ，交直线 l 于点 N ，求 $\triangle BMO$ 与 $\triangle NMO$ 的面积之比.

20. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x+a)$ 的最小值为 0, 其中 $a > 0$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若对任意的 $x \in [0, +\infty)$, 有 $f(x) \leq kx^2$ 成立, 求实数 k 的最小值;

21. 已知数列 $A: x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. 设集合 $A_k = \{i \mid x_i = k, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), 如果对任意的整数 k ($0 \leq k \leq n$) 都有集合 A_k 的元素个数等于 x_k , 则称 A 为“完美数列”

(1) 分别判断数列 $A_1: 2, 0, 2, 0$ 和 $A_2: 1, 2, 0, 1$ 是否为“完美数列”, 直接写出结论;

(2) 若 A 是“完美数列”, 求证: $x_0 + 2x_1 + 3x_2 + \dots + (n+1)x_n = 2n+2$;

(3) 若 A 是“完美数列”, 且 $x_0 = 2023$, 求出所有满足条件的数列 A .

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】C

【解析】

【分析】先求出集合 A 中的元素，再根据集合的交集运算，求得答案.

【详解】集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 \leq 9\} = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ，而 $B = \{x | x > -2\}$ ，

故 $A \cap B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ，

故选：C

2. 【答案】D

【解析】

【分析】先对复数 z 化简，再由其对应的点在第四象限，列不等式可求出 a 的取值范围

【详解】解：因为 $z = ai + \frac{2}{1-i} = ai + \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = ai + 1 + i = 1 + (a+1)i$ ，

所以复数 z 在复平面对应的点为 $(1, a+1)$ ，

因为复数 z 在复平面对应的点在第四象限，

所以 $a+1 < 0$ ，得 $a < -1$ ，

故选：D

3. 【答案】B

【解析】

【分析】根据三角函数平移变换原则直接判断即可.

【详解】 $\because y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$ ，

$\therefore$ 只需将 $y = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度即可.

故选：B.

4. 【答案】D

【解析】

【分析】

根据向量的平方即为模的平方. 即可判断 A；运用平方差公式和向量数量积的性质，即可判断 B；运用向量数量积的定义，即可判断 C；运用向量模的性质，即可判断 D.

【详解】A，由模的平方等于向量的平方知 $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$ 恒成立，故正确；

B，由平方差公式知 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$ 恒成立，故正确；

C, $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| |\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ 恒成立, 故正确;

D, 当 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线时, 由三角形中两边之差小于第三边知, $|\vec{a} - \vec{b}| > ||\vec{a}| - |\vec{b}||$, 故 $|\vec{a} - \vec{b}| \leq ||\vec{a}| - |\vec{b}||$ 不恒成立, 故 D 错误.

故选: D

5. 【答案】A

【解析】

【分析】由充分条件和必要条件的定义进行判断即可

【详解】解: 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2$, $A = \frac{\pi}{6}$,

当 $B = \frac{\pi}{3}$ 时, 由正弦定理可得

$$\frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{b}{\sin \frac{\pi}{3}}, \quad b = \sin \frac{\pi}{3} \times \frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3},$$

当 $b = 2\sqrt{3}$ 时, 由正弦定理可得 $\frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin B}$, $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 因为 $B \in (0, \frac{5\pi}{6})$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 或

$$B = \frac{2\pi}{3},$$

所以“ $B = \frac{\pi}{3}$ ”是“ $b = 2\sqrt{3}$ ”的充分而不必要条件,

故选: A

6. 【答案】C

【解析】

【分析】由直线与双曲线的位置关系求得 a, b 的不等关系, 由此变形可得离心率范围, 得到正确选项.

【详解】双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 直线 $y = 2x$ 与双曲线无公共点,

则 $\frac{b}{a} \leq 2$, $4a^2 \geq b^2 = c^2 - a^2$, $\frac{c^2}{a^2} \leq 5$, 即 $e = \frac{c}{a} \leq \sqrt{5}$, 所以 $e \in (1, \sqrt{5})$.

故选: C.

7. 【答案】B

【解析】

【分析】里程碑上刻着数字依次成等差数列, 求出 A, B 两处刻的数字, 按等差数列的公式求得项数即可.

【详解】根据题意 A 点处里程碑上刻着数字 34, B 点处里程碑刻着数字 92, 里程碑刻着数字成等差数列,

公差为 2, 因此里程碑个数为 $\frac{92-34}{2} + 1 = 30$.

故选：B.

8. 【答案】A

【解析】

【分析】求出公比 q ，求出 S_n ，然后分析 $\{S_n\}$ 的性质.

【详解】设公比为 q ，则 $q^3 = \frac{a_4}{a_1} = -\frac{1}{8}$ ， $q = -\frac{1}{2}$ ，

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{8\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{16}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right],$$

当 n 为偶数时， $S_n = \frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ ，是增函数，即 $S_2 < S_4 < S_6 < \dots < \frac{16}{3}$ ，

当 n 为奇数时， $S_n = \frac{16}{3}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ ，是减函数，即 $S_1 > S_3 > S_5 > \dots > \frac{16}{3}$ ，

所以 $\{S_n\}$ 有最大项为 S_1 ，最小项为 S_2 。

故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题考查等比数列的前 n 项和形成的数列的最值问题，解题关键是求得通项公式 S_n

后按奇偶数分类，得出奇数递减，偶数项递增，但所有奇数项比 $\frac{16}{3}$ 大，所有偶数项比 $\frac{16}{3}$ 小，这样易确定最值。

9. 【答案】B

【解析】

【分析】设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ，则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1x_2 + y_1y_2$ ，因为 $x_2 \in [1, 2], y_2 \in [1, 2]$ ，所以当 $x_2 = 2, y_2 = 2$ ，即 Q 点与 C 点重合时， $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1x_2 + y_1y_2$ 有最大值 $2(x_1 + y_1)$ ，问题转化为 $P(x_1, y_1)$ 在圆 $M: x^2 + (y-4)^2 = 2$ 上，求 $x_1 + y_1$ 的最大值，

【详解】解：设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ，则 $\overrightarrow{OP} = (x_1, y_1), \overrightarrow{OQ} = (x_2, y_2)$ ，
所以 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1x_2 + y_1y_2$ ，

因为 $x_2 \in [1, 2], y_2 \in [1, 2]$ ，

所以当 $x_2 = 2, y_2 = 2$ ，即 Q 点与 C 点重合时， $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1x_2 + y_1y_2$ 有最大值 $2(x_1 + y_1)$ ，

所以问题转化为 $P(x_1, y_1)$ 在圆 $M: x^2 + (y-4)^2 = 2$ 上，求 $x_1 + y_1$ 的最大值，

因为点 $P(x, y)$ 在圆 M 上，设点 $P(x, y)$ 所在的直线 l 为 $x + y = t$ ，

因为直线 l 与圆 M 有公共点，

所以圆心到直线的距离不大于半径，即 $\frac{|0+4-t|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}$ ，

所以 $|t-4| \leq 2$ ，解得 $2 \leq t \leq 6$ ，即 $2 \leq x_1 + y_1 \leq 6$ ，

所以 $4 \leq 2(x_1 + y_1) \leq 12$ ，

所以 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 的最大值是 12，

故选：B

【点睛】关键点点睛：此题考查向量数量积的运算律，考查直线与圆的位置关系，解题的关键是当 $x_2 = 2, y_2 = 2$ ，即 Q 点与 C 点重合时， $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ 有最大值 $2(x_1 + y_1)$ ，问题转化为 $P(x_1, y_1)$ 在圆 $M: x^2 + (y-4)^2 = 2$ 上，求 $x_1 + y_1$ 的最大值，然后利用直线与圆的位置关系求解即可，考查数形结合的思想，属于中档题

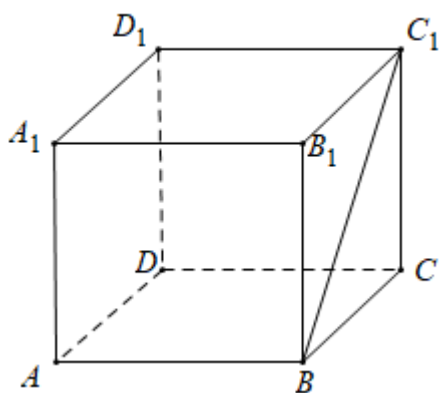
10. 【答案】B

【解析】

【分析】

先求得正方体的 8 个顶点到 B, C_1 两点的距离之和，进而得到在棱上的运动时 m 的取值范围，然后再根据点的个数为 4 取交集即可.

【详解】如图所示：



因为顶点 C, B_1 到 B, C_1 两点的距离之和分别为

$$|CB| + |CC_1| = 4, |B_1B| + |B_1C_1| = 4, |BC_1| = 2\sqrt{2}$$

所以当点 P 分别在棱 BB_1, BC, CC_1, B_1C_1 上运动时， m 的取值范围是 $[2\sqrt{2}, 4]$ ；

因为顶点 A, D_1 ，到 B, C_1 两点的距离之和分别为：

$$|AB| + |AC_1| = 2 + 2\sqrt{3}, |D_1B| + |D_1C_1| = 2 + 2\sqrt{3}, |BC_1| = 2\sqrt{2},$$

所以当点 P 分别在棱 C_1D_1, AB 上运动时， m 的取值范围是 $[2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{3}]$ ；

因为顶点 A_1, B_1, C, D 到 B, C_1 两点的距离之和分别为：

$$|A_1B| + |A_1C_1| = 4\sqrt{2}, |B_1B| + |B_1C_1| = 4, |CB| + |CC_1| = 4, |DB| + |DC_1| = 4\sqrt{2},$$

所以当点 P 分别在棱 A_1B_1, CD 上运动时, m 的取值范围是 $[4, 4\sqrt{2}]$;

因为顶点 A, A_1, D, D_1 到 B, C_1 两点的距离之和分别为:

$$|A_1B| + |A_1C_1| = 4\sqrt{2}, \quad |DB| + |DC_1| = 4\sqrt{2}, \quad |AB| + |AC_1| = 2 + 2\sqrt{3}, \quad |D_1B| + |D_1C_1| = 2 + 2\sqrt{3}$$

所以当点 P 分别在棱 A_1D_1, DD_1, AD, AA_1 上运动时, m 的取值范围是 $[2 + 2\sqrt{3}, 4\sqrt{2}]$.

由几何直观可知, 点 P 在正方体的每一条棱上运动时, 它所在的位置与 m 的值是一一对应的,

所以当 $|PB| + |PC_1| = m \quad (m > 0)$ 的点 P 的个数为 4 时, 则 m 的取值范围是 $[4, 2 + 2\sqrt{3}]$,

故选: B

二、填空题共 5 道小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 【答案】 $-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】由题意可设 $\vec{a} = \lambda \vec{b} (\lambda < 0)$, 从而可得 $\begin{cases} m = 3\lambda \\ 1 = \lambda m \end{cases}$, 进而可求出 m 的值

【详解】解: 由于 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反, 所以设 $\vec{a} = \lambda \vec{b} (\lambda < 0)$,

所以 $(m, 1) = \lambda(3, m)$, 则 $\begin{cases} m = 3\lambda \\ 1 = \lambda m \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ m = -\sqrt{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ m = \sqrt{3} \end{cases}$ (舍去),

所以 $m = -\sqrt{3}$,

故答案为: $-\sqrt{3}$

12. 【答案】 2

【解析】

【分析】

根据抛物线的焦半径公式表示出 $|AB|$, 再根据 $|AB| = 4$ 可直接求解出 p 的值.

【详解】设抛物线的焦点坐标为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 由条件可知 $x_A = x_B = x_F = \frac{p}{2}$,

所以 $|AB| = |AF| + |BF| = x_A + \frac{p}{2} + x_B + \frac{p}{2} = 2p$, 又 $|AB| = 4$, 所以 $p = 2$,

故答案为: 2.

【点睛】结论点睛: 抛物线的焦半径公式如下 (p 为焦准距)

(1) 焦点 F 在 x 轴正半轴, 抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 则 $|PF| = x_0 + \frac{p}{2}$;

(2) 焦点 F 在 x 轴负半轴, 抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 则 $|PF| = -x_0 + \frac{p}{2}$;

(3) 焦点 F 在 y 轴正半轴, 抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 则 $|PF| = y_0 + \frac{p}{2}$;

(4) 焦点 F 在 y 轴负半轴, 抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 则 $|PF| = -y_0 + \frac{p}{2}$.

13. 【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】

运用正弦、余弦的二倍角公式化简已知等式, 结合同角的三角函数关系式进行求解即可.

【详解】 $1 - 2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha \Rightarrow 1 - 4\sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$,

因为 $\alpha \in (0, \pi)$, 所以 $\sin \alpha \neq 0$,

因此由 $\sin^2 \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha = 2\cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 2 \Rightarrow \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$,

而 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (1), 把 $\sin \alpha = 2\cos \alpha$ 代入 (1) 得:

$4\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$, 而 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$,

因此 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{5}}{5}$

14. 【答案】 60°

【解析】

【详解】 试题分析: 根据圆锥的侧面展开扇形的周长等于圆锥的底面周长, 分别设出圆锥的母线长和圆锥的底面半径, 利用上述关系得到关系式求出两者的比值即可, 然后得到其正弦值, 求得夹角.

设圆锥的母线长为 R , 底面半径为 r , $\because$ 圆锥的侧面展开图是一个半圆, $\therefore$ 圆锥的侧面展开扇形的弧长为: πR , $\because$ 圆锥的侧面展开扇形的周长等于圆锥的底面周长, $\therefore \pi R = 2\pi r$, $\therefore R:r = 2:1$, 所以母线与底面夹角为 60° .

考点: 圆锥的计算.

15. 【答案】 ②④

【解析】

【分析】 根据方程 $g(x) = t$ 实数根的个数分析函数性质. ①用反证法判断, ②利用 $h(x) = t$ 和 $g(x) = t$ 的解

的个数相同, 可判断, ③举一反三, 设 $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 可判断, ④利用图象平移可说明判断.

【详解】 ①若 $g(x)$ 有最小值, 则存在实数 m , 使得 $g(x) \geq m$, 则当 $t < m$ 时, $g(x) = t$ 无实数根, 即

$f_g(t) = 0$ 与 $f_g(t) > 0$ 矛盾, ①错;

② $h(x) = |g(x)| \geq 0$, 故当 $t < 0$ 时, $h(x) = t$ 无实数根, $f_h(t) = 0$, 所以 $f_g(t) = 0$, 所以 $g(x) = t$ 无实数根, 则 $g(x) \geq 0$. ②正确;

③ 设 $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 易知对任意的实数 t , $g(x) = t$ 有且只有一个根, 所以 $f_g(t) = 1$, 但 $g(x)$ 不是单调函数, ③错误;

④ $h(x) = g(x + a)$, $h(x)$ 为 $g(x)$ 向左平移 a 个单位所得图象对应的函数 ($a < 0$ 时, 表示向右平移 $|a|$ 个单位), 因此 $h(x) = t$ 和 $g(x) = t$ 的解的个数相等, 所以 $f_h(t) = f_g(t)$, ④正确.

故答案为: ②④.

【点睛】关键点点睛: 本题考查函数新定义问题, 解题关键是理解新定义 $f_g(t)$ 的意义, 根据新定义问题 $f_g(t)$ 转化为方程 $g(x) = t$ 解的个数. 这样我们或举例说明, 或通过 $g(x) = t$ 的解的个数确定函数的性质, 完成求解.

三、解答题共 6 道小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 【答案】(1) 证明见解析; (2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】

【分析】(1) 取 AB 的中点 F , 连接 CF , 则结合已知条件可证得四边形 $AFCD$ 是正方形, 可得 $AB \perp CF$, $AC = BC = 2\sqrt{2}$, 再由勾股定理的逆定理可得 $BC \perp AC$, 而由已知可得 $PA \perp BC$, 从而得 $BC \perp$ 平面 PAC , 从而由面面垂直的判定定理可证得结论;

(2) 由已知可得 PA, AD, AB 两两垂直, 所以建立如图所示空间直角坐标系 $A-xyz$, 然后利用空间向量求解二面角 $E-CD-A$ 的余弦值

【详解】解: (1) 取 AB 的中点 F , 连接 CF , 所以 $AF = CD$, 又因为 $AF \parallel CD$, 所以四边形 $AFCD$ 是平行四边形.

因为 $AB \perp AD$, $AD = CD$, 所以四边形 $AFCD$ 是正方形,

则 $AB \perp CF$, $CF = AD = 2$, 所以 $AC = BC = 2\sqrt{2}$,

得到 $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

所以 $BC \perp AC$.

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp BC$,

因为 $PA \cap AC = A$,

所以 $BC \perp$ 平面 PAC .

因为 $BC \subset$ 平面 PBC ,

平面 $PBC \perp$ 平面 PAC .

(2). 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp AD$, $PA \perp AB$, 则 PA, AD, AB 两两垂直,

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

则 $A(0,0,0)$, $P(0,0,2)$, $B(0,4,0)$, $C(2,2,0)$, $D(2,0,0)$, $E(0,2,1)$,

所以 $\overrightarrow{DC} = (0,2,0)$, $\overrightarrow{CE} = (-2,0,1)$.

设平面 CDE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} 2y = 0, \\ -2x + z = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y = 0, \\ z = 2x, \end{cases}$$

令 $x=1$, 则 $z=2$,

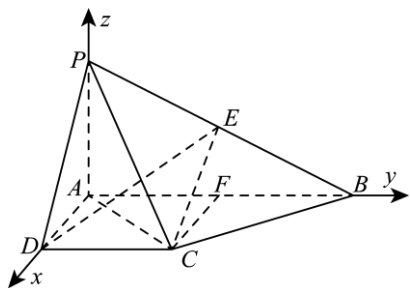
所以平面 CDE 的法向量为 $\vec{n} = (1, 0, 2)$,

又因为平面 ACD 的法向量 $\vec{m} = (0, 0, 1)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

由已知, 二面角 $E-CD-A$ 为锐角,

所以二面角 $E-CD-A$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



【点睛】关键点点睛: 此题考查面面垂直的判定, 考查二面角的求法, 解题的关键是建立正确的空间直角坐标系, 利用空间向量求解即可, 考查推理能力和计算能力, 属于中档题

17. 【答案】答案见解析

【解析】

【分析】利用三角函数恒等变换公式把函数 $f(x)$ 化简成 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} + m$,

选择①②, 利用①、②分别求出 ω 和 m , 进而求 $f(\frac{\pi}{3})$ 和 $f(x)$ 的递增区间即可回答问题(1)(2);

选择①③, 利用①、③分别求出 ω 和 m , 进而求 $f(\frac{\pi}{3})$ 和 $f(x)$ 的递增区间即可回答问题(1)(2);

选择②③，利用②、③都只能求出 m 不能求出 ω 。

【详解】 $f(x) = 4\sin \frac{\omega x}{2} \cdot (\frac{1}{2}\cos \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \frac{\omega x}{2}) + m = 2\sin \frac{\omega x}{2} \cos \frac{\omega x}{2} + 2\sqrt{3}\sin^2 \frac{\omega x}{2} + m$
 $= \sin \omega x + \sqrt{3}(1 - \cos \omega x) + m = \sin \omega x - \sqrt{3}\cos \omega x + \sqrt{3} + m = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} + m.$

选择条件①②：

(1)由条件①得， $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi$ ，又因为 $\omega > 0$ ，所以 $\omega = 2$ ，

由②知， $(2 + \sqrt{3} + m) + (-2 + \sqrt{3} + m) = 0$ ，所以 $m = -\sqrt{3}$ ，

则 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ ，所以 $f(\frac{\pi}{3}) = 2\sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = 2\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ；

(2)令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，所以 $-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi] (k \in \mathbb{Z})$ ，

因为函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上单调递增，且 $0 \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ ，此时 $k = 0$ ，

所以 $a \leq \frac{5\pi}{12}$ ，故实数 a 的最大值为 $\frac{5\pi}{12}$ 。

选择条件①③：

(1)由条件①得， $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi$ ，又因为 $\omega > 0$ ，所以 $\omega = 2$ ，

由③知， $f(0) = 2\sin(-\frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} + m = 2$ ，所以 $m = 2$ ，

则 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} + 2$ ，所以 $f(\frac{\pi}{3}) = 2\sin \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} + 2 = 2\sqrt{3} + 2$ ；

(2)令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，所以 $-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi] (k \in \mathbb{Z})$ ，

因为函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上单调递增，且 $0 \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ ，此时 $k = 0$ ，

所以 $a \leq \frac{5\pi}{12}$ ，故实数 a 的最大值为 $\frac{5\pi}{12}$ 。

说明：不可以选择条件②③：

由②知， $(2 + \sqrt{3} + m) + (-2 + \sqrt{3} + m) = 0$ ，所以 $m = -\sqrt{3}$ ；

由③知， $f(0) = 2\sin(-\frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} + m = 2$ ，所以 $m = 2$ ；矛盾。

所以函数 $f(x)$ 不能同时满足条件②和③.

【点睛】涉及正余弦型函数性质(单调性、周期性、对称性、最值等)的三角函数式问题, 正确利用三角函数恒等变换公式化成 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ 的形式是解决问题的关键.

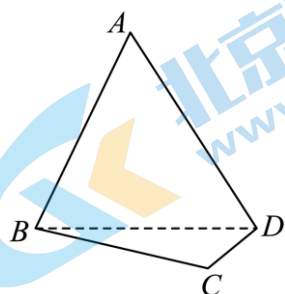
18. 【答案】(1) 16 米; (2) 63 米.

【解析】

【分析】(1) 连接 BD , 可知 $\triangle ABD$ 是等边三角形, 可得出 $BD = 20$, 求出 $\angle BDC$ 的值, 利用正弦定理可求得 BC 的长;

(2) 设 $\angle ADC = \theta$, 利用正弦定理得出 $BC = \frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$, $DC = \frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)$, 进而可得出围成该区域所需板材的长度关于 θ 的表达式, 利用正弦函数的有界性可求得结果.

【详解】(1) 连接 BD , 由题意 $\triangle ABD$ 是等边三角形, 所以 $BD = 20$,



又因为 $\angle ADC = 105^\circ$, 所以 $\angle BDC = 45^\circ$,

在 $\triangle BCD$ 中, $\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin \angle C}$, 得 $BC = \frac{BD \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{20 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20\sqrt{6}}{3} \approx 16$ (米);

(2) 设 $\angle ADC = \theta$, 则 $\angle BDC = \theta - \frac{\pi}{3}$, $\angle CBD = \frac{2\pi}{3} - \theta$,

在 $\triangle BCD$ 中, $\frac{CD}{\sin \angle CBD} = \frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin \angle C}$,

所以 $BC = \frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$, $DC = \frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)$,

所需板材的长度为 $f(\theta) = 40 + \frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)$
 $= 40 + \frac{40\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right) = 40 + \frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\theta$.

答: 当 $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$ 时, 所需板材最长为 $40 + \frac{40\sqrt{3}}{3} \approx 63$ (米).

【点睛】方法点睛: 在解决三角形中的最值问题时, 常用两种思路:

- (1) 转化为边, 利用基本不等式求解;
 (2) 转化为角, 利用三角函数的有界性来求解.

19. 【答案】(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 4:7.

【解析】

【分析】(1) 由已知可得 a , 再由离心率求得 c , 结合隐含条件求得 b , 则椭圆方程可求;

(2) 设 $P(x_0, y_0) (y_0 \neq 0)$, 则 $\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{3} = 1$, 写出 PA 所在直线方程, 求得 E 点坐标, 得到直线 l 的方程,

再写出 PB 方程求解 N 点坐标, 把三角形的面积比转化为 B 与 N 点的横坐标的绝对值之比得答案.

【小问 1 详解】

由题意, $a=3$, 又 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\therefore c = \sqrt{6}$,

则 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$.

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$;

【小问 2 详解】

设 $P(x_0, y_0) (y_0 \neq 0)$, 则 $\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{3} = 1$.

$\therefore$ 直线 AP 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 + 3}(x + 3)$,

取 $x = 4$, 可得点 $E(4, \frac{7y_0}{x_0 + 3})$,

$\therefore$ 直线 BE 的斜率为 $\frac{\frac{7y_0}{x_0 + 3}}{4 - 3} = \frac{7y_0}{x_0 + 3}$,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = -\frac{x_0 + 3}{7y_0}x$,

又直线 PB 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 - 3}(x - 3)$,

联立直线 l 与 PB 的方程, 消去 y 得 $-\frac{x_0 + 3}{7y_0}x = \frac{y_0}{x_0 - 3}(x - 3)$,

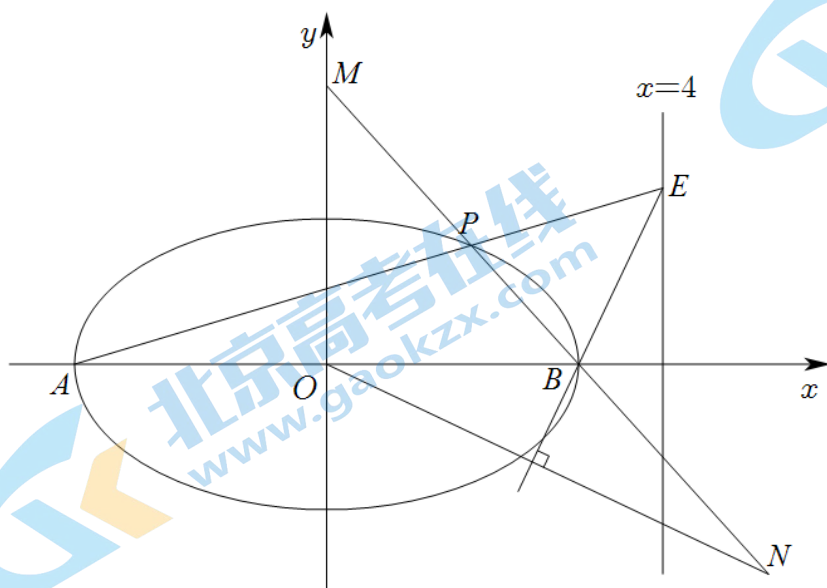
$\therefore \frac{7y_0^2 + x_0^2 - 9}{7y_0(x_0 - 3)} \cdot x = \frac{3y_0}{x_0 - 3}$, ①

$\therefore \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{3} = 1$, $\therefore x_0^2 - 9 = -3y_0^2$,

代入①解得点 N 的横坐标 $x_N = \frac{21}{4}$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle BMO}}{S_{\triangle NMO}} = \frac{\frac{1}{2}|OM| \cdot |x_B|}{\frac{1}{2}|OM| \cdot |x_N|} = \frac{|x_B|}{|x_N|} = \frac{3}{\frac{21}{4}} = \frac{4}{7}.$$

故 $\triangle BMO$ 与 $\triangle NMO$ 的面积之比为 $4:7$.



20. 【答案】(1) 1; (2) $\frac{1}{2}$.

【解析】

【分析】(1) 先对函数求导, 求出函数的单调区间, 结合题中条件即可求出结果;

(2) 先分析 $k \leq 0$ 时, 取 $x=1$, 有 $f(1)=1-\ln 2 > 0$, 故 $k \leq 0$ 不合题意; 再分析 $k > 0$ 时, 构造函数

$g(x) = f(x) - kx^2 = x - \ln(x+1) - kx^2 (x \geq 0)$, 对函数求导, 分类讨论 $0 < k < \frac{1}{2}$ 和 $k \geq \frac{1}{2}$, 即可求出结果.

【详解】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-a, +\infty)$,

由 $f(x) = x - \ln(x+a)$, 得 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+a} = \frac{x+a-1}{x+a}$;

由 $f'(x) > 0$ 得 $x > 1-a$,

由 $f'(x) < 0$ 得 $-a < x < 1-a$,

故函数 $f(x)$ 在 $(-a, 1-a)$ 上单调递减, 在 $(1-a, +\infty)$ 上单调递增;

因此当 $x=1-a$ 时, $f(x)_{\min} = f(1-a) = 1-a=0$, 所有 $a=1$.

(2) 当 $k \leq 0$ 时, 取 $x=1$, 有 $f(1)=1-\ln 2 > 0$, 故 $k \leq 0$ 不合题意;

当 $k > 0$ 时, 设 $g(x) = f(x) - kx^2 = x - \ln(x+1) - kx^2 (x \geq 0)$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} - 2kx = \frac{-x(2kx+2k-1)}{x+1}, \text{ 令 } g'(x) = 0 \text{ 得 } x = 0 \text{ 或 } x = \frac{1-2k}{2k} > -1,$$

①当 $0 < k < \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1-2k}{2k} > 0$, 当 $x \in (0, \frac{1-2k}{2k})$ 时, $g'(x) > 0$, 因此函数 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1-2k}{2k})$ 上单调递

增, 因此当 $x_0 \in (0, \frac{1-2k}{2k})$ 时, $g(x_0) \geq g(0) = 0$, 即有 $f(x_0) \leq kx_0^2$ 不成立, 故 $0 < k < \frac{1}{2}$ 不满足题

意;

②当 $k \geq \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1-2k}{2k} \leq 0$, $g'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 因此 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 从而对任

意的 $x \in [0, +\infty)$, 有 $f(x) \leq kx^2$ 成立, 故 $k \geq \frac{1}{2}$ 符合题意;

综上, 实数 k 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

【点睛】本题主要考查导数的应用, 通常需要对函数求导, 用导数的方法研究函数的单调性、最值等, 属于常考题型.

21. 【答案】(1) $A_1: 2, 0, 2, 0$ 为“完美数列”; $A_2: 1, 2, 0, 1$ 不是“完美数列”

(2) 证明见解析 (3) $A: 2023, 2, 1, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0, 0$ (共 2023 个 0)

【解析】

【分析】(1) 根据“完美数列”的定义进行判断即可;

(2) 根据 A 共有 $n+1$ 个元素, 结合“完美数列”的定义可得 $x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = n+1$; 又 A 中各元素之和为 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = n+1$, 加和即可证得结论;

(3) 根据 $x_0 = 2023$ 可确定 $n \geq 2024$, 依次分析 $n = 2024, 2025, 2026$ 的情况, 结合 $x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = n+1$ 可确定 $n = 2026$ 时存在满足题意的数列; 当 $n \geq 2027$ 时, 在 $x_{2023} = 1$ 和 $x_{2023} = 2$ 的情况下, 利用 A_1 的定义可说明不合题意, 由此可得最终结论.

【小问 1 详解】

对于数列 $2, 0, 2, 0$, 则 $x_0 = 2, x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0$,

当 $k = 0$ 时, $\{i | x_i = 0, i = 0, 1, 2, 3\}$ 的元素个数为 $2 = x_0$;

当 $k = 1$ 时, $\{i | x_i = 1, i = 0, 1, 2, 3\}$ 的元素个数为 $0 = x_1$;

当 $k = 2$ 时, $\{i | x_i = 2, i = 0, 1, 2, 3\}$ 的元素个数为 $2 = x_2$;

当 $k = 3$ 时, $\{i | x_i = 3, i = 0, 1, 2, 3\}$ 的元素个数为 $0 = x_3$;

$\therefore A_1: 2, 0, 2, 0$ 为“完美数列”;

对于数列 $1, 2, 0, 1$, 则 $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$,

当 $k=0$ 时, $\{i|x_i=0, i=0,1,2,3\}$ 的元素个数为 $1=x_0$;

当 $k=1$ 时, $\{i|x_i=1, i=0,1,2,3\}$ 的元素个数为 $2=x_1$;

当 $k=2$ 时, $\{i|x_i=2, i=0,1,2,3\}$ 的元素个数为 $1 \neq x_2$;

当 $k=3$ 时, $\{i|x_i=3, i=0,1,2,3\}$ 的元素个数为 $0 \neq x_3$;

$\therefore A_2:1,2,0,1$ 不是“完美数列”.

【小问 2 详解】

若 A 是“完美数列”, 则 $A_0=\{i|x_i=0, i=0,1,2,\dots,n\}$ 的元素个数为 x_0 , $A_1=\{i|x_i=1, i=0,1,2,\dots,n\}$ 的元素个数为 x_1 , $A_2=\{i|x_i=2, i=0,1,2,\dots,n\}$ 的元素个数为 x_2 , $\dots$, $A_n=\{i|x_i=n, i=0,1,2,\dots,n\}$ 的元素个数为 x_n ,

$\therefore A:x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 共有 $n+1$ 个元素, $\therefore x_0+x_1+x_2+\dots+x_n=n+1$,

又 $x_1+2x_2+3x_3+\dots+nx_n$ 表示数列 A 各项的和,

$\therefore x_1+2x_2+3x_3+\dots+nx_n=x_0+x_1+x_2+\dots+x_n=n+1$,

$\therefore x_0+2x_1+3x_2+\dots+(n+1)x_n=(x_1+2x_2+3x_3+\dots+nx_n)+(x_0+x_1+x_2+\dots+x_n)=2(n+1)=2n+2$.

【小问 3 详解】

若 $A:x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 是“完美数列”,

当 $n \leq 2023$ 时, $A_0=\{i|x_i=0, i=0,1,2,\dots,n\}$ 的元素个数为 $x_0=2023$,

此时 A 中含有 2023 个等于 0 的项, 则 $n > 2023$, 与 $n \leq 2023$ 矛盾, 不合题意;

当 $n \geq 2024$ 时, $A_0=\{i|x_i=0, i=0,1,2,\dots,n\}$ 的元素个数为 $x_0=2023$,

此时 A 中含有 2023 个等于 0 的项,

则 $A_{2023}=\{i|x_i=2023, i=0,1,2,\dots,n\}$ 的元素个数为 $x_{2023} \geq 1$,

①当 $n=2024$ 时, $x_0+x_1+x_2+\dots+x_{2023}+x_{2024}=2025$,

$\therefore x_1+x_2+\dots+x_{2023}+x_{2024}=2$, 又 $x_{2023} \neq 0$, A 中含有 2023 个等于 0 的项,

$\therefore x_1=x_2=\dots=x_{2022}=x_{2024}=0$, $x_{2023}=2$,

此时 $A_2=\{i|x_i=2, i=0,1,2,\dots,2024\}$ 的元素个数为 $1 \neq x_2$, 不合题意;

②当 $n=2025$ 时, $x_0+x_1+x_2+\dots+x_{2023}+x_{2024}+x_{2025}=2026$,

$\therefore x_1+x_2+\dots+x_{2023}+x_{2024}+x_{2025}=3$, 又 A 中含有 2023 个等于 0 的项,

则有 $x_p+x_{2023}=3$ 且 $x_p \neq 0$,

若 $x_{2023} = 1$, 则 $x_p = 2$, 此时 $A_1 = \{i | x_i = 1, i = 0, 1, 2, \dots, 2025\}$ 的元素个数为 $1 \neq x_1$, 不合题意;

若 $x_{2023} = 2$, 则 $x_p = 1$,

若 $p \neq 2$, 此时 $A_2 = \{i | x_i = 2, i = 0, 1, 2, \dots, 2025\}$ 的元素个数 $1 \neq x_2$, 不合题意;

若 $p = 2$, 此时 $A_1 = \{i | x_i = 1, i = 0, 1, 2, \dots, 2025\}$ 的元素个数 $1 \neq x_1$, 不合题意;

③当 $n = 2026$ 时, $x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{2023} + x_{2024} + x_{2025} + x_{2026} = 2027$,

$\therefore x_1 + x_2 + \dots + x_{2023} + x_{2024} + x_{2025} + x_{2026} = 4$, 又 A 中含有 2023 个等于 0 的项,

则有 $x_p + x_q + x_{2023} = 4$ 不为 0, 且 $x_p \neq 0$, $x_q \neq 0$;

若 $x_{2023} = 1$, 则 $x_p + x_q = 3$, 可令 $x_p = 1$, $x_q = 2$,

此时 $A_1 = \{i | x_i = 1, i = 0, 1, 2, \dots, 2026\}$ 的元素个数为 2, $A_2 = \{i | x_i = 2, i = 0, 1, 2, \dots, 2026\}$ 的元素个数为

1, 则 $x_1 = 2$, $x_2 = 1$,

即 A: 2023, 2, 1, 0, 0, 0, $\dots$, 0, 1, 0, 0, 0, 0 (共 2023 个 0) 满足题意;

若 $x_{2023} = 2$, 则 $x_p + x_q = 2$, 则 $x_p = x_q = 1$,

此时 $A_1 = \{i | x_i = 1, i = 0, 1, 2, \dots, 2026\}$ 的元素个数为 $2 \neq x_1$, 不合题意;

④当 $n \geq 2027$ 时, $x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{2023} + x_{2024} + \dots + x_n = n + 1$,

$\therefore x_1 + x_2 + \dots + x_{2023} + x_{2024} + \dots + x_n = n - 2022$, 又 A 中含有 2023 个等于 0 的项,

则有 $x_p + x_q + \dots + x_r + x_{2023} = n - 2022$, 且 $x_p, x_q, \dots, x_r$ 均不为 0,

若 $x_{2023} = 1$, 则存在 $x_m = 2$, 其余各项均为 1,

此时 $A_1 = \{i | x_i = 1, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ 的元素个数为 $n - 2024 \neq x_1$, 不合题意;

若 $x_{2023} = 2$, 则 $x_p = x_q = \dots = x_r$,

此时 $A_1 = \{i | x_i = 1, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ 的元素个数为 $n - 2024 \neq x_1$, 不合题意;

综上所述: A: 2023, 2, 1, 0, 0, 0, $\dots$, 0, 1, 0, 0, 0, 0 (共 2023 个 0).

【点睛】关键点点睛: 本题考查数列中的新定义问题的求解, 本题解题关键是能够充分理解“完美数列”的定义, 结合“完美数列”中各项之和来分析确定数列中的各项所有可能的结果, 从而得到符合题意的“完美数列”.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯