

2023 年汕头市普通高考第二次模拟考试试题参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
B	D	C	A	C	A	C	B

二、多选题

9	10	11	12
ABD	ABD	ACD	BD

三、填空题

13. $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$ 或 $(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$, 两个答案均可得分

14. 2 15. 0.4262 16. 4

四、解答题

17. (1) 由题意,
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}} = \frac{115.10 - 9 \cdot 2.57 \cdot 6.20}{29.46} = \frac{-28.306}{29.46} \approx -0.96$$

$\therefore r = -0.96 < 0, \therefore |r| = 0.96 > 0.75$, \therefore 行驶里程与轮胎凹槽深度成负相关, 且相关性较强。

(2) 由图像可知, 车胎凹槽深度与对数回归预报值残差、偏离更小, 拟合度更高, 线性回归预报值偏差较大。

由题 (1) 得线性回归模型 $y = 9.158 - 1.149x$ 的相关系数 $r = -0.96$, 决定系数 $R_1^2 = r^2 = (0.96)^2 \approx 0.922$

由题意, 对数回归模型 $y = 10.11 - 3.75 \ln(x+1)$ 的决定系数 $R^2 = 0.998$, $\therefore 0.998 > 0.922$, \therefore 对数回归

模型的拟合度更高。

18. (1) $\because f(x) = \frac{\tan x \cdot \tan 2x}{\tan 2x - \tan x} + \sqrt{3}(\sin^2 x - \cos^2 x)$, \therefore 定义域为

$$\begin{cases} \text{分母不为0, 有 } \tan 2x - \tan x \neq 0, \text{ 解得 } x \in R \\ \text{对于 } \tan x, \text{ 有 } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \text{对于 } \tan 2x, \text{ 有 } 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ 即 } x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, \text{ 综上, 解得 } x \neq \frac{k\pi}{4}$$

(2) $f(x) = \frac{\tan x \cdot \tan 2x}{\tan 2x - \tan x} + \sqrt{3}(\sin^2 x - \cos^2 x)$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin x}{\cos x}} - \sqrt{3}(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= \frac{\cos 2x \cdot \cos x}{\cos 2x \cos x - \sin x \cos 2x} - \sqrt{3} \cos 2x$$

上下同时乘以 $\cos x \cdot \cos 2x$, 原式

$$= \frac{\sin x \cdot \cos x - \sin 2x}{\cos x \sin 2x - \sin x \cos 2x} - \sqrt{3} \cos 2x$$

$$= \frac{\sin x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x}{\cos x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x - \sin x \cos 2x} - \sqrt{3} \cos 2x$$

上下同时 $\div \sin x$, 原式

$$= \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos x \cdot 2 \cos x - \cos 2x} - \sqrt{3} \cos 2x$$

$$= \frac{\sin 2x \cdot \cos 2x}{2 \cos^2 x - \cos 2x} - \sqrt{3} \cos 2x$$

$$= \frac{\sin 2x}{2 \cos^2 x - (2 \cos^2 x - 1)} - \sqrt{3} \cos 2x$$

$$= \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$$

$$= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} \cos 2x \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} \sin 2x - \sin \frac{\pi}{3} \cos 2x \right)$$

$$= 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \left(x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in Z \right)$$

$$\therefore x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right), \therefore \text{ 设 } t = 2x - \frac{\pi}{3}, \text{ 则 } t \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \right)$$

由三角函数图像的性质可得 $f(t) = \sin t$ 在 $t \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$ 单调递增, 在 $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right)$ 单调递减;

由 $2x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$, 解得 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12} \right)$, 由 $2x - \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right)$, 解得 $x \in \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2} \right)$; 即

$f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12})$, 单调递减区间为 $(\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2})$

19. (1) 由题意, P 、 Q 分别为 B_1C_1 和 C_1D_1 的中点时, 有 $l \perp CE$, 证明过程如下:

连接 B_1D_1 , 取 B_1C_1 和 C_1D_1 中点分别为 P 、 Q , 连接 PQ , $\because A_1E = 3EC_1$, $\therefore PQ$ 一定过经过点 E , $\therefore PQ$ 即为所求作的 l .

$\because P$ 、 Q 分别为 B_1C_1 和 C_1D_1 的中点, $\therefore P$ 、 Q 为 $\triangle B_1C_1D_1$ 的中位线

$\therefore PQ \parallel B_1D_1$, 且 PQ 过经过点 E

\because 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形

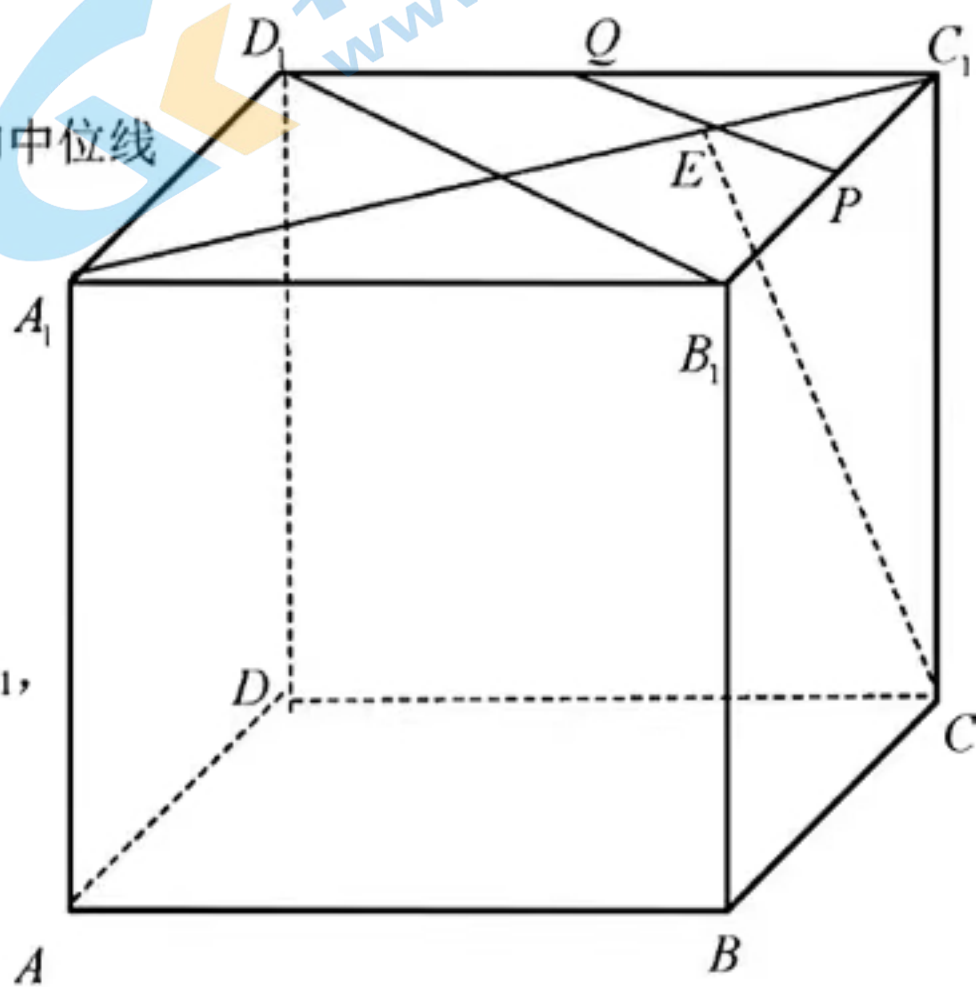
$\therefore B_1D_1 \perp A_1C_1$, $\because PQ \parallel B_1D_1$, $\therefore PQ \perp A_1C_1$

又 \because 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的侧棱 CC_1 垂直底面 $A_1B_1C_1D_1$,

$PQ \subset A_1B_1C_1D_1$, $\therefore PQ \perp CC_1$

又 $\because A_1C_1, CC_1 \subset$ 平面 A_1C_1CA , $A_1C_1 \cap CC_1 = C_1$

$\therefore PQ \perp$ 平面 A_1C_1CA , $\because CE \subset$ 平面 A_1C_1CA , $\therefore PQ \perp CE$, 即 $l \perp CE$



(2) ①连接 AP , AQ , \because 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 有 AD, DC, DD_1 两两垂直, 建立以 D 点为坐标原点, 以向量的方向分别为 xyz 轴的正方向, 建立空间直角坐标系, 如图所示, 设正方体边长为 2,

则有 $D(0,0,0)$, $D_1(0,0,2)$, $A(2,0,0)$, $P(1,2,2)$, $Q(0,1,2)$, $\overrightarrow{AP} = (-1,2,2)$, $\overrightarrow{AQ} = (-2,1,2)$,

\because 正方体的侧棱 DD_1 垂直底面 $ABCD$, $\therefore \overrightarrow{DD_1} = (0,0,2)$ 为平面 $ABCD$ 的法向量

设平面 α , 即平面 APQ 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AQ}$

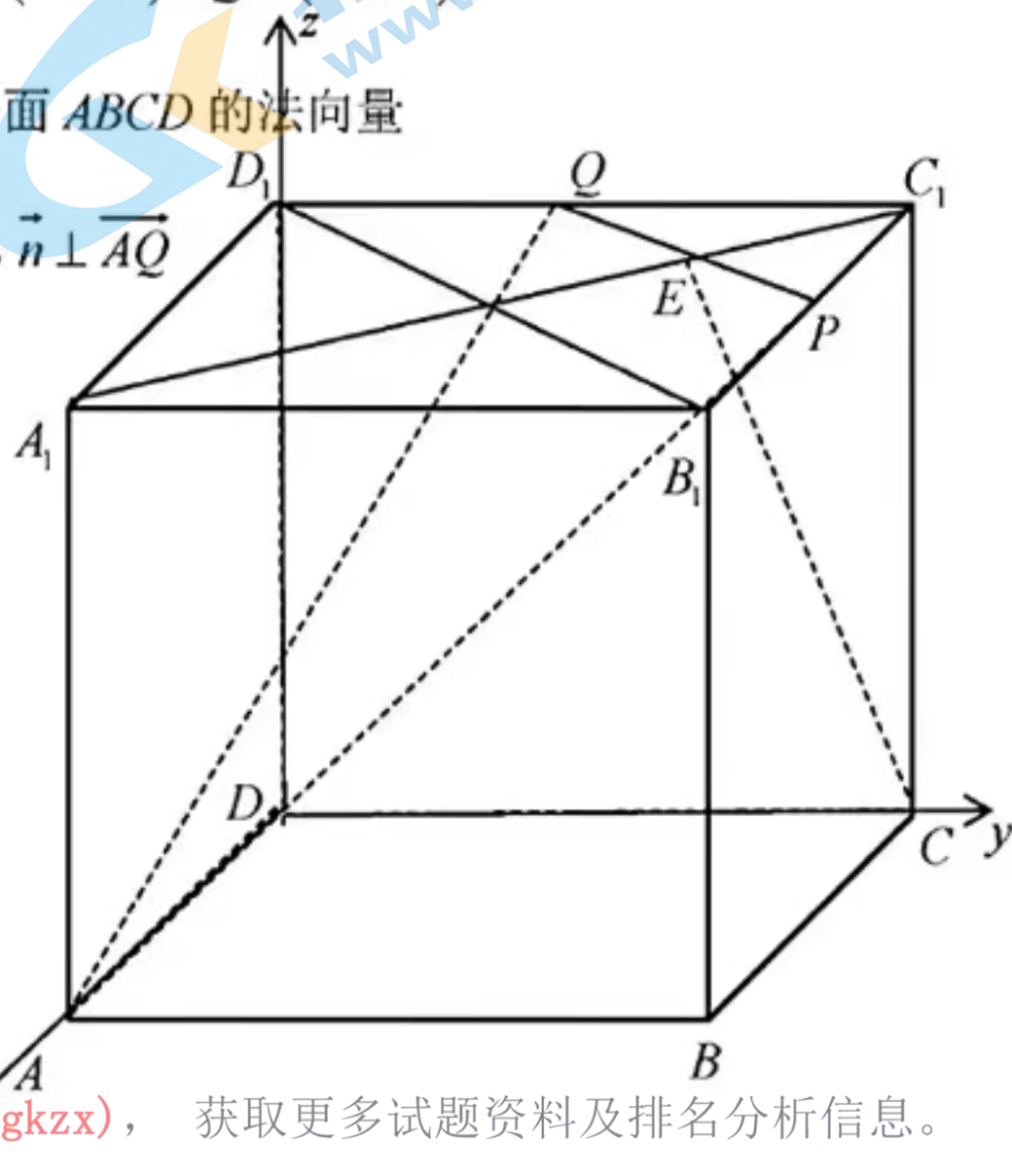
$\therefore \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$, 即

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = 2, \text{ 则 } y = -2, z = 3,$$

\therefore 平面 APQ 的一个法向量 $\vec{n} = (2, -2, 3)$,

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{17}, \quad \overrightarrow{DD_1} = (0,0,2), \quad |\overrightarrow{DD_1}| = 2$$

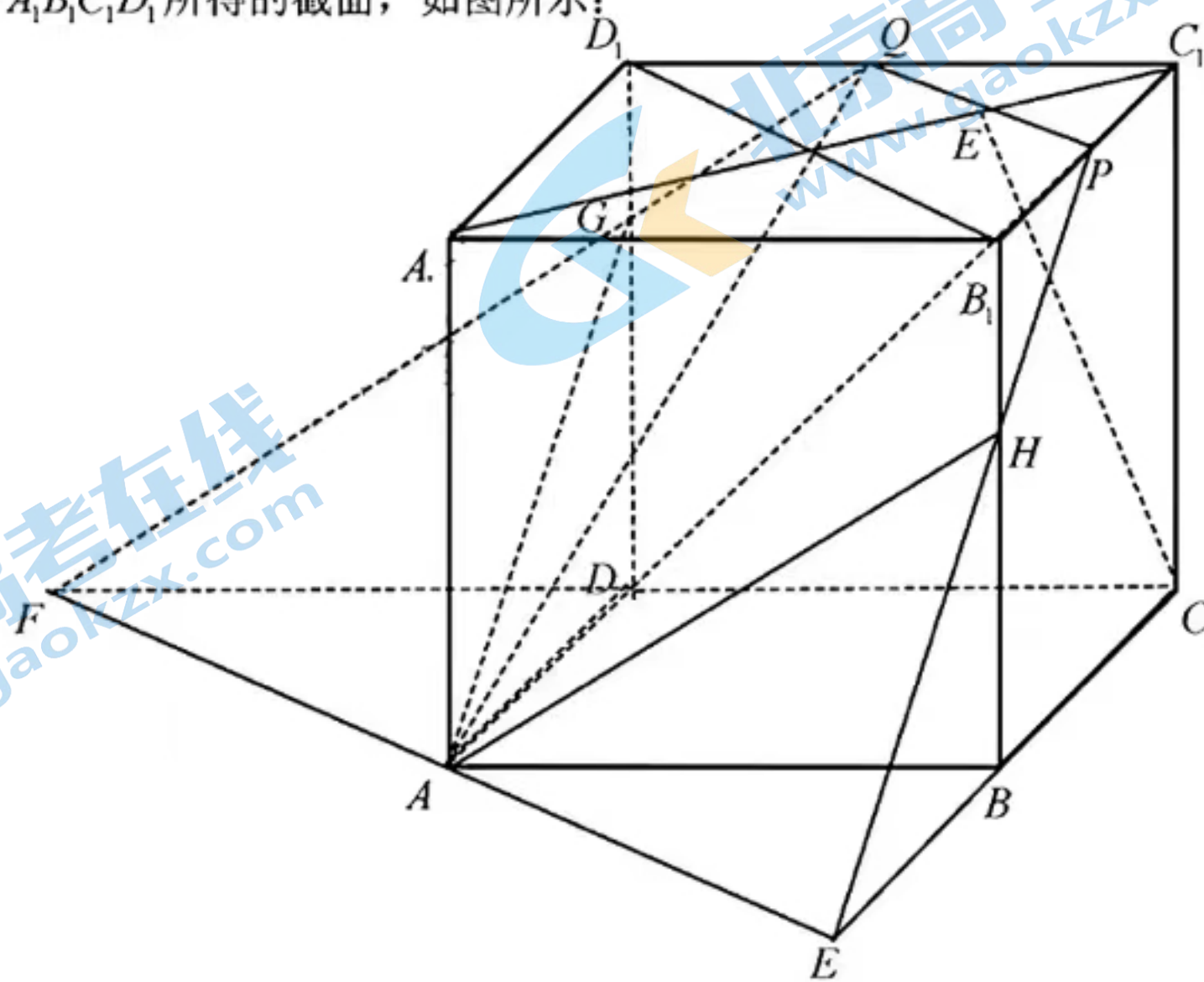
设平面 α 与平面 $ABCD$ 的夹角的平面角为 θ , 则



$$\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{DD_1}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{DD_1}|} = \frac{|0 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3|}{2 \cdot \sqrt{17}} = \frac{6}{2 \cdot \sqrt{17}} = \frac{3\sqrt{17}}{17}$$

②延长 BC , 取 $BE=BC$, 延长 CD , 取 $DF=CD$, 连接 EF , $PE \cap BB_1 = H$, $QF \cap DD_1 = G$, 平面 $PQGAH$

即为平面 α 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面, 如图所示:



20. (1) $\because b_n = a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2 - 1}{a_n}, \therefore$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_{n+1}}}{\frac{a_n^2 - 1}{a_n}} = \frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{a_n^2 - 1} = \frac{a_n \cdot (a_{n+1}^2 - 1)}{a_{n+1} \cdot (a_n^2 - 1)} = \frac{a_n \cdot a_{n+1}^2 - a_n}{a_{n+1} \cdot a_n^2 - a_n^2} = \frac{a_n \cdot a_{n+1}^2 - a_n}{a_{n+1} \cdot (a_n^2 - 1)}$$

由题意, $a_n a_{n+1}^2 - 2(a_n^2 - 1)a_{n+1} - a_n = 0, n \in \mathbb{N}^*$, $\therefore a_n a_{n+1}^2 - a_n = 2(a_n^2 - 1)a_{n+1}$, 代入, 有 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2 = q$

$\because a_1 = 3, \therefore b_1 = a_1 - \frac{1}{a_1} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}, \therefore$ 数列 b_n 是以 $\frac{8}{3}$ 为首项, 以 2 为公比的等比数列, \therefore

$$b_n = \frac{8}{3} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot 2^3 \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot 2^{n+2}$$

$$(2) \quad b_n^2 = \left(a_n - \frac{1}{a_n}\right)^2 = (a_n)^2 + \left(\frac{1}{a_n}\right)^2 - 2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} - 2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 2^{n+2}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot 4^{n+2}$$

$$\therefore S_n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2, \quad T_n = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}, \quad \therefore$$

$$S_n + T_n =$$

$$a_1^2 + \frac{1}{a_1^2} + a_2^2 + \frac{1}{a_2^2} + a_3^2 + \frac{1}{a_3^2} + \dots + a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} = a_1^2 + \frac{1}{a_1^2} - 2 + a_2^2 + \frac{1}{a_2^2} - 2 + a_3^2 + \frac{1}{a_3^2} - 2 + \dots + a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} - 2 + 2n$$

$$= \left(\frac{1}{9} \cdot 4^3 + \frac{1}{9} \cdot 4^4 + \frac{1}{9} \cdot 4^5 + \dots + \frac{1}{9} \cdot 4^{n+2} \right) + 2n = \frac{\frac{1}{9} \cdot 4^3 - \frac{1}{9} \cdot 4^{n+2} \cdot 4}{1-4} + 2n = \frac{\frac{1}{9} \cdot 4^{n+2} \cdot 4 - \frac{1}{9} \cdot 4^3}{3} + 2n = \frac{4^{n+3} - 64}{27} + 2n$$

$$S_n + T_n \text{ 为整数, 则 } \frac{4^{n+3} - 64}{27} = k, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad 4^{n+3} - 64 = 27k, \quad 4^{n+3} - 4^3 = 27k, \quad 4^3(4^n - 1) = 27k,$$

$$k = \frac{64}{27}(4^n - 1) = \frac{64}{27}(2^n + 1)(2^n - 1), \quad \text{解得最小为 } n=9 \text{ 时, 有 } k = \frac{64}{27} \cdot 513(2^9 - 1) = 64 \cdot 19 \cdot (2^9 - 1) \text{ 为整数解}$$

21. (1) 由双曲线定义, 知 $|PF_1| - |PF_2| = 7 - 5 = 2 = 2a, \therefore a = 1, \therefore$ 设抛物线的方程为: $y^2 = 2px,$ 因为

F2 为抛物线的焦点, $\therefore c = \frac{p}{2}, p = 2c, \therefore y^2 = 4cx, \therefore |PF_2| = 5,$ 由抛物线定义得 P 点横坐标为 $m = 5 - c,$

代入抛物线方程, 有 $P(5 - c, \sqrt{4c \cdot (5 - c)}),$ 代入双曲线方程, 有 $\frac{(5 - c)^2}{1} - \frac{4c(5 - c)}{c^2 - 1} = 1 \quad (c > 0),$ 解得 c

$= 2, \therefore b^2 = c^2 - a^2 = 2^2 - 1^2 = 3,$ 即双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1,$ 抛物线方程为: $y^2 = 8x$

$$22. (1) \text{ 由题意, } g(x) = x^3 - ax + \frac{1}{4}, \quad g'(x) = 3x^2 - a$$

当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) \geq 0$ 恒成立, $g(x) = x^3 - ax + \frac{1}{4}$ 没有最值。

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } g'(x) = 0, \text{ 即 } 3x^2 - a = 0, \quad x_1 = -\frac{\sqrt{3a}}{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3a}}{3}$$

$x \in (-\infty, x_1), g'(x) > 0, \quad x \in (x_1, x_2), g'(x) < 0, \quad x \in (x_2, +\infty), g'(x) > 0$ $g(x)$ 在

当 $x \in (-\infty, x_1)$ 时, $g(x)$ 单调递增, 当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $g(x)$ 单调递减, 当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $g(x)$ 单调递增

$\therefore x_1 = \frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时, $g(x)$ 有极大值为 $g(x_1) = g\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right) = \frac{2a\sqrt{3a}}{9} + \frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时, $g(x)$ 有极小值为 $g(x_2) = g\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right) = -\frac{2a\sqrt{3a}}{9} + \frac{1}{4}$

当 $x_0 = \frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时, 要证 $x_1 + 2x_0 = 0$, 即证 $x_1 = -2x_0 = -\frac{2\sqrt{3a}}{3}$,

代入计算有, $g(x_0) = \frac{2a\sqrt{3a}}{9} + \frac{1}{4}$ $g(x_1) = \frac{2a\sqrt{3a}}{9} + \frac{1}{4}$, 有 $g(x_0) = g(x_1)$ 符合题意;

即 $x_1 + 2x_0 = 0$ 得证, 同理, 当 $x_0 = -\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 亦得证, 如图①②所示。

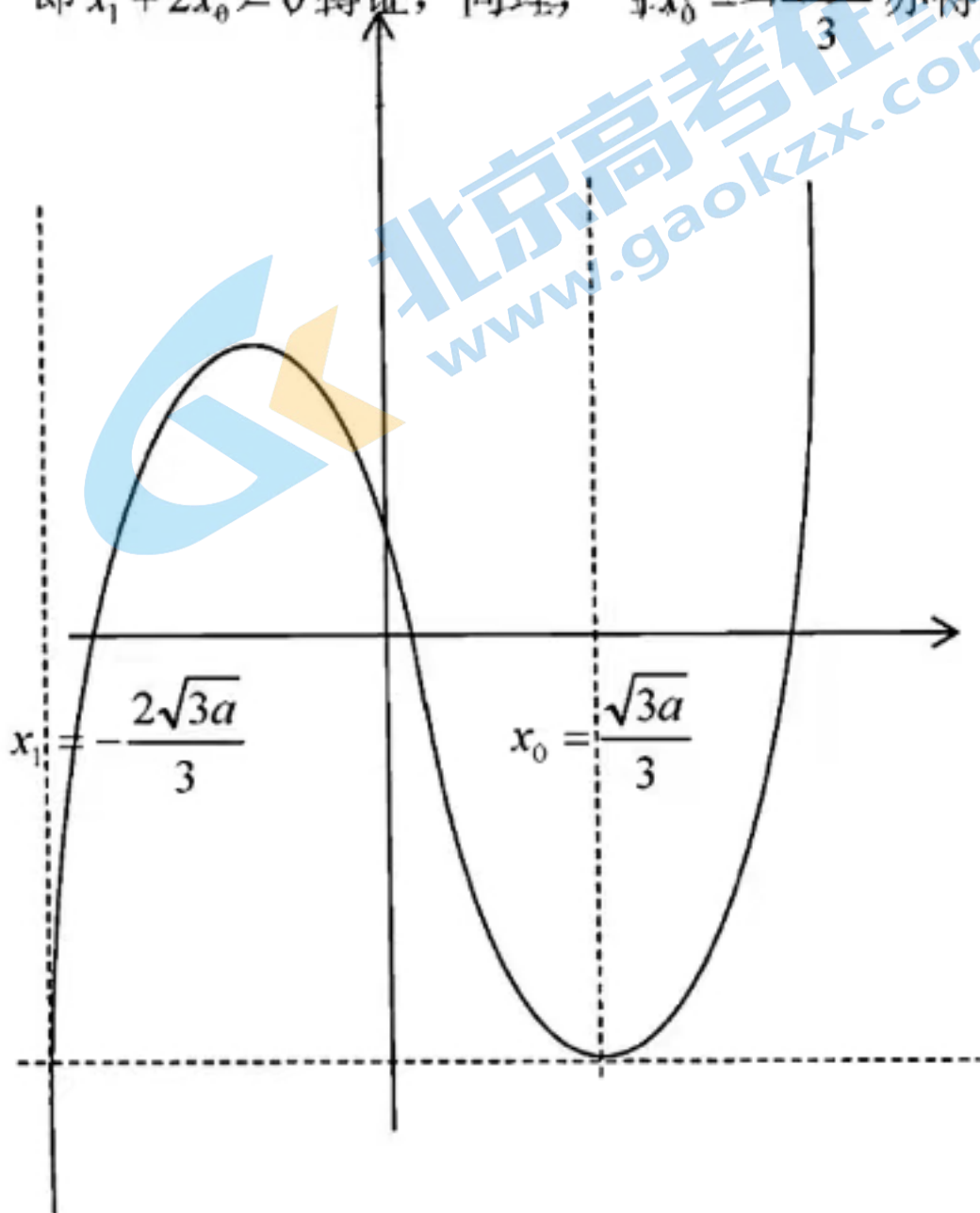


图 ①
 $x_1 + 2x_0 = 0$

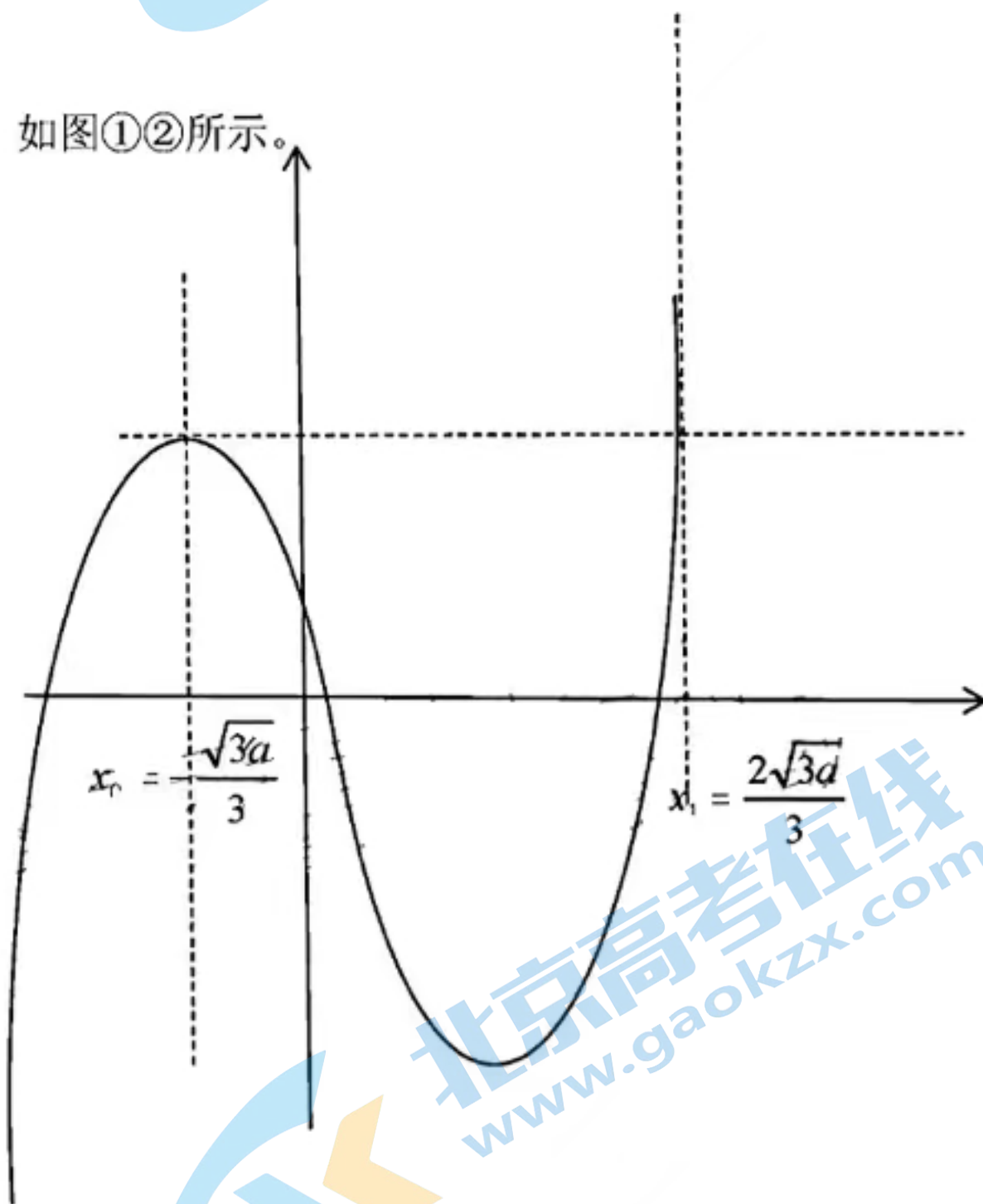


图 ②
 $x_1 + 2x_0 = 0$

(2) ① 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) = -\ln x < 0$, $\therefore h(x) = \min(f(x), g(x)) \leq g(x) < 0$, 故函数 $h(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 时无零点;

② 当 $x=1$ 时, $f(1)=0$, $g(1) = \frac{5}{4} - a$, 若 $a \leq \frac{5}{4}$, 则 $g(1) \geq 0$, $h(x) = f(1) = 0$, $x=1$ 是函数 $h(x)$ 的一个零点; 若 $a > \frac{5}{4}$, 则 $g(1) < 0$, $h(x) = g(x) < 0$, $x=1$ 时函数 $h(x)$ 无零点;

③当 $x \in (0,1)$ 时, $f(x) = -\ln x > 0$, 因此只需要考虑 $g(x)$

由题意, $g(x) = x^3 - ax + \frac{1}{4}$, $g'(x) = 3x^2 - a$

(i) 当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) \geq 0$ 恒成立, $\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, $g(0) = \frac{1}{4} > 0$, $\therefore g(x) > 0$ 在 $x \in (0,1)$ 恒成立,

即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点, 也即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点;

(ii) 当 $a \geq 3$ 时, $x \in (0,1)$, $g'(x) < 0$ 恒成立, $\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, $a \geq 3$, $g(1) = \frac{5}{4} - a < 0$ 即 $g(x)$ 在

$(0,1)$ 内有 1 个零点, 也即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内有 1 个零点;

(iii) $a \in (0,3)$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{3a}}{3})$ 上单调递减, $\therefore g(x)_{\min} = g(\frac{\sqrt{3a}}{3}) = \frac{-2a\sqrt{3a}}{9} + \frac{1}{4}$,

若 $g(\frac{\sqrt{3a}}{3}) > 0$, 即 $0 < a < \frac{3}{4}$ 时, $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点, 也即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点;

若 $g(\frac{\sqrt{3a}}{3}) = 0$, 即 $a = \frac{3}{4}$ 时, $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的一个零点, 也即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的一个零点;

若 $g(\frac{\sqrt{3a}}{3}) < 0$, 即 $\frac{3}{4} < a < 3$ 时, 由 $g(0) = \frac{1}{4} > 0$, $g(1) = \frac{5}{4} - a$, \therefore 当 $\frac{3}{4} < a < \frac{5}{4}$ 时, $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内有两个

零点, 也即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内有两个零点, 当 $\frac{5}{4} \leq a < 3$ 时, $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的一个零点, 也即 $h(x)$ 在

$(0,1)$ 内有唯一的一个零点。

综上所述, 当 $\frac{3}{4} < a < \frac{5}{4}$ 时, 函数 $h(x)$ 会有 3 个零点。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯