绵阳市高中 2018 级第三次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．

BDCDA　　BCBCA　　AD

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．0　　14．2e　　15．$\sqrt{2}$　　16．$\sqrt{7}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．**解**：（1）由图知：高二年级学生的成绩的平均分高于高一年级学生成绩的平均分；高二年级的学生成绩比较集中，而高一年级的学生成绩比较分散．

∴高二年级的学生学习效果更好．……………………………………………4 分

（2）由图知：高一、高二两个年级数学成绩为良好的人数分别为 4，6，若用分层抽样法抽出 5 人，则应从高一、高二两个年级各抽出 2 人、3 人．…………………7 分

设"5 位同学任意选出 2 人发言，这 2 人是来自不同年级的同学"为事件 A．

将高一选出的 2 人记为：a、b，高二选出的 3 人记为：1，2，3．

可得 ab，$a1$，$a2$，$a3$，$b1$，$b2$，$b3$，12，13，23 共有 10 种选法，

事件 A 包含 $a1$、$a2$、$a3$、$b1$、$b2$、$b3$ 共有 6 种．……………………………10 分

$\therefore P(A)=\dfrac{3}{5}$．

∴选出的 2 人是来自不同班的同学的概率等于 $\dfrac{3}{5}$．……………………………12 分

18．**解**：（1）在锐角△ABC 中，AB=3，$AC=\sqrt{7}$，$\angle ABC$=60°，

由正弦定理得 $\sin\angle ACB=\dfrac{AB\cdot\sin\angle ABC}{AC}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，

$\therefore \cos\angle ACB=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$．……………………………………………………3 分

$\because \sin\angle BAC=\sin[\pi-(\dfrac{\pi}{3}+\angle ACB)]=\sin(\dfrac{\pi}{3}+\angle ACB)$，

$\therefore \sin\angle BAC=\sin\angle ACB\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\angle ACB\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{7}}{14}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$．…6 分

（2）$\because AB//CD$，$\therefore \angle ACD=\angle BAC$，

$\therefore \sin\angle ACD=\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$．……………………………………………8 分

在 Rt△ADC 中，$AD = AC\times\sin\angle ACD=\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\sqrt{3}$， ··························9 分

$\therefore CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=2$， ··························10 分

$\because S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ACD}$，

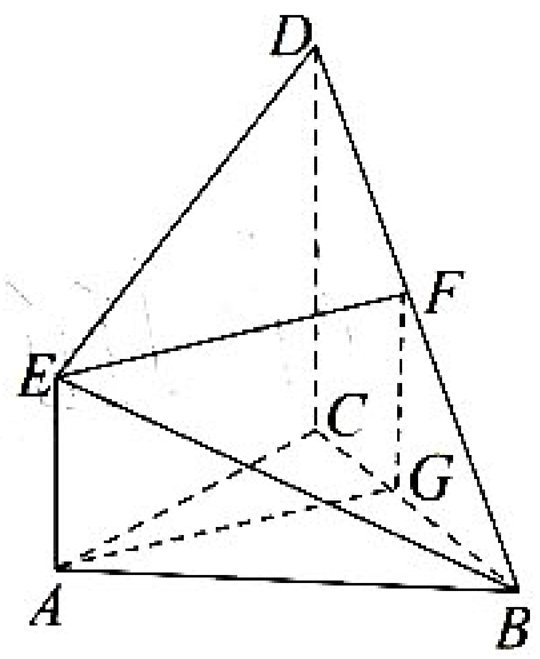
又 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD\times CD=\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle BCD}=\sqrt{3}$． ··························12 分

19．解：（1）证明：取 BC 的中点 G，连接 GF，GA．

$\because$ 点 F 为 BD 的中点，

$\therefore GF/\!/CD$，且 $GF=\frac{1}{2}CD$． ··························2 分



又 $CD/\!/AE$，$CD=2AE$，

$\therefore GF/\!/AE$，且 $GF=AE$，

$\therefore$ 四边形 $AEFG$ 为平行四边形，

$\therefore EF/\!/AG$，

又 $EF\not\subset$ 平面 ABC，$AG\subset$ 平面 ABC，

$\therefore EF/\!/$ 平面 ABC． ··························6 分

（2）$\because EF\perp CD$，$\therefore CD\perp AG$，

又 $AC\perp CD$，$\therefore CD\perp$ 平面 ABC，

$\therefore CD\perp BC$． ··························9 分

又平面 $BCD\perp$ 平面 $ACDE$，平面 $BCD\cap$ 平面 $ACDE=CD$，

$\therefore BC\perp$ 平面 $ACDE$，$\therefore BC$ 为四棱锥 $B-ACDE$ 的高，

$\because CD=CB=2AE=2AC=2$，

$\therefore V_{B-ACDE}=\frac{1}{3}S_{\text{梯形}ACDE}\cdot BC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(AE+CD)\times BC=\frac{1}{6}\times(1+2)\times 2=1$． ·········12 分

20．解：（1）由题意得 $\frac{6}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， ··························2 分

又 $a^2=b^2+c^2$，

解得 $a^2=8$，$b^2=4$．

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$． ··························5 分

（2）设直线 MN 的方程为 $x=my+2$，$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$.

联立方程 $\begin{cases}x=my+2,\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 整理得 $(m^2+2)y^2+4my-4=0$.

由 $y_1+y_2=\dfrac{-4m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{-4}{m^2+2}$， ……………………………………7 分

得 $y_1+y_2=my_1y_2$.

直线 DN 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-3}(x-3)$. ①

过 M 且与 y 轴垂直的直线的方程为 $y=y_1$. ② ……………………………………10 分

联立①②可得 $x_P=3+\dfrac{y_1(x_2-3)}{y_2}=3+\dfrac{y_1(my_2-1)}{y_2}=3+\dfrac{y_1+y_2-y_1}{y_2}=4$.

∴点 P 在定直线 $x=4$ 上. ……………………………………………………………12 分

21．**解**：（1）由 $f(x)=e^x-a\ln x$，得 $f'(x)=e^x-\dfrac{a}{x}(x>0)$.

∵函数 $f(x)$在定义域内为增函数，

∴ $f'(x)=e^x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{xe^x-a}{x}\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立. ……………………………3 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，满足题意；

当 $a>0$ 时，设 $h(x)=xe^x-a\ (x>0)$.

易得 $h'(x)=(x+1)e^x>0$，∴函数 $h(x)$在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

∴ $h(x)>h(0)=-a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 0$ 与 $a>0$ 矛盾.

综上，实数 a 的取值范围为$(-\infty,\ 0]$. ……………………………………………6 分

（2）易知 $f'(x)=e^x-\dfrac{e^2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f'(1)=e-e^2<0$，$f'(2)=\dfrac{e^2}{2}>0$，

∴存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $f'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\dfrac{e^2}{x_0}$，∴ $\ln x_0=2-x_0$. ………………8 分

当 $x\in(0,\ x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

∴函数 $f(x)$在 $(0,\ x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增. ……………………………10 分

∴ $f(x)\geqslant e^{x_0}-e^2\ln x_0=\dfrac{e^2}{x_0}-e^2(2-x_0)=e^2(\dfrac{1}{x_0}+x_0)-2e^2>2e^2-2e^2=0$.

∴$f(x)>0$. ………………………………………………………………………………12 分

22．**解**：（1）由$\begin{cases} x=\sqrt{10}\cos\alpha, \\ y=\sqrt{10}\sin\alpha+4, \end{cases}$ 得 $x^2+(y-4)^2=10$． ……………………………2 分

由$\begin{cases} y=\rho\sin\theta, \\ x=\rho\cos\theta, \end{cases}$ 得曲线 E 的极坐标方程为 $\rho^2-8\rho\sin\theta+6=0$． ……………4 分

直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\beta\,(\rho\in\mathbf{R}，0\leqslant\beta<\pi)$． ……………………………………5 分

（2）将直线 l：$\theta=\beta\,(\rho\in\mathbf{R}，0\leqslant\beta<\pi)$，代入曲线 E 的方程得 $\rho^2-8\rho\sin\beta+6=0$．

由 $\Delta=64\sin^2\beta-24>0$，解得 $\sin^2\beta>\frac{3}{8}$．

设 $N(\rho_2，\beta)$，$M(\rho_1，\beta)$．由韦达定理得 $\rho_1+\rho_2=8\sin\beta$，$\rho_1\rho_2=6$． ……………7 分

$\because \overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{OM}$，$\therefore \rho_2=3\rho_1$，解得 $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，满足 $\Delta>0$．

$\because 0\leqslant\beta<\pi$，$\therefore \beta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$，$\therefore k=\tan\beta=\pm1$．

$\therefore$直线 l 的斜率为 ±1． ……………………………………………………………10 分

23．**解**：（1）当 $x\geqslant1$ 时，$4x-3\geqslant4$，解得 $x\geqslant\frac{7}{4}$； ……………………………………2 分

当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$1\geqslant4$ 不成立；

当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$3-4x\geqslant4$，解得 $x\leqslant-\frac{1}{4}$． ………………………………………4 分

综上，不等式 $f(x)\geqslant4$ 的解集为 $(-\infty,-\frac{1}{4}]\cup[\frac{7}{4},+\infty)$． ……………………………5 分

（2）由题意得 $2f(x)-g(x)=4|x-1|-|x+1|$，

当 $x=0$ 时，$3\geqslant0$，显然成立．

要使 $2f(x)-g(x)\geqslant a|x|$ 成立，即 $a\leqslant\frac{2f(x)-g(x)}{|x|}(x\neq0)$，

令 $h(x)=\frac{2f(x)-g(x)}{|x|}(x\neq0)$，

即 $h(x)=\frac{4|x-1|-|1+x|}{|x|}=4\left|1-\frac{1}{x}\right|-\left|\frac{1}{x}+1\right|$ ………………………………………7 分

$\geqslant\left|1-\frac{1}{x}\right|-\left|\frac{1}{x}+1\right|$（当且仅当 $x=1$ 时取得等号）

$\geqslant-\left|1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+1\right|=-2$（当且仅当 $0<x\leqslant1$ 时取得等号）．

$\therefore$当 $x=1$ 时函数 $h(x)$ 取得最小值 -2．

$\therefore a\leqslant-2$．

即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-2]$． ………………………………………………10 分