

## 数学试卷

命题学校及命题人:襄阳五中 王荣

审题人:陈婧 张伟

上海圆创教育监制

本试题共 4 页,22 题。满分 150 分。考试用时 120 分钟。

考试时间:2022 年 8 月 11 日下午 15:00—17:00

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,用签字笔或钢笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

## 第 I 卷(选择题)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合  $M = \left\{ x \mid y = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \right\}$ ,  $N = \{ y \mid y = x^{-2} \}$ , 则

- A.  $M \cap N = \emptyset$       B.  $M \subseteq N$       C.  $N \subseteq M$       D.  $M = N$

2. 设  $(1-i)^2 z = -2i$ , 则  $|z| = ( \quad )$ 

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       B.  $\sqrt{2}$       C. 1      D. 2

3. 平面向量  $a, b, e$  满足  $|e| = 1, a \cdot e = 1, b \cdot e = 2$ , 则  $|a + b|$  的最小值为  $( \quad )$ 

- A. 1      B.  $\frac{3}{2}$       C. 2      D. 3

4. 二项式  $\left( x^2 - \frac{2\sqrt{x}}{x^2} \right)^n$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) 的展开式中含有常数项, 则  $n$  的最小值等于  $( \quad )$ 

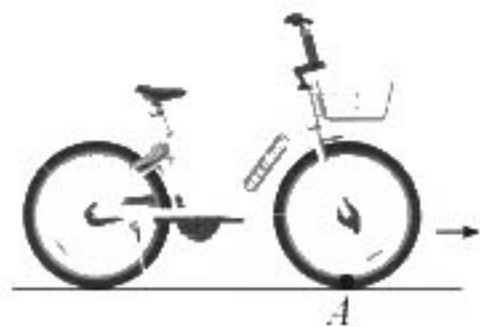
- A. 2      B. 3      C. 4      D. 5

5. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \sin(x-a), & x \leq 0, \\ \cos(x-b), & x > 0. \end{cases}$  是偶函数, 则  $a, b$  的值可能是  $( \quad )$ 

- A.  $a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{\pi}{3}$       B.  $a = \frac{2\pi}{3}, b = \frac{\pi}{6}$   
C.  $a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{\pi}{6}$       D.  $a = \frac{2\pi}{3}, b = \frac{5\pi}{6}$

6. 如图,  $A$  是自行车前轮外边沿上的一点, 前轮半径为 0.25m, 若单车向前直行 6.80m 时(车轮向前顺时针滚动, 无滑动), 下列描述正确的是( $\pi \approx 3.14$ )  $( \quad )$ 

- A. 点  $A$  在前轮的左下位置, 距离地面约为 0.125m  
B. 点  $A$  在前轮的右下位置, 距离地面约为 0.125m  
C. 点  $A$  在前轮的左上位置, 距离地面约为 0.375m  
D. 点  $A$  在前轮的右上位置, 距离地面约为 0.375m





7. 对于正方体 6 个面的中心, 甲, 乙两人分别从这 6 个点中任意选两个点连成直线, 则所得的两条直线相互垂直的概率等于( )

- A.  $\frac{6}{25}$                       B.  $\frac{8}{75}$                       C.  $\frac{4}{15}$                       D.  $\frac{4}{75}$

8. 已知函数  $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}ax^3 (a > 0)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 若对于任意的  $x_1 \in (3, +\infty)$ , 都存在  $x_2 \in (1, +\infty)$ , 使得  $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$ , 则  $a$  的取值范围是( )

- A.  $(0, \frac{1}{3}]$                       B.  $[\frac{3}{2}, +\infty)$                       C.  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$                       D.  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知  $E, F, G, H$  分别是三棱锥  $A-BCD$  的棱  $AB, AD, CD, CB$  上的点(不是端点), 则下列说法正确的是( )

- A. 若直线  $EF, HG$  相交, 则交点一定在直线  $BD$  上  
B. 若直线  $EF, HG$  异面, 则直线  $EF, HG$  中至少有一条与直线  $BD$  相交  
C. 若直线  $EF, HG$  异面, 则直线  $EF, HG$  中至少有一条与直线  $BD$  平行  
D. 若直线  $EF, HG$  平行, 则直线  $EF, HG$  与直线  $BD$  平行

10. 已知  $a > 0$ , 圆  $C: (x-a)^2 + (y-\ln a)^2 = 1$ , 则( )

- A. 存在 3 个不同的  $a$ , 使得圆  $C$  与  $x$  轴或  $y$  轴相切  
B. 存在 2 个不同的  $a$ , 使得圆  $C$  在  $x$  轴和  $y$  轴上截得的线段相等  
C. 存在 2 个不同的  $a$ , 使得圆  $C$  过坐标原点  
D. 存在唯一的  $a$ , 使得圆  $C$  的面积被直线  $y = \frac{x}{e}$  平分

11. 已知圆台的上下底面的圆周都在半径为 2 的球面上, 圆台的下底面过球心, 上底面半径为  $r (0 < r < 2)$ , 设圆台的体积为  $V$ , 则下列选项中说法正确的是( )

- A. 当  $r=1$  时,  $V = \frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$                       B.  $V$  存在最大值  
C. 当  $r$  在区间  $(0, 2)$  内变化时,  $V$  逐渐减小                      D. 当  $r$  在区间  $(0, 2)$  内变化时,  $V$  先增大后减小

12. 已知抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ , 准线为  $l$ , 过点  $F$  且斜率大于 0 的直线交抛物线  $C$  于  $A, B$  两点(其中  $A$  在  $B$  的上方),  $O$  为坐标原点, 过线段  $AB$  的中点  $M$  且与  $x$  轴平行的直线依次交直线  $OA, OB, l$  于点  $P, Q, N$ . 则( )

- A. 若  $|AF| = 2|FB|$ , 则直线  $AB$  的斜率为  $2\sqrt{2}$   
B.  $|PM| = |NQ|$   
C. 若  $P, Q$  是线段  $MN$  的三等分点, 则直线  $AB$  的斜率为  $2\sqrt{2}$   
D. 若  $P, Q$  不是线段  $MN$  的三等分点, 则一定有  $|PQ| > |OQ|$

### 第 II 卷(非选择题)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若直线  $y = k(x-1)$  与曲线  $y = e^x$  相切, 则  $k$  的值为\_\_\_\_\_.



14. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_1$  作圆  $O: x^2 + y^2 = a^2$  的切线  $l$  切

圆  $O$  于点  $B$  并与双曲线的右支交于点  $C$ , 若  $|BC| = |CF_2|$ , 则双曲线的离心率为 \_\_\_\_\_.

15. 若已知 30 个数  $x_1, x_2, \dots, x_{30}$  的平均数为 6, 方差为 9; 现从原 30 个数中剔除  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  这 10 个数, 且剔除的这 10 个数的平均数为 8, 方差为 5, 则剩余的 20 个数  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{30}$  的方差为 \_\_\_\_\_.

16. 设  $a = \frac{1}{5}, b = 2 \ln(\sin \frac{1}{10} + \cos \frac{1}{10}), c = \frac{6}{5} \ln \frac{6}{5}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 \_\_\_\_\_.

**四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. (本小题满分 10 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3^2}a_2 + \frac{1}{3^3}a_3 + \dots + \frac{1}{3^n}a_n = n (n \in \mathbf{N}^+)$ .

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

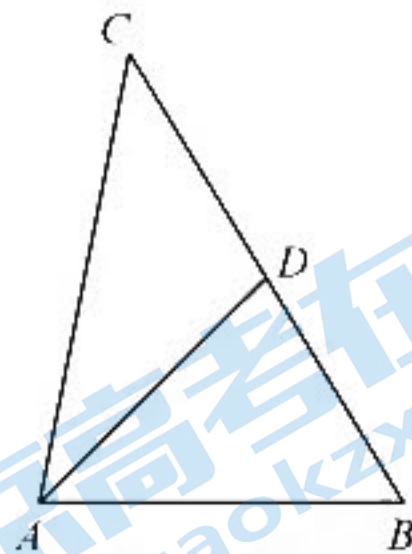
(II) 设  $b_n = \log_3 a_n$ , 求数列  $\left\{ \frac{1}{b_n b_{n-1} b_{n-2}} \right\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ .

18. (本小题满分 12 分)

在  $\triangle ABC$  中,  $\tan \angle CAB = \frac{4}{3}$ ,  $D$  为  $BC$  上一点,  $AD = 3\sqrt{2}$ .

(I) 若  $D$  为  $BC$  的中点,  $BC = 3\sqrt{2}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积;

(II) 若  $\angle DAB = 45^\circ$ , 求  $\triangle ABC$  的面积的最小值.



19. (本小题满分 12 分)

有 9 个外观相同的同规格砝码, 其中 1 个由于生产瑕疵导致质量略有增加, 小明想通过托盘天平称量出这个有瑕疵的砝码, 设计了如下两种方案:

方案一: 每次从待称量的砝码中随机选 2 个, 按个数平分后分别放在天平的左、右托盘上, 若天平平衡, 则选出的 2 个砝码是没有瑕疵的; 否则, 有瑕疵的砝码在下降一侧. 按此方法, 直到找出有瑕疵的砝码为止.

方案二: 从待称量的砝码中随机选 8 个, 按个数平分后分别放在天平的左、右托盘上, 若天平平衡, 则未被选出的那个砝码是有瑕疵的; 否则, 有瑕疵的砝码在下降一侧, 每次再将该侧砝码按个数平分, 分别放在天平的左、右托盘上,  $\dots$ , 直到找出有瑕疵的砝码为止.

(I) 记方案一的称量次数为随机变量  $X$ , 求  $X$  的概率分布;

(II) 上述两种方案中, 小明应选择何种方案可使称量次数的期望较小? 并说明理由.

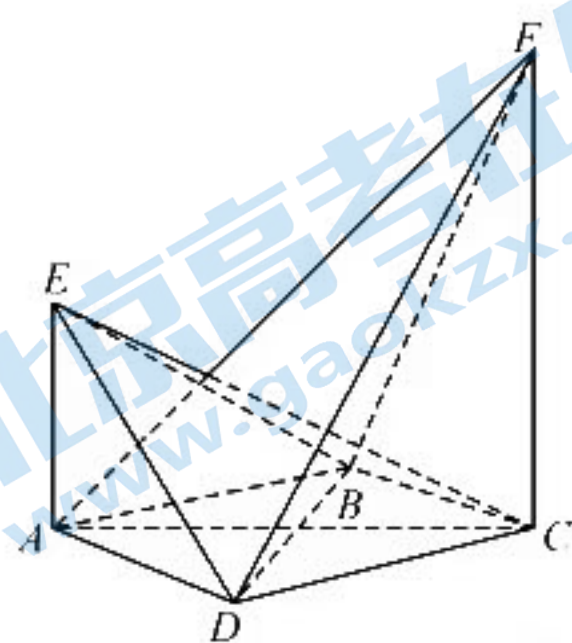


20.(本小题满分 12 分)

如图,四棱锥  $F-ABCD$  的底面  $ABCD$  是菱形,其对角线  $AC=2, BD=\sqrt{2}$ .  $AE, CF$  都与平面  $ABCD$  垂直,  $AE=1, CF=2$ .

(I) 求二面角  $B-AF-D$  的大小;

(II) 求三棱锥  $E-ABD$  与四棱锥  $F-ABCD$  公共部分的体积.



21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ , 过点  $P\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$  而不过点  $Q(\sqrt{2}, 1)$  的动直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点.

(I) 求  $\angle AQB$ ;

(II) 若直线  $QA, QB$  的斜率之和为 0, 求  $\triangle QAB$  的面积.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2 - ax + 1 (a \in \mathbf{R})$ , 其中  $e$  是自然对数的底数.

(I) 设  $f(x)$  的极小值为  $h(a)$ , 求  $h(a)$  的最大值;

(II) 若存在  $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$  使得  $f(x_1) = f(x_2)$ , 且  $x_1 + x_2 = 1$ , 求  $a$  的取值范围.

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯