昌平区 2018 年高三年级第二次统一练习

数学试卷(理科)　　2018.5

本试卷共 5 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案作答在答题卡上，在试卷上作答无效．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>1\}$，则 $\complement_U A=$

A．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　B．$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　C．$(-1,1)$　　D．$[-1,1]$

2．若复数 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，当 $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$ 时，则复数 z 在复平面内对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=27, a_4=a_3a_5$，则 $a_7=$

A．$\dfrac{1}{27}$　　B．$\dfrac{1}{9}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．3

4．设 $a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0.2}$，$b=\log_2 3$，$c=2^{-0.3}$，则

A．$b>c>a$　　B．$a>b>c$　　C．$b>a>c$　　D．$a>c>b$

5．若满足条件 $\begin{cases}x-y\geq 0\\ x+y-1\leq 0\\ y\geq a\end{cases}$ 的整点 (x,y) 恰有 12 个，其中整点是指横、纵坐标都是整数的点，则整数 a 的值为

A．-3　　B．-2　　C．-1　　D．0

6．设 $x,y\in\mathbf{R}$，则“$x^2+y^2\le 2$”是“$|x|\le 1$且$|y|\le 1$”的

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

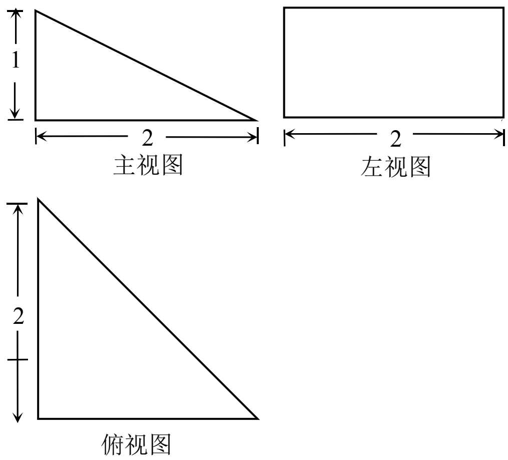
7．某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的所有面中最大面的面积是

A．4

B．$\sqrt{5}$

C．2

D．$\sqrt{2}$



8．2011 年 7 月执行的《中华人民共和国个人所得税法》规定：公民全月工资、薪金所得不超过 3500 元的部分不必纳税，超过 3500 元的部分为全月应纳税所得额．此项税款按下表分段累进计算：

全月应纳税所得额（含税级距）	税率(%)
不超过 1500 元	3
超过 1500 元至 4500 元的部分	10
超过 4500 元至 9000 元的部分	20
…	…

某调研机构数据显示，纳税人希望将个税免征额从 3500 元上调至 7000 元．若个税免征额上调至 7000 元（其它不变），某人当月少交纳此项税款 332 元，则他的当月工资、薪金所得介于

A．5000~6000 元　B．6000~8000 元　C．8000~9000 元　D．9000~16000 元

第二部分（非选择题　共 110 分）

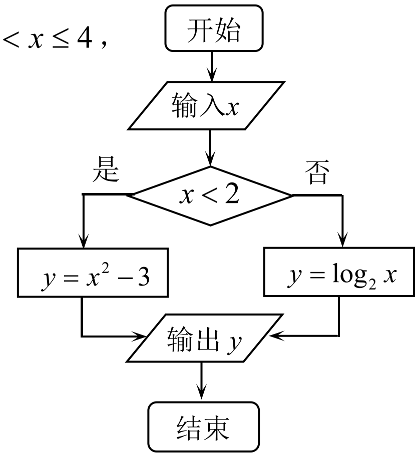
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．在二项式 $(\sqrt{x}+1)^6$ 的展开式中，第四项的系数是__________．（用数字作答）

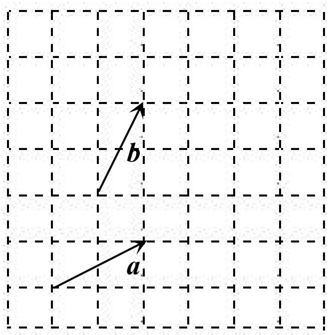
10．在ΔABC中，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，则$BC=$__________.

11．已知双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{1}{2}x$，则双曲线$C$的离心率是__________.

12．执行如图所示的程序框图，若输入 x 值满足$-2<x\le 4$，则输出y值的取值范围是__________.



13．向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示，则向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$所成角的余弦值是_________;向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$所张成的平行四边形的面积是__________.



14．已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2+2ax, & x<1,\\ \dfrac{a\ln x}{x}, & x\ge 1.\end{cases}$

① 当$x<1$时，若函数$f(x)$有且只有一个极值点，则实数a的取值范围是__________;

② 若函数$f(x)$的最大值为 1，则$a=$__________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题 13 分）

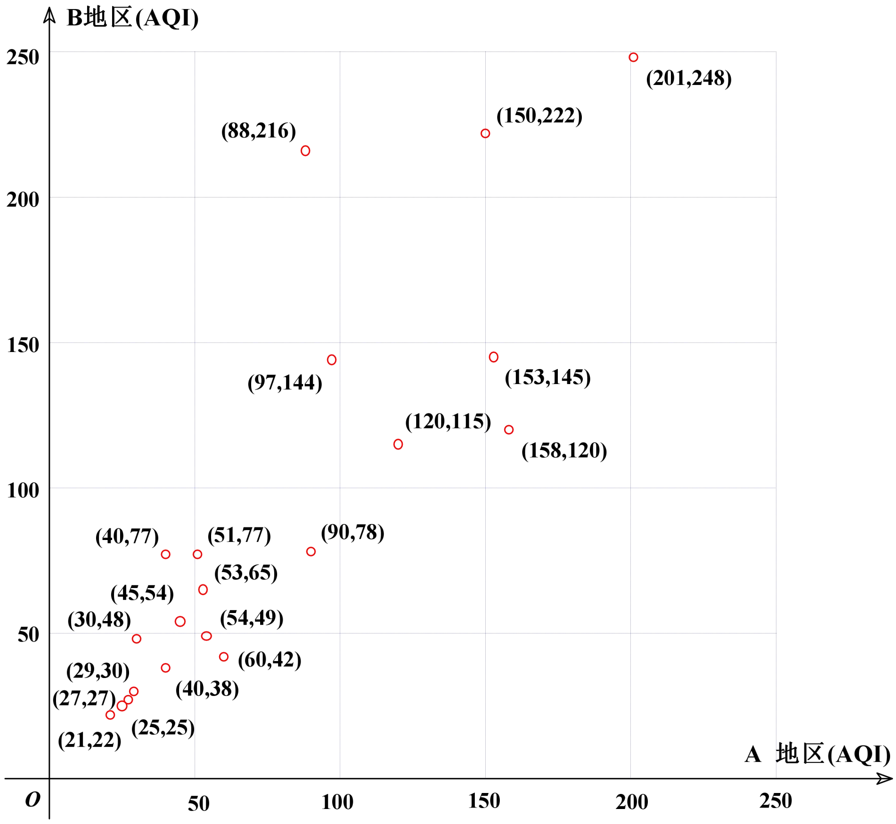
已知函数$f(x)=2\sin(\dfrac{\pi}{4}-x)\cos(\dfrac{\pi}{4}-x)+\sqrt{3}\sin 2x$．

（I）求函数$f(x)$的最小正周期；

（II）求函数$f(x)$在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最值及相应的x值．

16.（本小题 13 分）

为评估大气污染防治效果，调查区域空气质量状况，某调研机构从 A，B 两地区一年的数据中随机抽取了相同 20 天的观测数据，得到 A，B 两地区的空气质量指数（AQI）如下图所示：



根据空气质量指数，将空气质量状况分为以下三个等级：

空气质量指数 AQI	(0,100)	[100,200)	[200,300)
空气质量状况	优良	轻中度污染	重度污染

（Ⅰ）试估计 A 地区当年（365 天）的空气质量状况“优良”的天数；

（Ⅱ）假设两地区空气质量状况相互独立，记事件 C:“A 地区空气质量等级优于 B 地区空气质量等级”. 根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求事件 C 的概率.

（Ⅲ）若从空气质量角度选择生活地区居住，你建议选择 A，B 两地区哪个地区.（只需写出结论）

17.（本小题 14 分）

如图 1，在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60^{\circ}$，$DE\perp AB$ 于点 E，将 ΔADE 沿 DE 折起到 ΔA_1DE 的位置，使 $A_1D\perp BE$，如图 2.

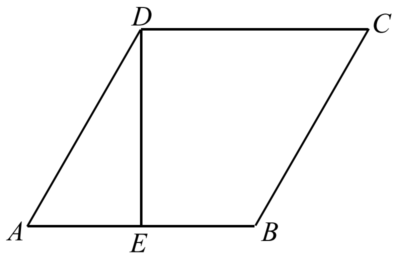


图 1

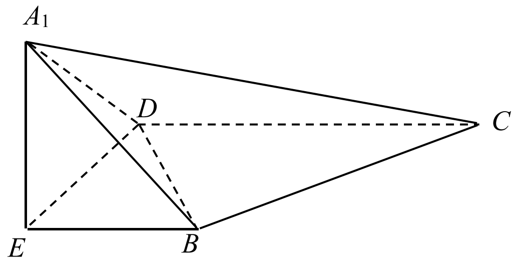


图 2

（I）求证：$A_1E\perp$ 平面 $BCDE$；

（II）求二面角 $E-A_1D-B$ 的余弦值；

（III）在线段 BD 上是否存在点 P，使平面 $A_1EP\perp$ 平面 A_1BD？若存在，求出 $\dfrac{BP}{BD}$ 的值；若不存在，说明理由.

18.（本小题 14 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 经过点 $(0,1)$，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（I）求椭圆 E 的标准方程；

（II）过右焦点 F 的直线 l（与 x 轴不重合）与椭圆交于 A,B 两点，线段 AB 的垂直平分线交 y 轴于点 $M(0,m)$，求实数 m 的取值范围.

19．（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=ax^2+ax-xe^x$, $a>1$.

（I）若曲线 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$ ，求 a 的值；

(II) 证明：当 $x<0$ 时，函数 $f(x)$ 存在唯一的极小值点为 x_0，且 $-\frac{1}{2}<x_0<0$.

20．(本小题 13 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 中，若存在正实数 p ，使得对数列 $\{a_n\}$ 中的任意一项 a_k ， $\frac{p}{a_k}$ 也是数列 $\{a_n\}$ 中的一项，称数列 $\{a_n\}$ 为“倒置数列”， p 是它的“倒置系数”.

（I）若数列：$1,4,9,x\ (x>9)$ 是“倒置系数”为 p 的“倒置数列”，求 x 和 p 的值；

（II）若等比数列 $\{a_n\}$ 的项数是 m ，数列 $\{a_n\}$ 所有项之积是 T ，求证：数列 $\{a_n\}$ 是“倒置数列”，并用 m 和 T 表示它的“倒置系数” p ；

（III）是否存在各项均为整数的递增数列 $\{a_n\}$，使得它既是等差数列，又是“倒置数列”，如果存在，请写出一个满足条件的数列，如果不存在，请说明理由.

昌平区 2018 年高三年级第二次统一练习

数学试卷(理科)参考答案

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	A	C	B	B	B	C

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9．20　　10．1 或 $\sqrt{7}$　　11．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

12．$[-3,2]$　　13．$\dfrac{4}{5}$ ；3　　14．$a<1$；-1

三、解答题(共 6 小题，共 80 分)

15．（共 13 分）

解：（I）$f(x)=\sin(\dfrac{\pi}{2}-2x)+\sqrt{3}\sin 2x$

$$=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$$

$$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期是 π.　　--------------------8 分

（II）因为 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，所以 $0\le 2x\le\pi$，

所以 $\dfrac{\pi}{6}\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{7\pi}{6}$，

当 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\max}=2$.

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=-1$.　　---------------------13 分

16．（共 13 分）

解：（ I ）从 A 地区选出的 20 天中随机选出一天，这一天空气质量状况为“优良”的频率为 $1-\dfrac{5}{20}=0.75$，估计 A 地区当年（365 天）的空气质量状况“优良”的频率为 0.75，A 地区当年（365 天）的空气质量状况“优良”的天数约为 $365\times 0.75\approx 274$ 天. -----------4 分

（II）记 A_1 表示事件：“A 地区空气质量等级为优良”；

A_2 表示事件：“A 地区空气质量等级为轻中度污染”；

B_1 表示事件：“B 地区空气质量等级为轻中度污染”；

B_2 表示事件：“B 地区空气质量等级为重度污染”，

则 A_1 与 B_1 独立，A_2 与 B_2 独立，B_1 与 B_2 互斥，$C = A_1B_1 \cup A_1B_2 \cup A_2B_2$.

所以 $P(C) = P(A_1B_1 \cup A_1B_2 \cup A_2B_2)$

$$= P(A_1B_1) + P(A_1B_2) + P(A_2B_2)$$

$$= P(A_1)P(B_1) + P(A_1)P(B_2) + P(A_2)P(B_2)\ .$$

由所给数据得 A_1，A_2，B_1，B_2 发生的频率分别为 $\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{3}{20}$.

故 $P(A_1) = \frac{3}{4}$，$P(A_2) = \frac{1}{5}$，$P(B_1) = \frac{1}{5}$，$P(B_2) = \frac{3}{20}$，

所以 $P(C) = \frac{3}{4} \times (\frac{1}{5} + \frac{3}{20}) + \frac{1}{5} \times \frac{3}{20} = 0.2925.$ --------------------10 分

（III）从空气质量角度，建议选择 A 地区居住 . --------------------13 分

17.（共 14 分）

证明：（I）因为 $DE \perp AB$，

所以 $BE \perp DE$. 又因为 $BE \perp A_1D$，$DE \cap A_1D = D$，

所以 $BE \perp$ 平面 A_1DE .

因为 $A_1E \subset$ 平面 A_1DE，

所以 $A_1E \perp BE$.

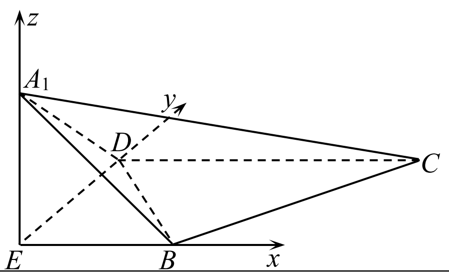
又因为 $A_1E \perp DE$，$BE \cap DE = E$，

所以 $A_1E \perp$ 平面 $BCDE$. --------------------5 分

（II）因为 $A_1E \perp$ 平面 $BCDE$，$BE \perp DE$，

所以以 E 为原点，分别以 EB，ED，EA_1 为

x, y, z 轴，建立空间直角坐标系，则 $B(1,0,0)$，



$D(0,\sqrt{3},0)$， $A_1(0,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{BA_1}=(-1,0,1)$, $\overrightarrow{BD}=(-1,\sqrt{3},0)$.

设平面 A_1BD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-x+z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=z\\ x=\sqrt{3}y\end{cases}$

令 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$.

因为 $BE\perp$ 平面 A_1DE，所以平面 A_1DE 的法向量 $\overrightarrow{EB}=(1,0,0)$，

所以 $\cos\left\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{EB}\right\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{EB}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

因为所求二面角为锐角，

所以二面角 $E-A_1D-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.　　　------------------10 分

（III）假设在线段 BD 上存在一点 P，使得平面 $A_1EP\perp$ 平面 A_1BD .

设 $P(x,y,z)$， $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD}(0\le\lambda\le1)$，则 $(x-1,y,z)=\lambda(-1,\sqrt{3},0)$.

所以 $P(1-\lambda,\sqrt{3}\lambda,0)$.

所以 $\overrightarrow{EA_1}=(0,0,1)$， $\overrightarrow{EP}=(1-\lambda,\sqrt{3}\lambda,0)$.

设平面 A_1EP 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EA_1}=z=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EP}=(1-\lambda)x+\sqrt{3}\lambda y=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}z=0\\ (1-\lambda)x=-\sqrt{3}\lambda y\end{cases}$，

令 $x=\sqrt{3}\lambda$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3}\lambda,\lambda-1,0)$.

因为平面 $A_1EP\perp$ 平面 A_1BD，

所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=3\lambda+\lambda-1=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}\in[0,1]$，

所以在线段 BD 上存在点 P，使得平面 $A_1EP\perp$ 平面 A_1BD，且 $\dfrac{BP}{BD}=\dfrac{1}{4}$.

--------------------14 分

18.（共 14 分）

（Ⅰ）由题意，得$\begin{cases} b=1 \\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=\sqrt{2} \\ b=1 \end{cases}$.

所以椭圆 E 的标准方程是$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. --------------------5 分

(II)（1）当直线 AB $\perp$ x 轴时，$m=0$ 符合题意.

（2）当直线 AB 与 x 轴不垂直时，设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，

由$\begin{cases} y=k(x-1) \\ x^2+2y^2-2=0 \end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2(k^2-1)=0$，

由 $\Delta=(-4k^2)^2-8(1+2k^2)(k^2-1)>0$，得 $k\in\mathbf{R}$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{2(k^2-1)}{1+2k^2}$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\dfrac{-2k}{1+2k^2}$，

所以线段 AB 中点 C 的坐标为$\left(\dfrac{2k^2}{1+2k^2},\dfrac{-k}{1+2k^2}\right)$.

由题意可知，$k\neq 0$，故直线 MC 的方程为 $y+\dfrac{k}{1+2k^2}=-\dfrac{1}{k}\left(x-\dfrac{2k^2}{1+2k^2}\right)$，

令 $x=0$，$y=\dfrac{k}{1+2k^2}$，即 $m=\dfrac{k}{1+2k^2}$

当 $k>0$ 时，，得 $0<m=\dfrac{k}{1+2k^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{k}+2k}\le\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时“=”成立.

同理，当 $k<0$ 时，$0>m=\dfrac{k}{1+2k^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{k}+2k}\ge-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $k=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时“=”成立.

综上所述，实数 m 的取值范围为$\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$. --------------------14 分

19.（共 13 分）

解：（I）因为 $f(x)=ax^2+ax-xe^x$，

得 $f'(x)=2ax+a-e^x-xe^x$，所以 $f'(0)=a-1$.

因为曲线在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$，

所以 $f'(0)=a-1=1$，即 $a=2$.　　--------------------5 分

(II) 设 $h(x)=2ax+a-e^x-xe^x$，则 $h'(x)=2a-2e^x-xe^x=2a-(x+2)e^x$.

因为 $x<0$，所以 $x+2<2$，$e^x<1$.

又因为 $a>1$, 所以 $h'(x)>0$，

故 $h(x)=a(2x+1)-e^x(1+x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数.

又因 $h(0)=a-1>0$，$h(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}<0$，由零点存在性定理，存在唯一的 $x_0\in(-\frac{1}{2},0)$，有 $h(x_0)=0$.

当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$h(x)=f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上为减函数，

当 $x\in(x_0,0)$ 时，$h(x)=f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上为增函数，

所以 x_0 为函数 $f(x)$ 的极小值点.　　--------------------13 分

20.（共 13 分）

解：（I）因为数列：$1,4,9,x(x>9)$ 是“倒置系数”为 p 的“倒置数列”.

所以 $\frac{p}{x},\frac{p}{9},\frac{p}{4},p$ 也是该数列的项，且 $\frac{p}{x}<\frac{p}{9}<\frac{p}{4}<p$.

故 $\frac{p}{x}=1,\frac{p}{9}=4$，

即 $x=p=36$.　　--------------------3 分

（II）因为数列$\{a_n\}$是项数为m项的有穷正项等比数列，取$p=a_1\cdot a_m>0$，

对数列$\{a_n\}$中的任意一项$a_i(1\le i\le m)$，

$\frac{p}{a_i}=\frac{a_1a_m}{a_i}=\frac{a_ia_{m+1-i}}{a_i}=a_{m+1-i}$也是数列$\{a_n\}$中的一项，

由“倒置数列”的定义可知，数列$\{a_n\}$是“倒置数列”；

又因为数列$\{a_n\}$所有项之积是T，

所以$T^2=(a_1a_2a_3\cdots a_m)(a_ma_{m-1}a_{m-2}\cdots a_1)=(a_1a_m)^m=p^m$即$p=T^{\frac{2}{m}}$.

--------------------9分

（III）假设存在这样的等差数列$\{a_n\}$为“倒置数列”，设它的公差为$d(d>0)$，“倒置系数”为p.

因为数列$\{a_n\}$为递增数列，所以$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$

则$\frac{p}{a_1}>\frac{p}{a_2}>\frac{p}{a_3}>\cdots>\frac{p}{a_n}>\cdots$

又因为数列$\{a_n\}$为“倒置数列”，则正整数$\frac{p}{a_i}$也是数列$\{a_n\}$中的一项（$i=1,2,\cdots$），

故数列$\{a_n\}$必为有穷数列，不妨设项数为n项，

则$p=a_i\cdot a_{n+1-i}(1\le i\le n-1)$

则$a_1a_n=a_2a_{n-1}$，得$a_1a_n=(a_1+d)(a_n-d)$，

即$(n-2)d^2=0$由$n\ge 3$，故$d=0$，与$d>0$矛盾.

所以，不存在满足条件的数列$\{a_n\}$，使得它既是等差数列，又是“倒置数列”.

--------------------13分

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao