2023 年国家集训队第二轮选拔考试试题解析

孙启傲　王淳稷

(上海市上海中学, 200237)

指导教师: 王广廷

本文给出 2023 年第 64 届 IMO 中国数学奥林匹克国家集训队第二轮选拔考试的试题与解答. 本次试题新颖有趣, 值得思考与研究. 因作者水平有限, 不当之处在所难免. 请读者不吝赐教.

I. 试 题

13. 是否存在正无理数 x, 使得至多存在有限个正整数 n, 满足对任意整数 $1 \le k \le n$, 都有 $\{kx\} \ge \frac{1}{n-1}$?

14. 对非空有限实数集 B 和实数 x, 定义

$$d_B(x) = \min_{b \in B} |x - b|.$$

(1) 给定正整数 m. 求最小的实数 λ, 使得对任意正整数 n 和任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0,1]$, 都存在 m 元实数集 B, 满足

$$d_B(x_1) + d_B(x_2) + \cdots + d_B(x_n) \le \lambda n.$$

(2) 设 m 是正整数, ε 是正实数. 求证: 存在正整数 n 和非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 满足对任意 m 元实数集 B, 都有

$$d_B(x_1) + d_B(x_2) + \cdots + d_B(x_n) > (1 - \varepsilon)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

15. 对凸四边形 $ABCD$, 称其内部一点 P 为平衡的, 如果:

(1) P 不在 AC, BD 上;

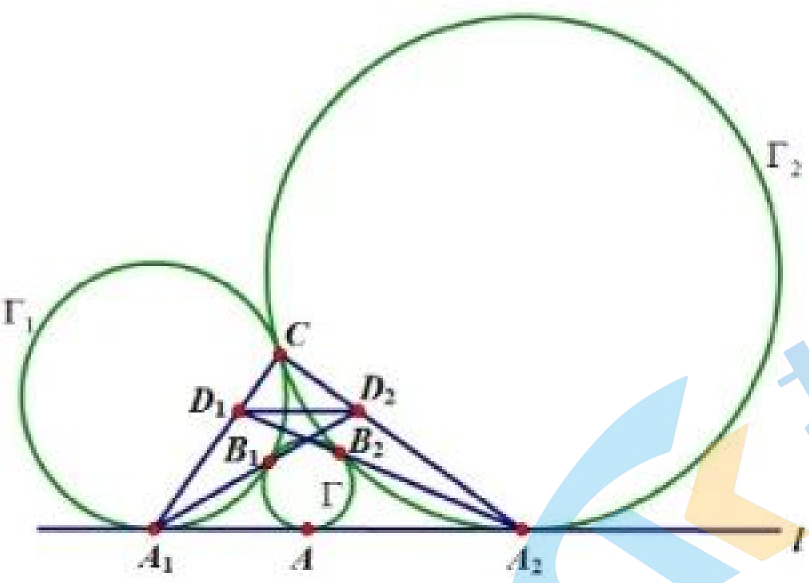
(2) 设 AP, BP, CP, DP 分别交 $ABCD$ 的边界于点 A', B', C', D', 则

$$AP \cdot PA' = BP \cdot PB' = CP \cdot PC' = DP \cdot PD'.$$

求平衡点数目的最大可能值.

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

16. 如图, 圆 $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ 两两外切, 且均与直线 l 相切. 设 Γ, Γ_1 切于点 B_1, Γ, Γ_2 切于点 B_2, Γ_1, Γ_2 切于点 C. $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ 分别与 l 切于点 A, A_1, A_2, 其中 A 在线段 A_1A_2 上. 设直线 A_1C, A_2B_2 交于点 D_1, 直线 A_2C, A_1B_1 交于点 D_2. 求证: $D_1D_2 \parallel l$.



17. 是否存在两两不同的整数 $a_1, a_2, \cdots$, 同时满足:

(1) 对任意正整数 k, $a_{k^2} > 0$ 且 $a_{k^2+k} < 0$;

(2) 对任意正整数 n, $a_{n+1} - a_n \leq 2023\sqrt{n}$?

18. 求最大的实数 λ, 使得对任意一个 100 阶双随机矩阵, 总可以从中选出 150 个元素, 并将其余 9850 个元素都改为 0, 满足此时每行元素之和与每列元素之和都不小于 λ.

注: 一个 n 阶双随机矩阵是一个 $n \times n$ 的方阵, 所有元素均为非负实数, 且每行元素之和与每列元素之和均为 1.

19. 设 A, B 是单位圆 ω 上的两个定点, 满足 $\sqrt{2} < AB < 2$. P 是 ω 上的一个动点, 满足 $\triangle ABP$ 是锐角三角形且 $AP > AB > BP$. 设 $\triangle ABP$ 的垂心为 H, S 是劣弧 $\overset{\frown}{AP}$ 上的一点, 满足 $SH = AH$. T 是劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的一点, 满足 $TB \parallel AP$. 设直线 ST, BP 交于点 Q. 求证: 以 HQ 为直径的圆经过一个定点.

20. 设整数 a, b, d 满足 $|a| \geq 2, d \geq 0, b \geq (|a|+1)^{d+1}$. 设 $f(x)$ 是次数为 d 的实系数多项式, 对每个正整数 n, 用 r_n 表示 $[f(n)a^n]$ 模 b 的余数. 求证: 若 $\{r_n\}$ 最终周期, 则 $f(x)$ 的系数都是有理数.

21. 给定整数 $n \geq 2$. 求最小的实数 λ, 使得对任意实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 b, 均有

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a_i - b|} + \sqrt{n\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a_i|}.$$

22. 求所有的函数 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, 使得对任意整数 a, b, c, 均有

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$$2f(a^2+b^2+c^2) - 2f(ab+bc+ca) = f(a-b)^2 + f(b-c)^2 + f(c-a)^2.$$

23. 设 p 是质数, 实数 $\lambda \in (0,1)$, 正整数 $s \le t < \frac{\lambda p}{12}$. S,T 分别是由 s,t 个连续正整数构成的集合, 满足

$$|\{(x,y) \in S \times T \mid kx \equiv y \pmod p\}| \ge 1 + \lambda s.$$

求证: 存在整数 a,b, 满足 $1 \le a \le \frac{1}{\lambda}, |b| \le \frac{t}{\lambda s}$, 且 $ka \equiv b \pmod p$.

24. 设 n 是正整数. 初始时, 一个 $2n \times 2n$ 的方格表中有 k 个黑格, 其余为白格. 允许进行如下两种操作:

(1) 若一个 2×2 正方形中恰有 3 个黑格, 则可以将第 4 个也变为格;

(2) 若一个 2×2 正方形中恰有 2 个黑格, 则可以将其中的黑格变为白格、白格变为黑格.

求最小的正整数 k, 使得有限次操作后所有格都是黑格.

II. 解答与评注

13. 是否存在正无理数 x, 使得至多存在有限个正整数 n, 满足对任意整数 $1 \le k \le n$, 都有 $\{kx\} \ge \frac{1}{n+1}$?

解 不存在.

考虑数列 $\{x\}, \{2x\}, \cdots$ 中, 称某项 $\{kx\}$ 是极小的, 如果它比前面的项都小 (由于 x 是无理数, 这些项两两不同).

设数列中所有极小的项 $\{a_i x\}, i = 1, 2, \cdots$, 其中 $a_1 < a_2 < \cdots$. 注意 $\{nx\}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ 在 $(0,1)$ 上稠密, 所以极小项有无穷多个.

任取 $i \ge 2$. 我们来说明 $n = a_i - 1$ 满足题目中的要求.

由于极小项的定义, 只需说明 $\{a_{i-1} x\} \ge \frac{1}{a_i}$.

考虑

$$\{a_{i-1} a_i x\} \le a_{i-1}\{a_i x\} < a_{i-1}\{a_{i-1} x\} < a_i \{a_{i-1} x\}.$$

结合 $a_i \in \mathbb{Z}$ 就说明 $\{a_{i-1} x\} \ge \frac{1}{a_i}$. 于是满足题目要求的 n 必定无穷多个. □

评注 本题是一道较为简单的关于小数部分的题目. 本题做法多样, 但都需要取出数列的极小项, 并且这里给出的证明是最简单的一个. 尽管解答如此简短, 不过存在与不存在之间的"循环"也卡住了部分同学.

14. 对非空有限实数集 B 和实数 x, 定义

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

$$d_B(x) = \min_{b \in B} |x - b|.$$

(1) 给定正整数 m. 求最小的实数 λ, 使得对任意正整数 n 和任意实数

$x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0,1]$, 都存在 m 元实数集 B, 满足

$$d_B(x_1) + d_B(x_2) + \cdots + d_B(x_n) \le \lambda n.$$

(2) 设 m 是正整数, ε 是正实数. 求证: 存在正整数 n 和非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 满足对任意 m 元实数集 B, 都有

$$d_B(x_1) + d_B(x_2) + \cdots + d_B(x_n) > (1-\varepsilon)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

解 (1) 答案为 $\frac{1}{4m-2}$.

一方面, 考虑

$$B_1 = \left\{0, \frac{2}{2m-1}, \cdots, \frac{2m-2}{2m-1}\right\},\ B_2 = \left\{\frac{1}{2m-1}, \frac{3}{2m-1}, \cdots, 1\right\}.$$

注意到对任意 $x \in [0,1]$,

$$d_{B_1}(x) + d_{B_2}(x) = \frac{1}{2m-1}.$$

故对任意一组 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0,1]$, 都有

$$d_{B_1}(x_1) + d_{B_1}(x_2) + \cdots + d_{B_1}(x_n) \le \frac{1}{4m-2}n$$

或

$$d_{B_2}(x_1) + d_{B_2}(x_2) + \cdots + d_{B_2}(x_n) \le \frac{1}{4m-2}n$$

至少一个成立. 即 $\lambda = \frac{1}{4m-2}$ 可行.

下面证明 $\lambda \ge \frac{1}{4m-2}$.

考虑

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \left\{0, \frac{1}{2m-1}, \cdots, \frac{2m-2}{2m-1}, 1\right\}, n = 2m.$$

我们来证明任何 m 元集合 $B = \{b_1 < b_2 < \cdots < b_m\}$, 均有

$$d_B(x_1) + d_B(x_2) + \cdots + d_B(x_n) \ge \frac{1}{4m-2}n.$$

为方便, 我们不妨"将坐标轴放大 $2m-1$ 倍", 即 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \{0, 1, \cdots, 2m-1\}$. 来证明

$$d_B(x_1) + d_B(x_2) + \cdots + d_B(x_n) \ge \frac{1}{2}n = m.$$

令每个 x_i 对应到 B 中离它最近的元素. 若有左右各一个则对应左边那个.

考虑每个 b_i 被对应了多少次. 设为 t_i 次, $i = 1, 2, \cdots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} t_i = 2m$. 来计算所有对应到 b_i 的数到它的距离之和.

当 $t_i \ge 2$ 时, 这 t_i 个整数中最远的两个距离至少是 $t_i - 1$.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

这说明这两个数到 t_i 距离之和至少是 $t_i - 1$, 说明所有对应到 b_i 的数到它的距离之和至少是 $t_i - 1$.

事实上当 $t_i = 0, 1$ 时上面式子也显然正确. 于是对所有 i 求和得到

$$d_B(x_1) + d_B(x_2) + \cdots + d_B(x_n) \geq \sum_{i=1}^{m}(t_i - 1) = m.$$

于是所求 λ 最小值是 $\frac{1}{4m-2}$.

(2) 我们取

$$n > 2^{\frac{4m}{\varepsilon}}, x_i = \frac{1}{i}.$$

我们不妨送给 B 一个元素 0. 并不妨设 B 中元素非负.

假设 $B = \{0 < y_1 < \cdots < y_m\}$. 记 F_i 表示 x_j 到 0 的距离的总和减去到 $\{0, y_i\}$ 的距离的总和. (可以看作加入元素 y_i 后距离之和的改良值.)

显然有

$$d_B(x_1) + d_B(x_2) + \cdots + d_B(x_n) > \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{i=1}^{m} F_i.$$

下面估计 F_j.

对于 $\frac{1}{j} > \frac{1}{2}y_i$ 的 $x_j = \frac{1}{j}$, 它对于 F_i 的贡献至多是 y_i. 其余的 x_j 则没有贡献. 而有贡献的 x_j 个数至多是 $\frac{2}{y_i}$, 说明

$$F_j < y_j \cdot \frac{2}{y_i} = 2.$$

于是

$$d_B(x_1) + d_B(x_2) + \cdots + d_B(x_n) > \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{i=1}^{m} F_i > \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - 2m.$$

当 $n > 2^{\frac{4m}{\varepsilon}}$ 时,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} > \frac{1}{2} \cdot \log_2 n > \frac{1}{\varepsilon} \cdot 2m$$

$$\Rightarrow d_B(x_1) + d_B(x_2) + \cdots + d_B(x_n) > (1 - \varepsilon)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

得证. □

评注 本题两小问的想法很不一样. 第一小问是求最佳常数, 通常我们会考虑均匀/加权分布或者散点式分布的情况, 而凑巧的是通过观察 m 较小的情况发现均匀的散点分布就能达到目的. 证明中的前半部分较为简单, 而后半部分较难. 事实上, 后半部分也可以选取以下的构造来证明 $\lambda \geq \frac{1}{4m-2}$:

$$n = 2m - 1, \{x_i\} = \left\{0, \frac{1}{2m-2}, \cdots, \frac{2m-3}{2m-2}, 1\right\}.$$

其证明类似, 留给读者思考.

第二小问则是去猜测要求的 x_i 的分布, 运气较好的话能之间猜出倒数分布. 并且倒数分布的证明似乎是最简单的.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

15. 对凸四边形 $ABCD$, 称其内部一点 P 为平衡的, 如果:

(1) P 不在 AC, BD 上;

(2) 设 AP, BP, CP, DP 分别交 $ABCD$ 的边界于点 A', B', C', D', 则

$$AP \cdot PA' = BP \cdot PB' = CP \cdot PC' = DP \cdot PD'.$$

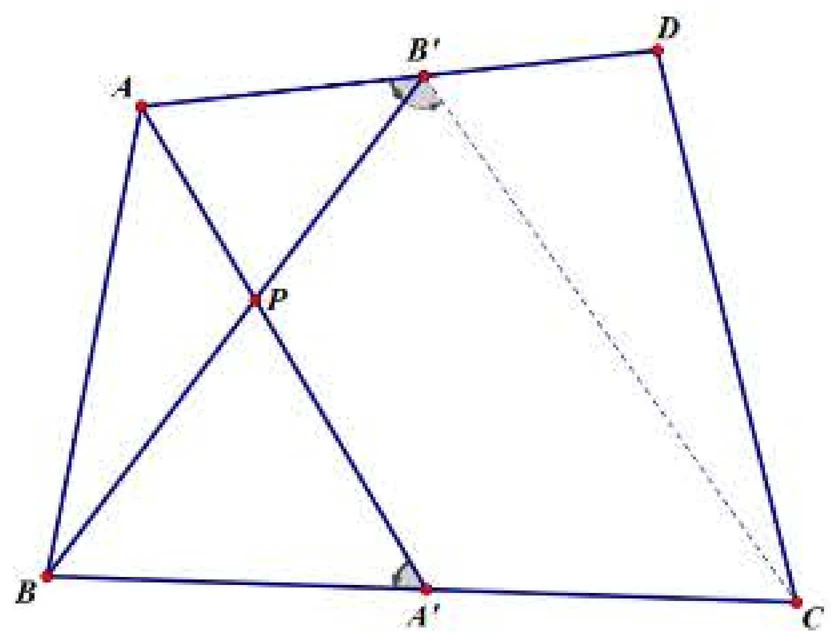
求平衡点数目的最大可能值.

解 对角线 AC, BD 将四边形内部分成四个区域. 称以 AB 为一边的区域是 AB 区域.

下面考察 AB 区域的平衡点.

过 P 反演易得 $B'PA'CD$ 五点共圆. 由条件 $ABB'A'$ 也共圆, 结合 $A'B'CD$ 共圆知 $AB \parallel CD$.

也就是说, 若区域 AB 内有平衡点, 必定有 $AB \parallel CD$.



更进一步, 有

$$\angle AB'B = \angle AA'B = \angle BB'C.$$

对称地有 $\angle AA'B = \angle AA'D$.

反过来, 如果线段 AD 上存在一点 B' 满足 $\angle AB'B = \angle BB'C$, 作 ABB' 外接圆, 如果它和线段 BC 有交点 A', 那么作 AA', BB' 交于点 P, 不难推得:

(1) $\angle AA'B = \angle AA'D$, (2) P 是 AB 区域平衡点.

回到原题: 若 $ABCD$ 两组对边都不平行, 则没有平衡点.

情形 1. 当 $ABCD$ 是梯形, $AB \parallel CD$. 不妨设 DA, CB 延长线交于点 T.

此时只有 AB, CD 区域才能有平衡点. 比如看 AB 区域.

下面来看如何判断满足 $\angle AB'B = \angle BB'C$ 的 B' 是否存在.

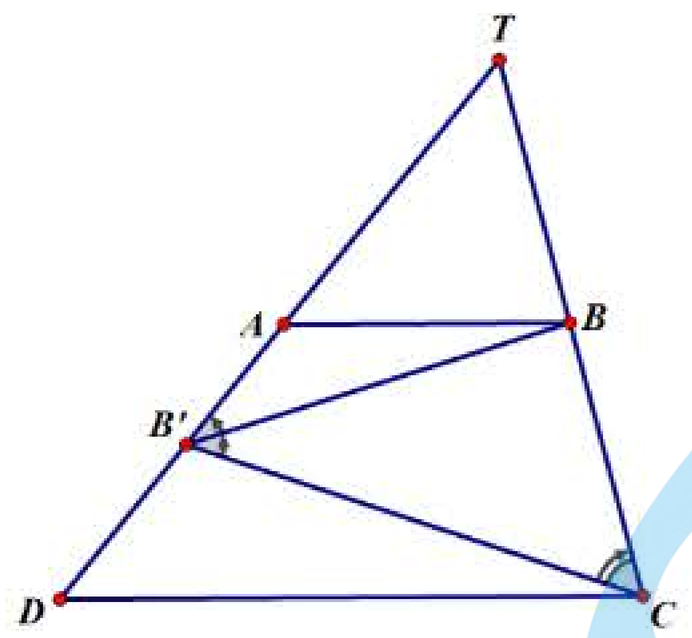
事实上这等价于 $\angle TB'B = \angle BB'C$. 而这样的 B' 轨迹是一个阿波罗尼斯圆与边 AD 的交点, 故 B' 至多两个. 这说明 P 至多两个. 同理 CD 区域平衡点也至多两个.

下面证明, AB 区域至多一个平衡点.

$\angle C, \angle D$ 至少一个是锐角. 不妨设为 $\angle C$.

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

我们来证明满足 $\angle AB'B=\angle BB'C$ 的 B' 在线段 AD 上至多一个.



对 $\triangle ABB', \triangle BB'C$ 使用正弦定理知:

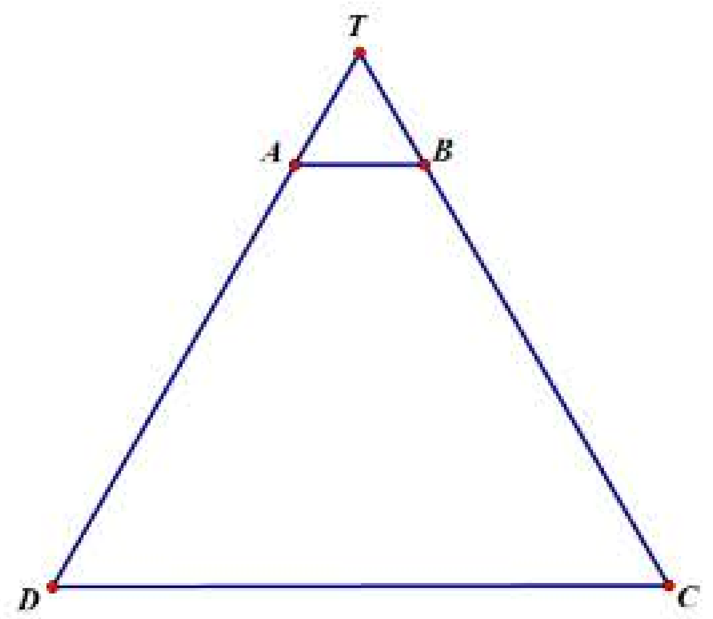
$$\angle AB'B=\angle BB'C \Leftrightarrow AB\cdot\sin\angle A=BC\cdot\sin\angle B'CB.$$

即 $\sin\angle B'CB$ 是一个定值. 但是 $\angle B'CB<\angle C<90°$, 说明 $\angle B'CB$ 只有一种取值.

故满足 $\angle AB'B=\angle BB'C$ 的 B' 在线段 AD 上至多一个. 所以 AB 区域至多一个平衡点.

所以梯形中至多三个平衡点.

顺便我们可以给出如下的构造: 令 $\triangle TCD$ 为正三角形, $\frac{AB}{CD}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}-\varepsilon$.

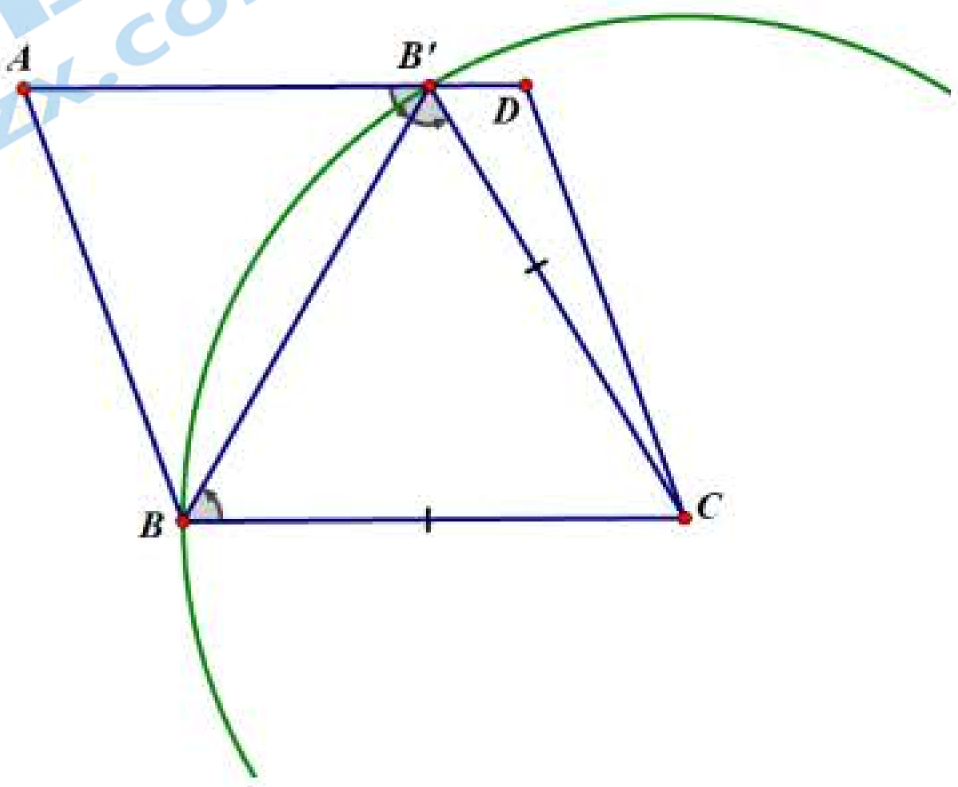


不难验证它在 AB 区域有一个平衡点, 在 CD 区域有两个平衡点.

情形 2. 当 $ABCD$ 是平行四边形.

比如考虑 AB 区域的平衡点. 不妨设 $\angle B\leq 90°$.有

$$\angle B'BC=\angle AB'B=\angle BB'C\Rightarrow BC=B'C.$$

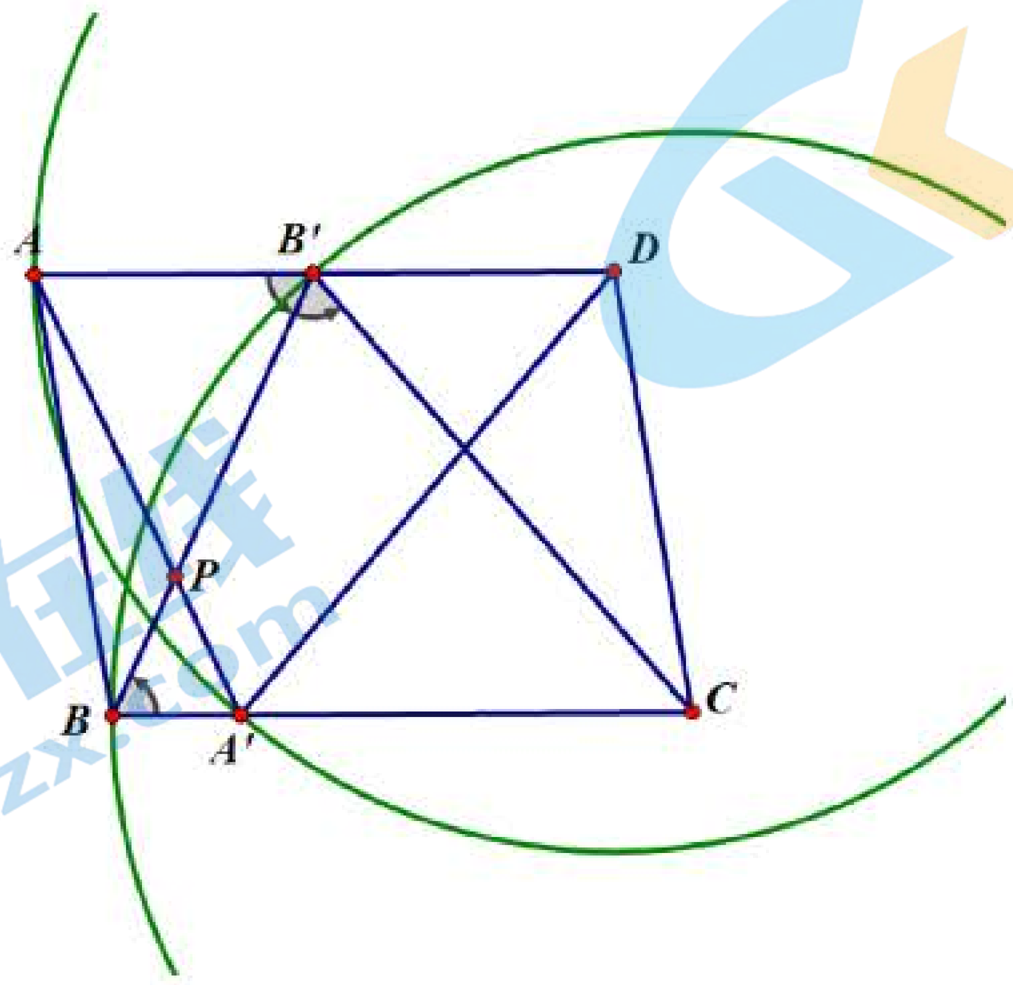


关注北京高考在线官方微信： 京考一点通（微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

但是 $\angle B \leq 90^\circ \Rightarrow B'$ 至多一个. 故 AB 区域至多有一个平衡点.

同理四个区域各至多一个平衡点.

容易发现, AB 区域的平衡点存在当且仅当 CD 区域的平衡点存在 (两个图中心对称).



由 $\angle B > 90^\circ$, B' 存在需要 $CB > CD$.

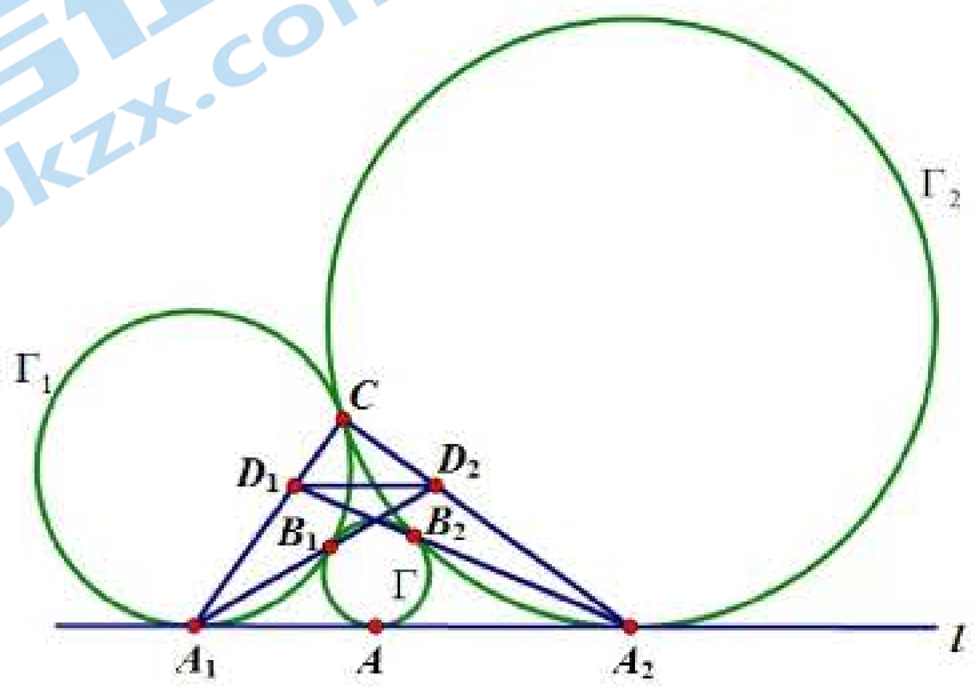
所以 AB, CD 区域的平衡点存在需要 $CB > CD$. 同理, BC, AD 区域的平衡点存在需要 $BC < CD$.

这不可能同时成立, 故平行四边形至多有两个平衡点.

综上, 答案为 3. □

评注 本题是 (看似是若则题的) 较为繁琐的几何不等式. 其关键在于发现平衡点存在需要对边平行, 进而分两种情况讨论, 并给出平衡点的刻画. 其用到的几何步骤不多且不难, 主要考查转化命题的能力.

16. 如图, 圆 $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ 两两外切, 且均与直线 l 相切. 设 Γ, Γ_1 切于点 B_1; Γ, Γ_2 切于点 B_2, Γ_1, Γ_2 切于点 C. $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ 分别与 l 切于点 A, A_1, A_2, 其中 A 在线段 A_1A_2 上. 设直线 A_1C, A_2B_2 交于点 D_1, 直线 A_2C, A_1B_1 交于点 D_2. 求证: $D_1D_2 \parallel l$.

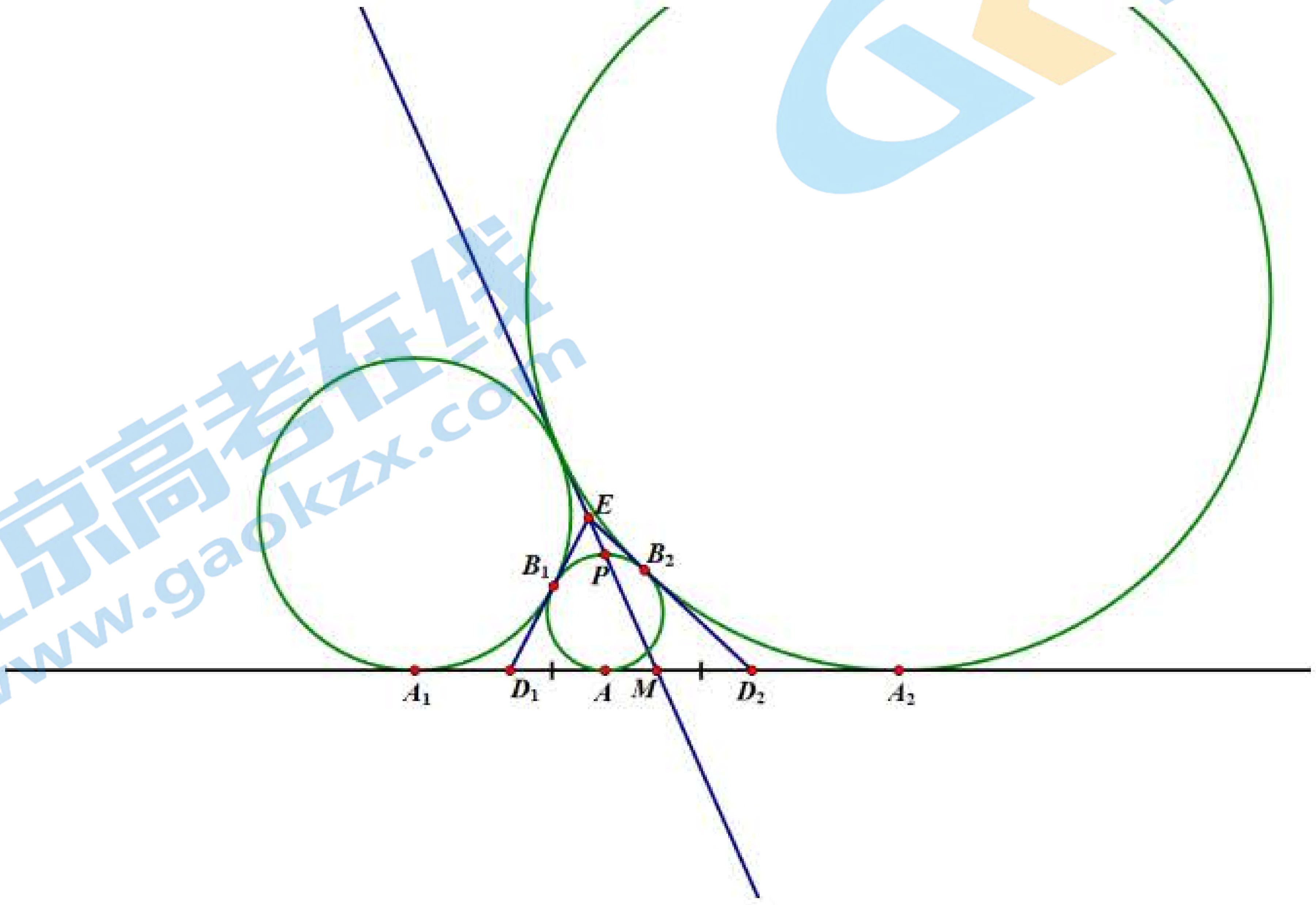


关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

证明 设圆 Γ 中 A 的对径点为 P. 那么由 Γ,Γ_1 关于 B_1 位似知 A_1B_1P 共线, 同理 A_2B_2P 共线.

由 Ceva 定理, 结论等价于证明 CP 平分 A_1A_2. 这也等价于 CP 是 Γ_1,Γ_2 内公切线.

设三个圆的根心为 E, 作 Γ,Γ_1 的内公切线交 l 于 D_1, 类似地 D_2.



则 Γ 为 $\triangle ED_1D_2$ 的内切圆. 设 EP 交 A_1A_2 于 M.

则熟知由 $D_1A = MD_2$ 可得

$$A_1M = A_1D_1 + D_1M = D_1A + AD_2 = MD_2 + D_2A_2 = MA_2.$$

于是 M 为 A_1A_2 中点, 即 P 在 Γ_1,Γ_2 内公切线上. 得证. $\square$

评注 本题是简单的几何题. 在发现结论等价于 CP 是 Γ_1,Γ_2 内公切线之和即使计算也十分简单.

17. 是否存在两两不同的整数 $a_1,a_2,\cdots$, 同时满足:

(1) 对任意正整数 k, $a_{k^2} > 0$ 且 $a_{k^2+k} < 0$;

(2) 对任意正整数 n, $a_{n+1} - a_n \leq 2023\sqrt{n}$?

解 不存在.

对于 $k \in \mathbb{Z}_+$, 设 a_{k^2-k} 到 a_{k^2+k} 中最大项为 a_{t_k}. 设 a_{k^2} 到 $a_{(k+1)^2}$ 中最小项为 a_{s_k}. 则由条件, $a_{t_k} > 0, a_{s_k} < 0$.

待定 $n > 10000$.

对 $k \in \mathbb{Z}_+$, 称 k 是"上好"的, 如果 $a_{t_k} \geq n$. 则对于这样的 k, 考虑 a_{t_k} 到 a_{k^2+k} 中, 两两差不超过 $4046k$. 于是这些项中在 $1,2,\cdots,n$ 中至少有 $\frac{n}{4046k} - 1$ 项.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

于是

$$\sum_{k\le n,k\text{上好的}}(\frac{n}{4046k}-1)\le n.$$

$$\Rightarrow \sum_{k\le n,k\text{上好的}}\frac{n}{4046k}\le 2n.$$

$$\Rightarrow \sum_{k\le n,k\text{上好的}}\frac{1}{k}\le 10000.$$

同样对于 s_k 可定义“下好的”，有

$$\sum_{k\le n,k\text{下好的}}\frac{1}{k}\le 10000.$$

称 k 是“好的”，如果 k 是上好的或者是下好的.

那么有

$$\sum_{k\le n,k\text{好的}}\frac{1}{k}\le 20000.$$

对于坏的 k，由定义知 a_{k^2} 到 a_{k^2+k} 都在 $(-n,n)$ 中.

$$\Rightarrow \sum_{k<n,k\text{坏的}}k\le 2n.$$

说明 $1,\cdots,n$ 中至多 $10\sqrt{n}$ 个坏数.

$$\Rightarrow \sum_{k\le n,k\text{好的}}\frac{1}{k}\ge\frac{1}{10}\ln\frac{n}{10\sqrt{n}}.$$

当 n 充分大时右式大于20000. 矛盾. 故不存在这样的数列. □

评注 本题是中等难度的代数题，大多数同学都很快猜到不存在. 本题的估计想法也比较自然，即考虑占据绝对值小于 n 的项的分布，并利用调和级数发散性.

18. 求最大的实数 λ，使得对任意一个 100 阶双随机矩阵，总可以从中选出 150 个元素，并将其余 9850 个元素都改为 0，满足此时每行元素之和与每列元素之和都不小于 λ.

注: 一个 n 阶双随机矩阵是一个 $n\times n$ 的方阵，所有元素均为非负实数，且每行元素之和与每列元素之和均为 1.

解 答案为 $\frac{17}{1900}=\frac{51}{75\cdot 76}$.

转化成图论语言：对一个边非负赋值的二部图 $G=(A,B,E)$, A,B 各100个点且每点权为 1，总能取 G 一个含至多 150 边的子图 H，使得 H 每点权至少是 λ.

一方面，考虑以下的图:

$$A=A_1\cup A_2, B=B_1\cup B_2,$$

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$$|A_1|=75,|A_2|=25,|B_1|=24,|B_2|=76.$$

A_1,B_1 之间的边赋值 $\frac{1}{75}$; A_1,B_2 之间的边赋值 $\lambda=\frac{17}{1900}$; A_2,B_1 之间的边赋值 0; A_2,B_2 之间的边赋值 $\frac{1}{76}$.

不难验证符合题意. 下面假设它有一个包含 150 边的子图 H 使得每点权大于 $\lambda=\frac{17}{1900}$.

不妨设没有 A_2,B_1 之间的边. 设 B_1 在 H 中连出 a 边, A_2 在 H 中连出 b 边. 则 A_1 中至少 $75-a$ 个点仅有与 B_2 之间得到边, 故它们每点度至少为 2. B_2 中至少 $76-b$ 个点仅有与 A_1 之间得到边, 它们每点度至少为 2. 于是总边数至少 $a+b+(75-a)+(76-b)=151$, 矛盾.

于是证明了 $\lambda\le\frac{17}{1900}$. 下面证明 $\lambda=\frac{17}{1900}$ 可行.

引理 对于二部图 $G=(A,B,E),n\in\mathbb{Z}_+$, 若对于任何 $X\subset A$,

$$|N(X)|\ge|X|-n,$$

则 G 中有一个 $|A|-n$-匹配.

该引理是 Hall 定理的直接推论——在 B 中添加 n 个点连向 A 中所有点后利用 Hall 即可得到证明.

回到原题. 设 G 中所有权重不小于 λ 的边构成子图 G'.

我们来证明 G' 符合引理中 $n=50$ 的条件, 从而由引理 G' 有一个 50-匹配.

假设某个 $X\subset A,|N(X)|\le|X|-51$. 记 $|X|=a,a\ge51$. 并记

$$A\backslash X=Y,Z=N(X),B\backslash Z=W.$$

则 X,W 之间每边权重小于 $\frac{17}{1900}$. $\Rightarrow W$ 中每点向 Y 中权重至少 $1-\lambda a$.

但是 Y 中每点向 W 中权重至多是 1, 于是有

$$|W|(1-\lambda a)<|Y|\Rightarrow(151-a)(1-\lambda a)<(100-a).$$

$$\Leftrightarrow a(151-a)>75\times76.$$

但是 $a\in\mathbb{Z}_+$, 这不可能. 矛盾.

于是我们证明了存在 G 的 50-匹配, 每边权重至少是 $\frac{17}{1900}$.

然后对于这 50 边没有碰到的共 100 个点, 取每个点连出权重最大的一条边 (该边权不小于 $\frac{1}{100}$).

这样取出了至多 150 边使得每点权重至少 $\frac{17}{1900}$.

综上答案为 $\frac{17}{1900}$. □

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

评注 本题是较难的图论题. 入手点是猜测取出一个较大的 50-匹配, 结合熟练使用 Hall 定理可以得到能保证取出权重多大的 50-匹配, 并且发现取等正好可以解决原问题. 该做法可以将 150 换成任何一个 100 到 200 之间的整数. 对于更大的情况读者可自行思考.

19. 设 A, B 是单位圆 ω 上的两个定点, 满足 $\sqrt{2} < AB < 2$. P 是 ω 上的一个动点, 满足 $\triangle ABP$ 是锐角三角形且 $AP > AB > BP$. 设 $\triangle ABP$ 的垂心为 H, S 是劣弧 $\overset{\frown}{AP}$ 上的一点, 满足 $SH = AH$. T 是劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的一点, 满足 $TB \parallel AP$. 设直线 ST, BP 交于点 Q . 求证: 以 HQ 为直径的圆经过一个定点.

证明 设 AB 中点为 M. 我们来证明以 HQ 为直径的圆过点 M.

采用复数法, 以 ω 为单位圆建立复平面, 用各点小写字母表示其对应复数.

$$h = a + b + p, AS \perp OH \Rightarrow as = \frac{h - o}{\overline{h - o}} = \frac{(a + b + p)abp}{ab + bp + ap}$$
$$\Rightarrow s = \frac{(a + b + p)bp}{ab + bp + pa}.$$

这里利用了 a, b, p 模长均为 1.

$$TB \parallel AP \Rightarrow t = \frac{ap}{b}.$$

重新定义 Q 在 BP 上并且 $MQ \perp HM$, 来证明 QST 共线.

$$q + bp\bar{q} = b + p, \quad \frac{q - m}{\overline{q - m}} = -\frac{h - m}{\overline{h - m}}.$$

联立得

$$q = \frac{p(b + p)}{p + a}.$$

只需证明 $q + st\bar{q} = s + t$. 代入后, 这等价于

$$\frac{p(b + p)}{p + a} + \frac{a^2 p(b + p)(a + b + p)}{b(ab + ap + bp)(p + a)} = \frac{(a + b + p)bp}{ab + ap + pb} + \frac{ap}{b}.$$

将分母带有 $ab + ap + bp$ 的两项移到一边通分:

$$\frac{p(b(b + p) - a(p + a))}{b(p + a)} = \frac{p(a + b + p)(b^2(p + a) - a^2(b + p))}{(ab + ap + bp)b(p + a)}.$$

因式分解得证. □

评注 本题是简单的几何题. 由于单位圆上有很多点, 所以采用复数法将十分方便.

20. 设整数 a, b, d 满足 $|a| \geq 2, d \geq 0, b \geq (|a| + 1)^{d+1}$. 设 $f(x)$ 是次数为 d 的实系数多项式. 对每个正整数 n, 用 r_n 表示 $[f(n)a^n]$ 模 b 的余数. 求证: 若 $\{r_n\}$ 最终周期, 则 $f(x)$ 的系数都是有理数.

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

证明 记 $[f(n)a^n]=x_n, \{f(n)a^n\}=y_n$.

由条件, 存在 $N,T\in\mathbb{Z}_+$, 使得对任意 $n\geq N, x_{n+T}-x_n$ 被 b 整除. 注意到 $a^Tf(n+T)-f(n)$ 为 d 次多项式, 记为 $g(n)$. 则 $a^ng(n)-(x_{n+T}-x_n)\in(-1,1)$.

考虑

$$\sum_{i=0}^{d+1}(a^{n+i}g(n+i))\cdot a^{d+1-i}\binom{d+1}{i}(-1)^i=0$$

$$\Rightarrow\sum_{i=0}^{d+1}(a^{n+i}g(n+i)-(x_{n+T+i}-x_{n-i}))\cdot a^{d+1-i}\binom{d+1}{i}(-1)^i\equiv 0 \pmod b$$

对任何 $n\geq N$ 成立.

但是

$$\left|\sum_{i=0}^{d+1}(a^{n+i}g(n+i)-(x_{n+T+i}-x_{n+i}))\cdot a^{d+1-i}\binom{d+1}{i}(-1)^i\right|$$
$$<\sum_{i=0}^{d+1}\left|a^{d+1-i}\binom{d+1}{i}\right|\leq(|a|+1)^{d+1}\leq b.$$

所以

$$\sum_{i=0}^{d+1}(a^{n+i}g(n+i)-(x_{n+T+i}-x_{n+i}))\cdot a^{d+1-i}\binom{d+1}{i}(-1)^i=0$$

$$\Rightarrow\sum_{i=0}^{d+1}(x_{n+T+i}-x_{n+i})\cdot a^{d+1-i}\binom{d+1}{i}(-1)^i=0$$

对任何 $n\geq N$ 成立.

于是 $x_{n+T}-x_n$ 在 $n\geq N$ 是 $d+2$ 项递推数列, 特征值为 $d+1$ 重 a. 即 $x_{n+T}-x_n=a^n\cdot h(n), h(x)$ 为 d 次多项式. 由插值公式以及 $x_n\in\mathbb{Z}_+$ 得 $h(x)\in\mathbb{Q}[x]$. 所以 $a^n(h(n)-g(n))\in(-1,1)$, 对任何 $n\geq N$.

这说明 $h(x)\equiv g(x)$. 再结合

$$a^Tf(n+T)-f(n)=g(n), h(x)\in\mathbb{Q}[x], |a|\geq 2$$

容易推出 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$. 得证. □

评注 本题是较简单的题目, 关键在于熟练运用递推数列性质以及放缩. 本题要证明的结论看似有些怪, 不过这提示我们从条件入手, 将整数、小数部分分开是经典的技巧.

21. 给定整数 $n\geq 2$. 求最小的实数 λ, 使得对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 b, 均有

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}\sqrt{|a_i-b|}+\sqrt{n\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|}\geq\sum_{i=1}^{n}\sqrt{|a_i|}.$$

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

解 答案为 $\frac{n-1+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$. (记这个值为 c).

一方面, 取 $a_1=\cdots=a_{n-1}=-1=b, a_n=n-1$, 则有 $\lambda\ge c$.

下面证明 $\lambda=c$ 可行.

假设 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=np\ne 0$, 考虑将 a_i,b 同时减去 p. 此时 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{|a_i-b|}$ 不变, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{|a_i|}$ 至多减少 $n\sqrt{p}$ (因为 $\sqrt{|x+y|}\le\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$). 而 $\sqrt{n|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i|}$ 减少了 $n\sqrt{p}$. 故调整后 LHS-RHS 不增.

故不妨设 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=0$. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 中有 t 个非负数, s 个负数. $s+t=n$. 设其中所有非负数的和为 A. 则由均值不等式,

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{|a_i|}\le(\sqrt{s}+\sqrt{t})\sqrt{A}.$$

对称地, 不妨设 $b\ge 0$. 注意到 $\sqrt{|x|}$ 是一个在除了奇异点 0 处之外上凸的函数. 有

$$\sum_{a_i\ge 0}\sqrt{|a_i-b|}\ge\sqrt{A-tb},$$

$$\sum_{a_i<0}\sqrt{|a_i-b|}\ge(s-1)\sqrt{b}+\sqrt{A+b}.$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{|a_i-b|}\ge\sqrt{A-tb}+(s-1)\sqrt{b}+\sqrt{A+b}.$$

而看上式右边在 b 移动时何时取最小值: 仍然利用 $\sqrt{|x|}$ 是一个在除了奇异点 0 处之外上凸的函数. 有: $\sqrt{A-tb}+(s-1)\sqrt{b}+\sqrt{A+b}$ 当 $b=0$ 或者 $\frac{A}{t}$ 时取最小. 即

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{|a_i-b|}\ge\min\left\{2\sqrt{A},(s-1)\sqrt{\frac{A}{t}}+\sqrt{(1+\frac{1}{t})A}\right\}.$$

于是我们只需证明:

$$c\min\left\{2\sqrt{A},(s-1)\sqrt{\frac{A}{t}}+\sqrt{(1+\frac{1}{t})A}\right\}\ge(\sqrt{s}+\sqrt{t})\sqrt{A}.$$

显然 $2c\ge\sqrt{2n}\ge\sqrt{s}+\sqrt{t}$.

下面证

$$c(s-1)\sqrt{\frac{1}{t}}+\sqrt{1+\frac{1}{t}}\ge\sqrt{s}+\sqrt{t}.$$

这等价于

$$\frac{s-1+\sqrt{t+1}}{\sqrt{n}}\ge\frac{\sqrt{st}+t}{n-1+\sqrt{n-1}}.$$

等价于

$$\frac{s-1+\sqrt{t+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\ge\frac{\sqrt{st}+t-(n-1+\sqrt{n-1})}{n-1+\sqrt{n-1}}.$$

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

注意到

$$s-1+\sqrt{t+1}-\sqrt{n}\geq s-1-\sqrt{s-1},$$

$$\sqrt{st}+t-(n-1+\sqrt{n-1})\leq\sqrt{st}-s\leq\sqrt{n-1}(\sqrt{s}-1).$$

并且

$$\frac{s-1-\sqrt{s-1}}{\sqrt{n}}\geq\frac{\sqrt{n-1}(\sqrt{s}-1)}{n-1+\sqrt{n-1}}$$

对于所有 $s\geq4$ 均成立.

对于 $s=1,2,3$ 直接代入

$$c(s-1)\sqrt{\frac{1}{t}}+\sqrt{1+\frac{1}{t}}\geq\sqrt{s}+\sqrt{t}.$$

容易检验. ($s=1$ 时取等号.)

综上, 答案为 $\frac{n-1+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$. □

评注 本题是较困难的代数题. 第一步把和调整成 0 能够极大地简化放缩 (如果没有发现这一点也可以做出来, 但是过程将十分繁琐). 事实上, 本题的结论还是比较松的, 可以直接使用均值不等式将右侧放缩. 之后利用凸性可以很好地进行放缩左边.

22. 求所有的函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, 使得对任意整数 a,b,c, 均有

$$2f(a^2+b^2+c^2)-2f(ab+bc+ca)=f(a-b)^2+f(b-c)^2+f(c-a)^2.$$

解 $f(x)\equiv x$ 或者 $f(x)\equiv 0$.

检验: 前者, $\mathrm{LHS}=\mathrm{RHS}=2\sum a^2+2\sum ab$. 后者, $\mathrm{LHS}=\mathrm{RHS}=0$.

下面证明 $f(x)\equiv x$ 或者 $f(x)\equiv 0$.

记条件为 $P(a,b,c)$.

$$P(a,0,0)\Rightarrow 2f(a^2)=f(a)^2+f(-a)^2.$$

$$P(a,a,0)\Rightarrow f(2a^2)=2f(a^2).$$

于是 $2f(1)=f(1)^2+f(-1)^2, f(2)=2f(1)$. 又

$$P(1,-1,0)\Rightarrow 2f(2)-2f(-1)=f(2)^2+2f(-1)^2.$$

联立得 $f(1)=1$ 或 0.

$$P(a,b,c),P(a,c,b)\Rightarrow\forall x+y+z=0,x,y,z\in\mathbb{Z},$$

$$f(x)^2+f(y)^2+f(z)^2=f(-x)^2+f(-y)^2+f(-z)^2.$$

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

记 $g(x)=f(x)^2-f(-x)^2$, 则

$$\forall x+y+z=0, x,y,z\in\mathbb{Z}, g(x)+g(y)+g(z)=0.$$

容易说明 $g(n)=cn, c$ 为常数.

情形 1. $f(1)=1$. 此时 $f(-1)=-1\Rightarrow g(1)=0$.

故 $g\equiv 0, f(-x)=\pm f(x)$. 结合 $2f(a^2)=f(a)^2+f(-a)^2\Rightarrow f(a^2)=f(a)^2$. 结合 $f(2a^2)=2f(a^2)\Rightarrow f(2a)=\pm 2f(a)$.

$$P(a,1,0)-P(a,-1,0)\Rightarrow 2f(a)+f(a-1)^2=2f(-a)+f(a+1)^2.$$

记之为 (1) 式.

$$P(a,2,-1)-P(-a,2,-1)$$

$$\Rightarrow 2f(a-2)+f(a-2)^2+f(a+1)^2=2f(-a-2)+f(a+2)^2+f(a-1)^2.$$

记之为 (2) 式.

称 n 好的, 如果 $f(n)=n$. 下面对 n 归纳证明 $n,-n$ 是好的.

(1) 式中 $a=3$ 并注意到 $f(2)=2, f(4)=\pm 4$, 得 $f(3)-f(-3)=6$ $\Rightarrow 3,-3$ 是好的.

(1) 式中令 $a=2$ 即得 -2 是好的.

$n=0,1,2,3$ 已经成立. 假设小于 n 时结论成立, 考虑 n 时.

若 n 是奇数, (1) 中令 $a=n$ 并由归假, $f(n)-f(-n)=2n\Rightarrow n,-n$ 是好的.

若 n 是偶数, 则由归假 $f(n), f(-n)=\pm n$. 同上知 $n+1, -(n+1)$ 是好的. 在 (1) 中令 $a=n$ 即得 $n,-n$ 是好的. 于是 $f(n)\equiv n$.

情形 2. $f(1)=0$. 此时 $f(-1)=0\Rightarrow g(1)=0$, 故 $g\equiv 0, f(-x)=\pm f(x)$. 结合 $2f(a^2)=f(a)^2+f(-a)^2\Rightarrow f(a^2)=f(a)^2$. 结合 $f(2a^2)=2f(a^2)\Rightarrow f(2a)=\pm 2f(a)$.

称 n 好的, 如果 $f(n)=0$. 下面对 n 归纳证明 $n,-n$ 是好的.

$n=0,1,2$ 已经成立. 假设小于 n 时结论成立, 考虑 n 时.

若 n 是奇数, (1) 中令 $a=n-1$ 并由归假 $\Rightarrow n$ 是好的. 故 $-n$ 是好的.

若 n 为偶数, 直接由归假以及 $f(2a)=\pm 2f(a)$ 得 $n,-n$ 好.

于是 $f(n)\equiv 0$.

综上有 $f(x)\equiv x$ 或者 $f(x)\equiv 0$. □

评注 本题是有一定难度的整数型函数方程. 其难点在于 $\sum a^2$ 并不好控制, 所以笔者的想法是消去该项. 有了这个想法就可以完成归纳. 本题还可以利用三平方和定理来刻画 $\sum a^2$.

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

23. 设 p 是质数, 实数 $\lambda \in (0,1)$, 正整数 $s \le t < \frac{\lambda p}{12}$. S, T 分别是由 s, t 个连续正整数构成的集合, 满足

$$|\{(x,y) \in S \times T \mid kx \equiv y \pmod p\}| \ge 1 + \lambda s.$$

求证: 存在整数 a, b, 满足 $1 \le a \le \frac{1}{\lambda}, |b| \le \frac{t}{\lambda s}$, 且 $ka \equiv b \pmod p$.

证明 取最小的正整数 a, 使得 $ka \pmod p$ 落在 $[-\frac{t}{\lambda s}, \frac{t}{\lambda s}]$ 中.

一方面, 由抽屉原理,

$$\{(x,y) \in S \times T \mid kx \equiv y \pmod p\}$$

中至少 $1 + \lambda s$ 个元素有两个对应的 y 的差至多 $\frac{t}{\lambda s}$, 说明存在 S 中两个数的差乘 k 后落在 $[-\frac{t}{\lambda s}, \frac{t}{\lambda s}]$ 中.

故 $a \le s$.

假设 $a > \frac{1}{\lambda}$. 不妨设 $ka \pmod p$ 落在 $[0, \frac{t}{\lambda s}]$ 中. 将 S 中的元素按 $\bmod a$ 分类. 注意到 $(n+a)k \pmod p$ 落在 $nk \pmod p$ 后面至多 $\frac{t}{\lambda s}$ 的位置. 每一类至多 $\frac{s}{a} + 1$ 个数, 故每一类乘 k 后 $\bmod p$ 落在一段长度至多

$$\frac{t}{\lambda s} \cdot \frac{s}{a} \le t$$

的区间中.

称 S 中 $\bmod a$ 一类是好的, 如果这类中有某个数乘 k 后落在 T 中. 对每个好类, 取 S 中 $\bmod a$ 该类中最小的数. 设所有 $l+1$ 个好类对应 $x_0, \cdots, x_l \in S$. 那么这 $l+1$ 个数两两差小于 a.

显然至少一个好类. 如果只有一个好类, 那么

$$|\{(x,y) \in S \times T \mid kx \equiv y \pmod p\}| \le \frac{s}{a} + 1 < 1 + \lambda s.$$

矛盾! 所以 $l \in \mathbb{Z}_+$.

注意每一类的数"升序排列"并且总长度不会超过 t, 并且结合好类的定义, 推出 $kx_0, \cdots, kx_l \pmod p$ 落在一段长度不超过 $2t$ 的区间内. 于是存在 $kx_0, \cdots, kx_l$ 中两者, $\bmod p$ 的差至多是 $\frac{2t}{l}$.

不妨设为 $bk \pmod p \in [-\frac{2t}{l}, \frac{2t}{l}]$. 其中 b 是那两个 x_i 的差, $b \in \mathbb{Z}_+, b < a$.

设 $a = qb + r, q, r \in \mathbb{Z}, |r| \le \frac{b}{2}$. 记 (x) 表示 $x \pmod p$ 的绝对值最小剩余 (即 $(x) \in (-\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$.) 则 $b(rk) \equiv brk \equiv r(bk) \pmod p$.

考虑

$$|\{(x,y) \in S \times T \mid kx \equiv y \pmod p\}| \le (l+1)(\frac{s}{a} + 1)$$

$$\Rightarrow (1+l)(\frac{s}{a} + 1) \ge 1 + \lambda s \Rightarrow a \le \frac{3l}{\lambda}.$$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

于是
$$q|r(bk)| < a \cdot \frac{2t}{l} \le \frac{3l}{\lambda} \cdot \frac{2t}{l} < \frac{6t}{\lambda} \le \frac{p}{2}.$$

若 $b(rk) = r(bk)$, 则 $(ak) = q(bk) + (rk)$, 但是 $|r| \le \frac{b}{2}$, 推出
$$(rk) \le \frac{1}{2}(bk) \Rightarrow |(rk)| < |(ak)|,$$
与 a 最小性矛盾! 故 $|b(rk)| \ge p - |r(bk)|$. 所以 $|(rk)| = |(ak - q \cdot bk)|$ 中:
$$\text{左边} \ \ge \frac{p - r\frac{2t}{l}}{b}, \text{右边} \ \le |(ak)| + q|(bk)| \le \frac{t}{\lambda s} + q\frac{2t}{l}.$$
故有
$$\begin{aligned}\frac{p - r\frac{2t}{l}}{b} \le \frac{t}{\lambda s} + q\frac{2t}{l} &\Rightarrow \frac{2t}{l} \cdot (bq + r) + b\frac{t}{\lambda s} \ge p \\ &\Rightarrow \frac{2t}{l} \cdot a + a\frac{t}{\lambda s} \ge p.\end{aligned}$$
而
$$a\frac{t}{\lambda s} \le s\frac{t}{\lambda s} < \frac{p}{12}.$$
于是
$$\frac{2t}{l} \cdot a > \frac{11}{12}p \Rightarrow a > \frac{11l}{2\lambda}.$$
这与 $a \le \frac{3l}{\lambda}$ 矛盾!

综上得证. □

评注 本题是难度较大的数论题. 在取出最小的 a 之后, 入手点可以考虑特殊情况, 比如仅有一类或者两类触碰到 T 的情况, 然后可以用类似的估计推广到更多类的情况. (其核心在于, 如果 a 比较接近 $\frac{1}{\lambda}$ 时, 通过 b 来放缩与 a 最小性推矛盾) 本题也可以通过对偶形式: 即一开始取出
$$\{ak \mod (p) \mid a \in \mathbb{Z}_+, a \le \frac{1}{\lambda}\}$$
中最小绝对剩余最小者. (这样做似乎过程更加简单)

从另一个角度的看法来自江城同学:

记 (kx) 为 kx 模 p 的余数。

我们希望证明除非一些很特殊的情况，$(kx)(1 \le x \le r)$ 的分布是几乎均匀的（不同部分密度至多差常数倍）。

实际上，将这些数从小到大排序，相邻的差不超过三种，记为 $a, b, p-c$，其中 $a = b - c$，再设 $a = (uk), b = (vk), c = (wk)$，可以视作从某个 x_0 开始，若小于 $p - u$ 则加上 u，(kx) 加上 a，否则若大于 w 则减去 w（可能视 a, c 的大小关系相反，但不重要），剩下的情况加上 v。这样的一个过程中任意两个区间的密度比不超过 3，除非整个都是等差数列。

如果是等差数列容易得证，否则可以证明所有的 (kx) 分布不超过总长的 $\frac{1}{3}$，用连分数表示或者各种方法也很容易推出矛盾。

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

24. 设 n 是正整数. 初始时, 一个 $2n\times 2n$ 的方格表中有 k 个黑格, 其余为白格. 允许进行如下两种操作:

(1) 若一个 2×2 正方形中恰有 3 个黑格, 则可以将第 4 个也变为格;

(2) 若一个 2×2 正方形中恰有 2 个黑格, 则可以将其中的黑格变为白格、白格变为黑格.

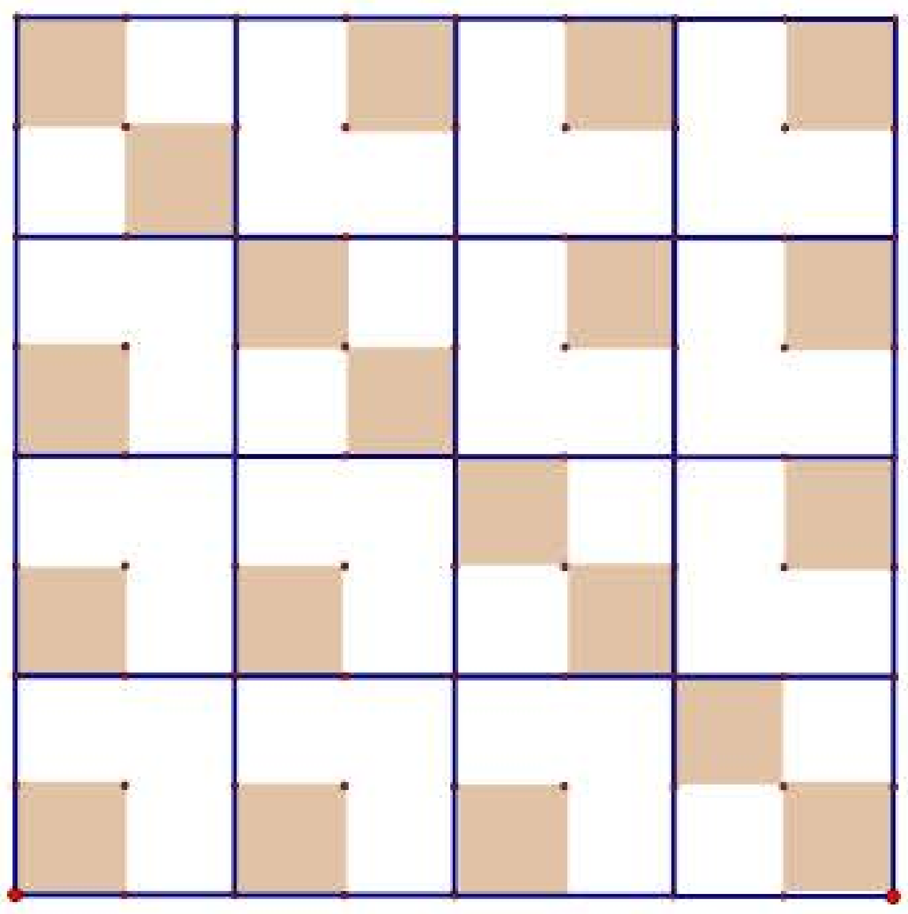
求最小的正整数 k, 使得有限次操作后所有格都是黑格.

解 答案为 n^2+n+1.

考虑如下的构造: 染黑主对角线上 $2n$ 格. 将方格表分成一些 2×2.

对于主对角线下方的 2×2, 染黑左下角的格.

对于主对角线上方的 2×2, 染黑右上角的格.



我们来证明无论怎么进行 (2) 都无法进行 (1) .

将表格红蓝相间二染色. 比如让图中对角线上的格是红格. 每个状态下, 将两个黑格连边, 当且仅当它们有公共顶点. 则图中有一些连通分支.

我们将对操作次数 t 归纳证明: 第 t 次操作后,

(a) 没有两个黑格有公共边; (这样每个连通分支是同色的)

(b) 每个红连通分支是一条左上—右下方向的链 (可以只有一个点) ;

(c) 每个蓝连通分支是一条左下—右上方向的链 (可以只有一个点) .

$t=0$ 时成立.

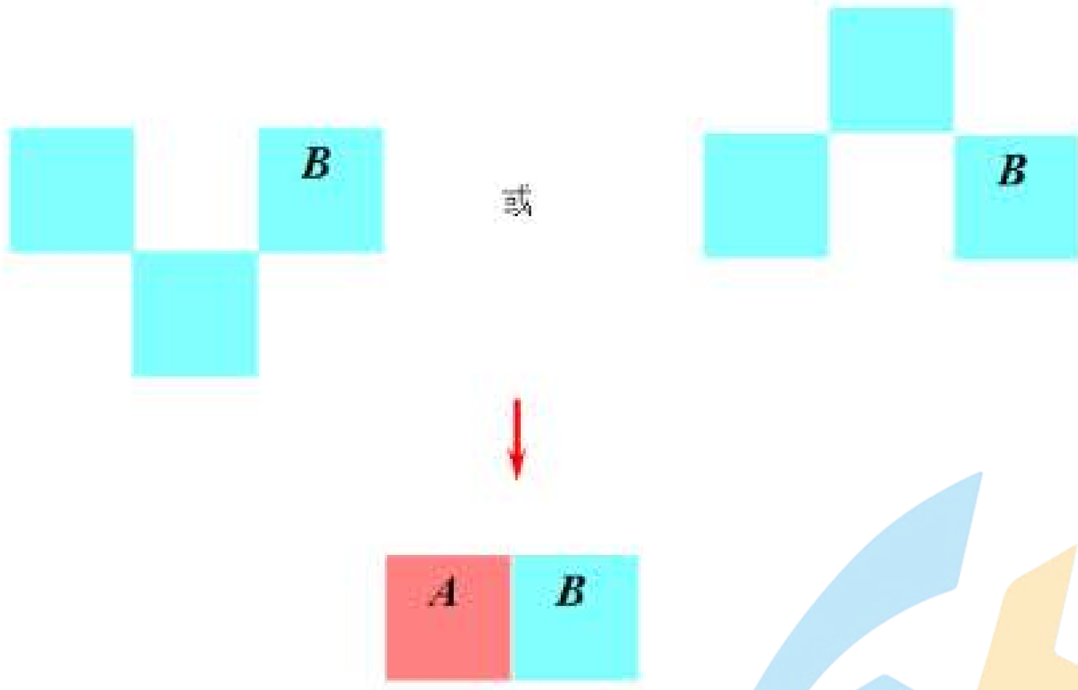
假设结论对于 $t-1$ 时成立, 考虑对这个状态做一次操作 (2) 后的状态.

那么这次操作的 2×2 中一定是两个对角相邻的黑格.

假设违反了 (a) : 假设出现了红格 A, 蓝格 B 相邻. 由归假, 不妨设 A 是新出现的. 这导致操作前违反 (c), 矛盾!

假设违反了 (b) : 假设出现了两个红格 C,D 是左上—右下相邻的, 那么容易讨论发现操作前必定违反 (a) 或 (c).

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。



同理也不可能违反 (c).

于是无论怎么操作都不可能得到两黑格有公共边. 当然也不可能进行操作(1).

于是 $k \geq n^2+n+1$.

下面证明, 如果有某种状态, 无论怎么进行 (2) 都无法达成一个 2×2 中有三个黑格, 并且整张表不全是黑格, 那么其中黑格至多是 n^2+n.

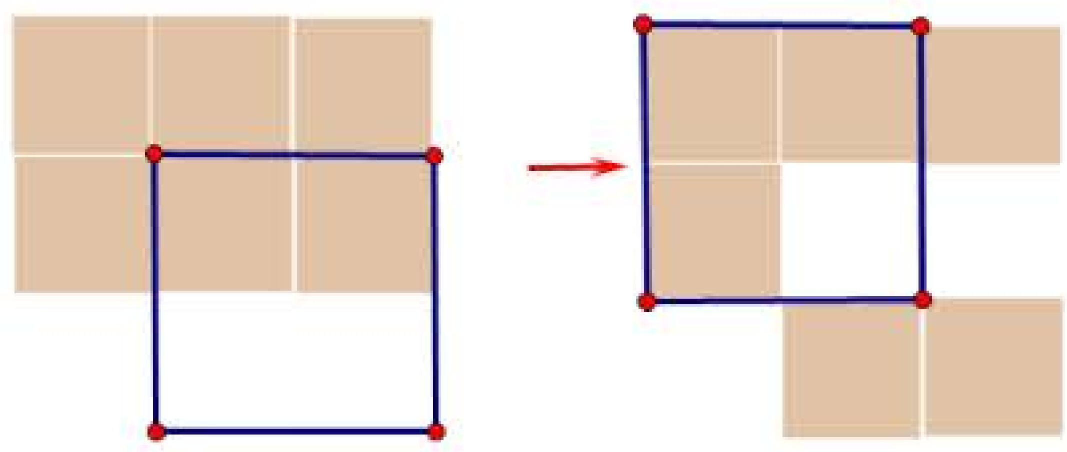
$n=1,2$ 显然. 下设 $n \geq 3$.

首先, 如果有限步操作后能出现两个黑格相邻(以下的相邻都指有公共边).

比如它们在同一行. 那么操作 (2) 允许它们上下平移.

注意到如果有一个 $a\times b$ 中全是黑格 $(a\geq 3, b\geq 2)$, 如下图, 可以进行操作 (1)

.



所以容易发现这两个相邻黑格所在的两列共至多 4 格.

否则: 可以将这两列所有格平移到一个 $2\times b, b\geq 3$ 的矩形. 考虑该矩形所在的黑格连通块, 由于不能进行 (1), 这个连通块必定是一个矩形. 不妨设它没有贴合下边界, 那么可以运用上图的操作完成扩展. 矛盾!

并且这两行有至少三格, 则必恰为四格, 说明可以通过平移生成任何相邻两行的竖着相邻的两格. 这说明一共就只有四格, 成立.

于是每当我们看到这样的两格, 就将这两列删去. 至多删去了 2 个黑格.

如果既删去了行又删去了列, 说明可以操作使得既有两格横向相邻, 又有两个纵向相邻.

再由相邻两格可以平移, 可以将这两对黑格移动至相邻, 然后通过类似讨论可以操作 (1). 矛盾.

于是不妨设只删去了一些列. 并且剩下的表格中, 无论如何进行操作 (2) 都无

北京高考在线 www.gaokzx.com

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

法得到两格相邻.

设删去了 $2m$ 列, 剩下至多 $m+1$ 个列数之和 $2n-2m$ 的 n 行的子表.

我们将证明: 对于相邻 (没被删去的) 三列, 设三列有 a,b,c 个黑格, 则

$$a+2b+c\le 2n+1.$$

首先 $a,b,c\le n$. 故不妨设 $b>0$.

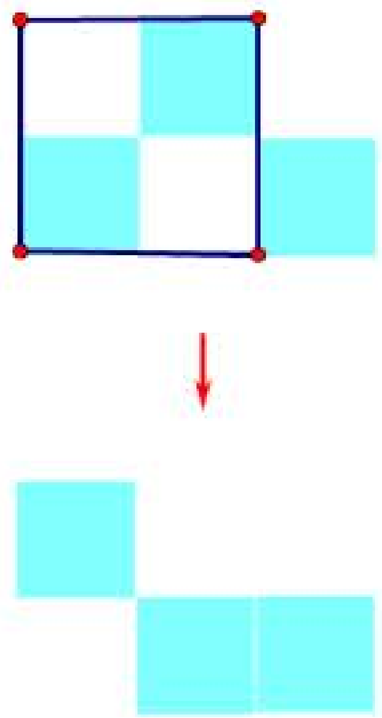
设中间一列黑格从上到下为 $A_1,A_2,\cdots,A_b$.

考虑 A_i,A_{i+1} 之间的行(不包括这两格所在行), 设有 l_i 行. $l_i\ge 1$. (A_i,A_{i+1} 所在行两边不是黑格.)

我们来证明其中至多 l_i-1 个黑格.

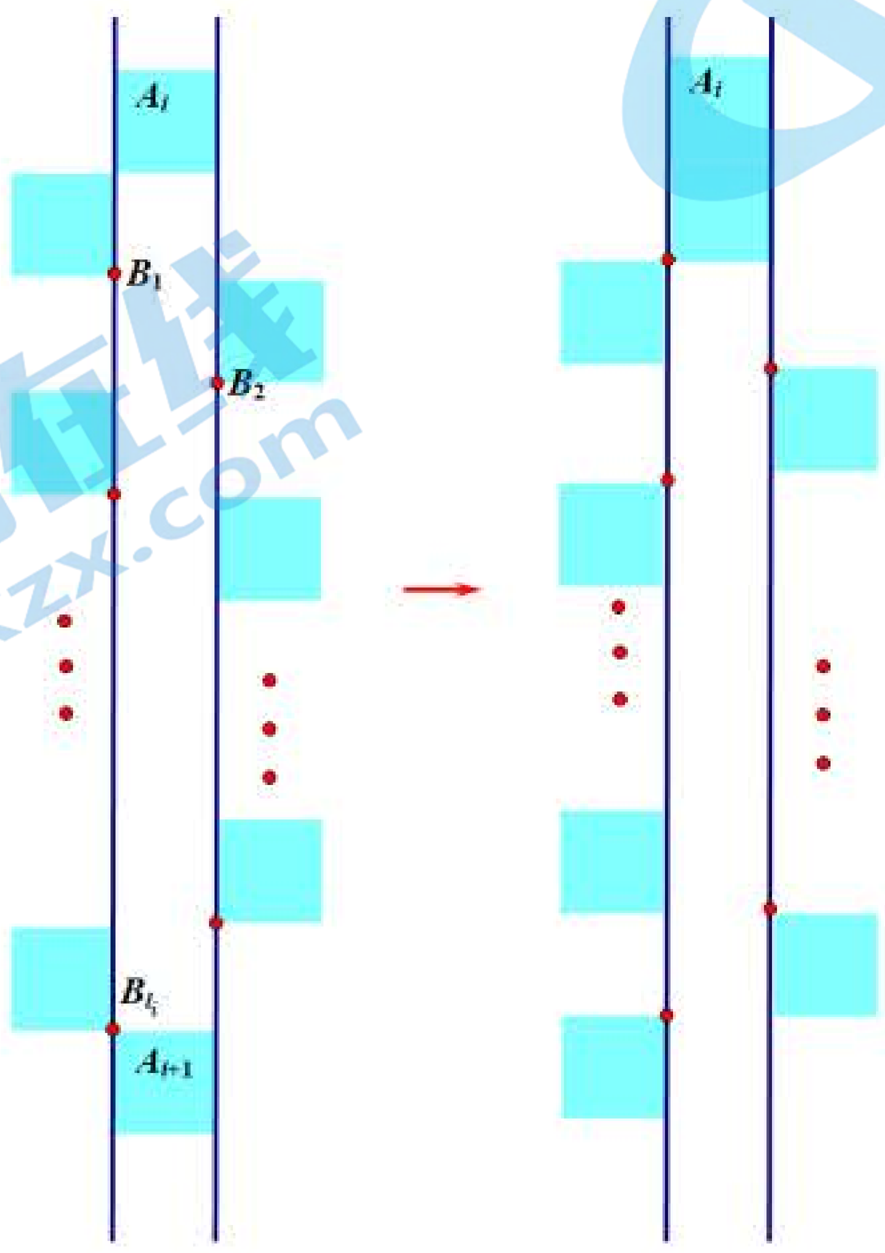
这 l_i 行中, 两边的行各至多 $\frac{l_i+1}{2}$ 个黑格.

如果其中正好 l_i+1 个黑格, 那么 A_i 左下角和右下角两格都是黑格, 可以进行操作使得两格黑格相邻, 矛盾!



下面证明不可能正好 l_i 黑格.

若 l_i 为奇数, 那么两边必各 $\frac{l_i+1}{2},\frac{l_i-1}{2}$ 个黑格. 由于不出现上面这种结构, 所以一定是下图左边的结构:

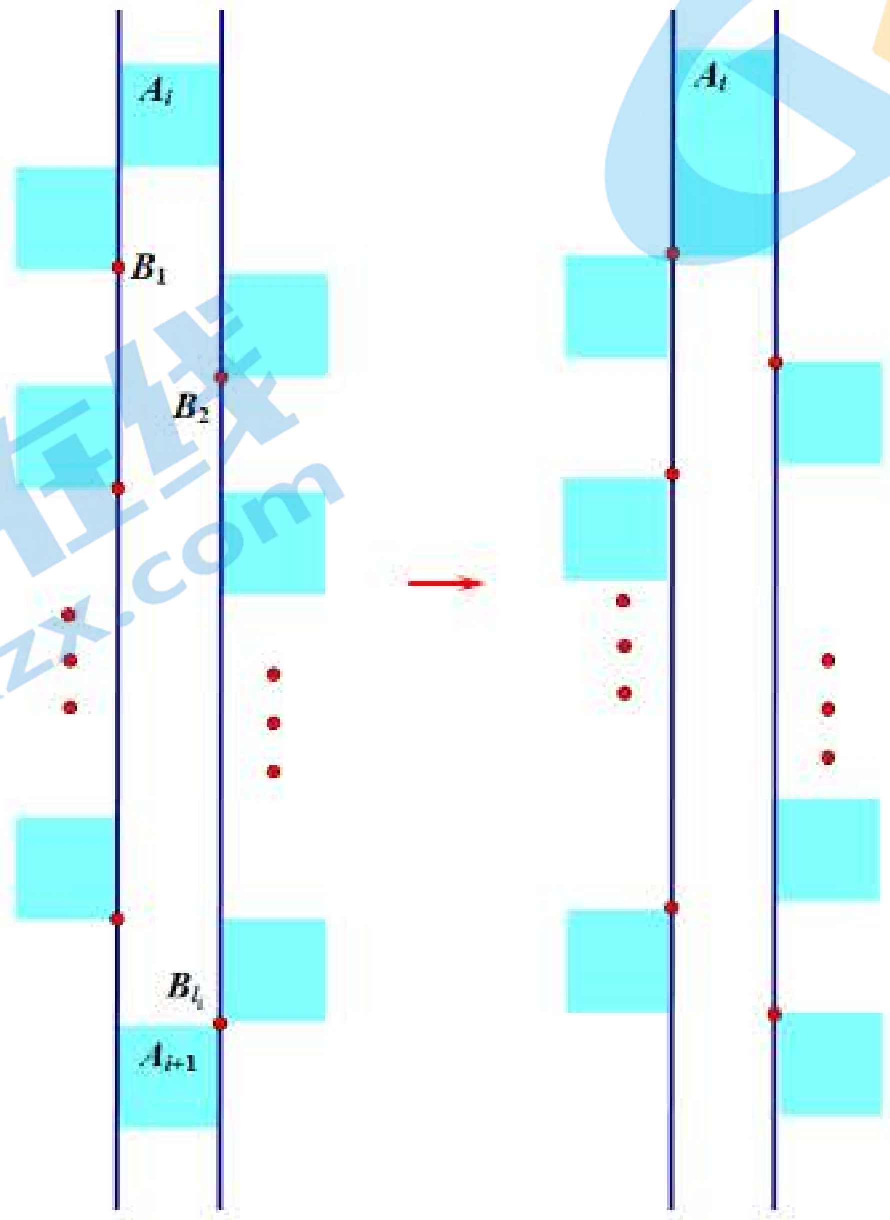


关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

如上图, 定义点 $B_1,\cdots,B_{l_i}$ 是这些黑格的左或右下角的顶点. 依次对于以 $B_{l_i},\cdots,B_1$ 的 2×2 进行操作 (2) , 则如上图所示得到两黑格相邻, 矛盾!

若 l_i 为偶数, 那么两边必各 $\frac{l_i}{2}$ 个黑格.

同样的, 由于不出现" A_i 左下角和右下角两格都是黑格"或者" A_{i+1} 左上角和右上角两格都是黑格",故一定是下图左侧结构或其左右对称:



如上图, 定义点 $B_1,\cdots,B_{l_i}$ 是这些黑格的左或右下角的顶点. 依次对于以 $B_{l_i},\cdots,B_1$ 的 2×2 进行操作 (2) , 则如上图所示得到两黑格相邻, 矛盾!

于是我们证明了 A_i,A_{i-1} 之间的行(不包括这两格所在行)至多 l_i-1 个黑格.

对于 A_1 上方 (A_b 下方) 的行 (设有 l 行) , 容易证明其中至多 l 个黑格.

于是累加起来就有 $a+2b+c\leq 2n+1$.

还需要处理一些边角情况: 比如一张 n 行的表格最左 (右) 边两列有 a,b 个黑格.

来证明 $3a+b\leq 3n+1$.

设第二列黑格 $A_1,\cdots,A_b$. 考虑第一列黑格与它们对角相邻的次数, 设为 k.

则每个 A_i 最多被对角相邻1次.

结合第一列黑格两两不相邻, 所以

$$a\leq\frac{2n-b-(b+1)}{2}+\frac{k+2}{2}\leq\frac{2n+1-b}{2}.$$

所以

$$3a+b\leq\frac{3}{2}\cdot(2n+1)\Rightarrow 3a+b\leq 3n+1.$$

假设我们剩下 $t\leq m+1$ 个列数之和 $2n-2m$ 的 n 行的子表.

设列数为 $x_1,x_2,\cdots,x_t,\sum_{i=1}^{t}x_i=2n-2m$.

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

Lemma:如果 $m\times n$ 里面有大于 $(m+1)(n+1)/4$ 个格子染黑，那么一定能操作使得两个黑格相邻。

Proof：反证，假设不行，那么是不能有三个。考虑所有能到达的状态中，$\sum_{(x,y)\text{black}}(x+y)^2$ 最小的一种。那么没有两个格子形如 $(x,y),(x+1,y+1)$，否则可以换为 $(x,y+1),(x+1,y)$；同样没有三个格子形如 $(x,y+1),(x+1,y),(x+2,y+2)$，否则可以通过两次对调换为 $(x,y),(x+2,y+1),(x+1,y+2)$。现在考虑每条形如 $x+y=c$ 的直线上连续的一段，假设有 $t+1$ 个 $(a+t,b),\cdots,(a,b+t)$，那么根据上面的讨论 $(a+t+1,b),\cdots,(a,b+t+1),(a+t+1,b+1),\cdots,(b+1,a+t+1),\cdots,(a+t+1,b+2),\cdots,(a+2,b+t+1)$ 这 $3t+3$ 个格子都不能有，并且，我们对应到的部分可以证明都是不交的，这就完成了引理的证明。

回到原题，如果能做出 2×2 里面有 3 个容易填满整个；现在根据引理能找出两个相邻的，不妨假设不同列，这个可以在那两列中自由移动，这样相邻的几列也最多一个，直到两边的列均为空。此时再在分出的两个子矩形里面这样继续，不断这样操作，可以证明不超过 n^2+n 个，或者存在两个不同行相邻，这样可以移动使得一个 2×2 里面有三个。

运用寻找一个扩张使得两两不交的想法，并且在这之前需要一个巧妙的调整来更好地刻画初始状态。

由于该场考试前两题难度较大，导致有时间做出这题的同学很少。

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜
京考一点通